

UM ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS BIFÁSICOS PARA TECIDOS BIOLÓGICOS MOLES SOB GRANDES DEFORMAÇÕES

Jonatas Stefanello Fagundes

Jakson Manfredini Vassoler

jonatas.fagundes@ufrgs.br

jmvassoler@ufrgs.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Rua Sarmiento Leite, 425, 90050-170, Porto Alegre, RS, Brazil

Abstract. Several biological tissues present a considerable percentage of their weight constituted by fluid, which directly impacts on its mechanical behavior, mainly due to viscous effects. An appropriate approach for the description of this material is the biphasic theory, in which the intrinsic mechanical properties of each phase, as well as their interactions, are taken into account. Therefore, this work has the objective of evaluating if biphasic models found in the literature are capable of representing the mechanical behavior of soft biological tissues in large deformations. The biphasic theory was used to describe the tissue as a continuous mixture of two incompressible phases: a hyperelastic solid phase, and an inviscid fluid. Finite element formulations, based on mixed elements and penalty technique, were implemented. The computational cost and accuracy of results were evaluated for an isotropic tissue in the case of a confined compression. An anisotropic constitutive relation for the solid phase was also studied under traction for fiber-reinforced biological tissues. The results for the confined compression shown good agreement with the literature. The traction case allowed to evaluate the ability of the model to represent the dissipative and anisotropic behavior expected for hydrated fiber-reinforced biological tissues, which would allow its use for the characterization of tissues under physiological conditions.

Keywords: Biphasic theory, Finite Element, Soft hydrated tissues

1 Introdução

A modelagem do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles pela mecânica do contínuo apresenta diversos desafios em relação a sua evolução temporal devido a processos biológicos, mecânicos e químicos. A maior parte destes tecidos apresentam comportamento mecânico anisotrópico e grandes deformações dentro do seu regime fisiológico de funcionamento (Cowin and Doty [1]). Além disso, esses tecidos são, em geral, porosos e permeáveis, apresentando água como o seu principal componente em termos de volume e peso (Ateshian [2]). A importância da fase fluida presente em tais tecidos já era conhecida por alguns dos primeiros investigadores da área (Maroudas and Bullough [3], McEwen [4]). Se sabe, por exemplo, que a presença de fluido produz efeitos mecânicos importantes, tais como a pressurização intersticial e comportamento mecânico viscoso, devido ao movimento do fluido relativo ao material sólido (Ehret et al. [5]). Portanto, é importante o desenvolvimento de modelos constitutivos que incorporem explicitamente o fluido intersticial dentro de sua formulação.

De forma a incluir o efeito do fluido no comportamento mecânico de tecidos dentro de uma formulação termodinamicamente consistente, Mow e colegas (Mow et al. [6]) desenvolveram a teoria bifásica baseada na teoria de misturas de Truesdell e Toupin (Truesdell and Toupin [7]), inicialmente aplicando a mesma para a modelagem de cartilagem, tecido no qual ainda se concentra a maior parte das aplicações desta formulação. Desde então, a teoria bifásica tem sido aplicada na modelagem dos mais diversos tecidos, tais como pele (Oftadeh et al. [8]), córnea (Bryant and McDonnell [9]), menisco (LeRoux and Setton [10]), tecido arterial (Huyghe et al. [11]) e tendão (Khayyeri et al. [12]). Em princípio, a teoria bifásica pode ser usada de forma efetiva para modelar qualquer tecido cujo fluido intersticial seja móvel (Ateshian [2]).

A aplicação da teoria bifásica em problemas de interesse prático poderá encontrar necessidade de uso de modelos constitutivos não lineares e anisotrópicos, assim como geometrias e condições de contorno complexas. Tais problemas podem ser intratáveis analiticamente, sendo necessário o uso de ferramentas numéricas para a sua solução. Dentre estas ferramentas, o método de elementos finitos se destaca como o mais utilizado para tal formulação (Spilker et al. [13]). Dentre as formulações de elementos finitos utilizadas para resolver o problema bifásico, duas se destacam por serem mais usadas: formulação baseada em penalidade (Chan et al. [14], Pérez del Palomar and Doblaré [15]) e formulação baseada em elementos mistos de deslocamentos e pressão (Ateshian et al. [16], Un and Spilker [17]). Dentro deste escopo, este trabalho tem como objetivo estudar estas duas formulações em elementos finitos para a aplicação em tecidos biológicos, analisando suas respostas frente a diferentes modos de deformação. Pretende-se com isto, avaliar as suas capacidades e limitações. Para emular o comportamento típico de tecidos biológicos como tendões e ligamentos, neste trabalho será incorporado anisotropia no modelo mecânico que descreve a fase sólida.

2 Teoria bifásica

Esta seção irá apresentar de forma simplificada a cinemática, equações governantes e hipóteses principais que compõem a teoria bifásica. Também serão apresentadas rapidamente as duas formulações de elementos finitos usadas para resolver o problema: uma formulação baseada em penalidade, e uma formulação por elementos mistos de pressão e velocidade sólida. Para informações mais detalhadas, favor consultar Mow et al. [6] e Almeida and Spilker [18].

2.1 Equações governantes teoria bifásica

Na teoria bifásica, o tecido é modelado como uma mistura de um sólido poroso saturado por fluido. A interação entre a fase sólida e líquida é dada através de uma força de corpo difusiva proporcional a permeabilidade e velocidade relativa entre fases, governada por uma lei fenomenológica análoga à lei de Darcy de consolidação de solos. Dentro desta formulação, diferentes modelos constitutivos podem ser escolhidos para modelar o comportamento mecânico da matriz sólida (leis hiperelásticas) e do fluido

(permeabilidade) de forma independente.

O termo mistura bifásica usado neste trabalho denomina uma mistura binária composta de uma matriz porosa deformável saturada em todos os instantes de tempo por um fluido invíscido. Neste caso, pode-se tomar como hipótese que a mistura é isotérmica, e que efeitos inerciais são desprezíveis.

Uma mistura bifásica corresponde a uma sobreposição de meios contínuos deformáveis (constituintes) que ocupam o mesmo domínio Ω no instante de tempo t . Cada constituinte segue um movimento independente, e possui uma configuração de referência arbitrária Ω_0^α (Mow et al. [6]). O balanço de massa para uma mistura bifásica é representado pelas seguintes equações:

$$\phi^s + \phi^f = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) = 0 \quad (2)$$

onde ϕ é a fração de volume e \mathbf{v} a velocidade de um ponto do domínio Ω . Os superíndices “s” e “f” são usados para identificar quantidades relacionadas a fase sólida e fluida, respectivamente. A Eq. (1) se refere a restrição de que a matriz sólida esta sempre em estado saturado. A Eq. (2) é a equação da continuidade para uma mistura incompressível. A fração de volume no estado atual $\phi^\alpha = \frac{V^\alpha}{V}$ é dada pela razão entre o volume da fase α no instante atual pelo volume da mistura, e devido à condição de incompressibilidade pode ser relacionada com a fração de volume inicial a partir da deformação volumétrica da matriz sólida:

$$\phi^s = \frac{\phi_0^s}{J^s}, \quad \phi^f = 1 - \frac{\phi_0^s}{J^s} \quad (3)$$

onde $J^s = \det(\mathbf{F}^s)$ é o Jacobiano do gradiente de deformação da matriz sólida, $\mathbf{F}^s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^s}$. Por sua vez, ϕ_0^s é a fração de volume da fase sólida avaliadas na configuração de referência. As equações de conservação de momentum para cada fase, desprezando forças de corpo externas (não provenientes da interação entre o sólido e o fluido) é dado por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\pi}^s = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \boldsymbol{\pi}^f = \mathbf{0} \quad (5)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^s$ é a tensão de Cauchy da fase sólida, $\boldsymbol{\sigma}^f$ é a tensão de Cauchy da fase fluida, e $\boldsymbol{\pi}^s$ e $\boldsymbol{\pi}^f$ são uma força de corpo interna difusiva.

As relações constitutivas para um sólido hiperelástico e um fluido invíscido são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = -\phi^s p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_E^s \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_E^s = 2\mathbf{F}^s \frac{\partial \psi^s}{\partial \mathbf{C}^s} \mathbf{F}^{sT} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -\phi^f p \mathbf{I} \quad (8)$$

onde $\mathbf{C}^s = \mathbf{F}^{sT} \mathbf{F}^s$ é o tensor deformação Cauchy-Green a direita da fase sólida, $\boldsymbol{\sigma}_E^s$ é a tensão elástica sólida, ψ^s corresponde a função de energia livre de Helmholtz da fase sólida e p a pressão hidrostática verdadeira. A força de corpo difusiva $\boldsymbol{\pi}^s$ e $\boldsymbol{\pi}^f$ são obtidas por:

$$\boldsymbol{\pi}^s = -\boldsymbol{\pi}^f = p\nabla\phi^s + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (9)$$

onde $\boldsymbol{\zeta}$ é um tensor de 2º ordem, chamado tensor de arrasto difusivo, o qual é relacionado com o tensor de permeabilidade por:

$$\boldsymbol{\zeta} = \phi^{f^2} \boldsymbol{\kappa}^{-1} \quad (10)$$

Vale salientar que no regime de grandes deformações, se assume que o tensor de permeabilidade $\boldsymbol{\kappa}$ depende da deformação da matriz sólida, e sua relação constitutiva deve ser fornecida de forma análoga ao que ocorre com a energia livre de Helmholtz ψ^s .

2.2 Formulação de elementos finitos por penalidade

Nesta formulação, a equação de continuidade, Eq. (2), é substituída por uma forma penalizada da mesma (Suh et al. [19]):

$$\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) + \frac{p}{\beta} = 0 \quad (11)$$

onde β é um fator de penalidade grande o suficiente para cumprir a equação de continuidade de forma aproximada. Usando o método de resíduos ponderados, multiplica-se Eqs. (4) e (5) por uma função peso \mathbf{w}^s e \mathbf{w}^f respectivamente, e a equação Eq. (11) por uma função peso q , e integra-se as mesmas no domínio Ω^s :

$$\int_{\Omega^s} [\mathbf{w}^s \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_E^s - \phi^s \nabla p - \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f)) + \mathbf{w}^f \cdot (-\phi^f \nabla p + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f)) + q(\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{v}^s + \phi^f \mathbf{v}^f) + \frac{p}{\beta})] d\Omega = 0 \quad (12)$$

Usando integração por partes, se obtêm a forma fraca da Eq. (12):

$$\int_{\Omega^s} (tr [(\nabla \mathbf{w}^s)^T \boldsymbol{\sigma}_E^s] - p \nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \cdot (\mathbf{w}^s - \mathbf{w}^f) - q[\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) + \frac{p}{\beta}]) d\Omega = \int_{\Gamma_i^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma - \int_{\Gamma_i^f} \mathbf{w}^f \cdot \bar{p} \phi^f \mathbf{n} d\Gamma \quad (13)$$

onde $\bar{\mathbf{t}}^s = (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\phi^s \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}$ é o valor prescrito de tração agindo na matriz sólida, e \bar{p} é o valor prescrito de pressão. Usando relações clássicas da mecânica dos sólidos (Bonet and Wood [20]), a integral da Eq. (13) é transformada para a configuração de referência:

$$\int_{\Omega_0^s} [tr(\nabla_x (\mathbf{w}^s)^T \mathbf{F}^s \mathbf{S}_e^s)] d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^s} [p \nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \cdot (\mathbf{w}^s - \mathbf{w}^f) - q \left(\nabla \cdot (\phi^s \mathbf{w}^s + \phi^f \mathbf{w}^f) + \frac{p}{\beta} \right)] d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{i0}^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s J_1^s d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_{i0}^f} \mathbf{w}^f \cdot (\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{F}^{-1}) \bar{p} \phi^f J^s d\Gamma_0 \quad (14)$$

Discretizando o domínio e interpolando as variáveis primárias do problema, assim como as funções peso.

$$p_h = N_p^c p^c \quad q_h = N_p^c q^c \quad \mathbf{v}_h^s = N^a \mathbf{v}^{sa} \quad (15)$$

$$\mathbf{w}_h^s = N^a \mathbf{w}^{sa} \quad \mathbf{v}_h^f = N^a \mathbf{v}^{fa} \quad \mathbf{w}_h^f = N^a \mathbf{w}^{fa} \quad (16)$$

Como a forma fraca não envolve a derivada da pressão p , a interpolação usada para essa variável e para a função peso q pode ser descontínua. Usando as interpolações dadas por Eq. (15) e Eq. (16) na Eq. (14), é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & -\mathbf{A}_{mp}^{eT} \\ -\mathbf{A}_{mp}^e & -\frac{\mathbf{H}_{mp}^e}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^e \\ \mathbf{p}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde \mathbf{g}^{se} corresponde a contribuição devido a tensão elástica sólida, e \mathbf{v}^e contém os graus de liberdade de velocidade do sólido e do fluido. Como nessa formulação a interpolação da pressão não precisa ser contínua, a mesma pode ser eliminada por meio de um processo de condensação estática:

$$\mathbf{p}^e = -\beta(\mathbf{H}_{mp}^{e-1} \mathbf{A}_{mp}^e \mathbf{v}^e) \quad (18)$$

Substituindo Eq. (18) no sistema dado pela Eq. (17) e realizando o processo de sobreposição nodal, chega-se na seguinte equação não linear:

$$\mathbf{Y}_{mp} \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f} \quad (19)$$

onde:

$$\mathbf{Y}_{mp} = [\mathbf{Y}_2 + \beta \mathbf{Y}_1], \quad \mathbf{Y}_1^e = \mathbf{A}_{mp}^{eT} \mathbf{H}_{mp}^{e-1} \mathbf{A}_{mp}^e \quad (20)$$

$$\mathbf{g}^{eT} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^s & \mathbf{f}^f \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.3 Formulação de elementos finitos por elementos mistos

Na formulação por elementos mistos (Un and Spilker [17]), a velocidade do fluido \mathbf{v}^f é eliminada como incógnita das equações governantes. Decorrente disso, a pressão se torna uma variável primária do problema, requerendo uma interpolação contínua entre elementos. Operando na equação de continuidade (Eq. (2)) e na equação de conservação de momentum (Eqs. (4) e (5)), após algumas manipulações algébricas obtêm-se as seguintes equações equivalentes (Almeida and Spilker [18]):

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^s - \kappa \nabla p) = 0 \quad (22)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (23)$$

Procedendo de forma análoga à formulação de penalidade, multiplica-se a Eq. (22) por uma função peso \mathbf{w}^s e a Eq. (23) por uma função peso q e integra-se no domínio Ω^s :

$$\int_{\Omega^s} [\mathbf{w}^s \cdot (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\mathbf{I})) + q(\nabla \cdot (\mathbf{v}^s - \kappa \nabla p))] d\Omega = 0 \quad (24)$$

Usando integração por partes se obtêm a forma fraca da Eq. (24):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} [tr [(\nabla \mathbf{w}^s)^T \boldsymbol{\sigma}_E^s] - q \nabla \cdot \mathbf{v}^s - p \nabla \cdot \mathbf{w}^s - \nabla q \cdot (\kappa \nabla p)] d\Omega = \\ \int_{\Gamma_t^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_t^f} q \bar{Q} d\Gamma \end{aligned} \quad (25)$$

onde $\bar{\mathbf{t}} = (\boldsymbol{\sigma}_E^s - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}$ corresponde a tração prescrita agindo na mistura, e $\bar{Q} = (-\kappa \nabla p) \cdot \mathbf{n}$ corresponde ao fluxo prescrito de fluido na direção normal. Transformando para a configuração de referência:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^s} tr(\nabla_x (\mathbf{w}^s)^T \mathbf{F}^s \mathbf{S}_e^s) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^s} (q \nabla \cdot \mathbf{v}^s + p \nabla \cdot \mathbf{w}^s + \kappa \nabla p \cdot \nabla q) J^s d\Omega_0 = \\ \int_{\Gamma_{t0}^s} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s J_{\Gamma}^s d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_{t0}^f} q \bar{Q} J_{\Gamma}^s d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (26)$$

Usando as interpolações dadas por Eq. (15) e Eq. (16), e observando que para esta formulação a interpolação de p e q deverá ser contínua, obtêm-se o seguinte sistema de equação não linear:

$$\sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{seT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{vp}^{eT} \\ -\mathbf{A}_{vp}^e & -\mathbf{H}_{vp}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{se} \\ \mathbf{p}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{se} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \sum_{e=1}^{n_{et}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{eT} & \mathbf{q}^{eT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{te} \\ \mathbf{Q}^e \end{bmatrix} \quad (27)$$

Agrupando as submatrizes e realizando o processo de sobreposição nodal, chega-se de forma análoga a Eq. (19) na seguinte equação não linear:

$$\mathbf{Y}_{vp} \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f} \quad (28)$$

2.4 Linearização

As Eqs. (19) e (28) correspondem a um sistema de equações não lineares, e para resolvê-las é necessário linearizá-las. Embora seja possível realizar uma linearização completa, isso geralmente não é necessário, e diferentes níveis de linearização são possíveis. Nesse trabalho se escolheu o menor nível de linearização possível, no qual é linearizado apenas a parcela elástica $\mathbf{g}^s(\mathbf{u}^s)$ conforme Un and Spilker [17] e Almeida and Spilker [18].

A parcela elástica é dada por:

$$\mathbf{g}^s(\mathbf{u}^s) = \int_{\Omega_0^s} tr((\nabla_x \mathbf{w}^{sT}) \mathbf{F}^s \mathbf{S}_e^s) d\Omega_0 \quad (29)$$

Linearizando Eq. (29) em relação ao deslocamento:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\{g^s(\mathbf{u}^s), \Delta\mathbf{u}^s\} = g^s(\bar{\mathbf{u}}^s) + \int_{\Omega_0^e} [\text{sym}((\nabla_x \mathbf{w}^s)^T \mathbf{F}^s) : \mathbb{C} : \text{sym}(\mathbf{F}^{sT} \nabla_x(\Delta\mathbf{u}^s)) + \\ \text{tr}((\nabla_x \mathbf{w}^s) \mathbf{S}_e^s(\nabla_x(\Delta\mathbf{u}^s))] d\Omega_0 \end{aligned} \quad (30)$$

onde \mathbb{C} é o tensor elástico Lagrangeano, obtido por:

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C}^s \partial \mathbf{C}^s} \quad (31)$$

Interpolando o deslocamento obtém-se a forma matricial da Eq. (31) (Bonet and Wood [20]):

$$\mathbb{L}\{g^s(\mathbf{u}^s), \Delta\mathbf{u}^s\} = \mathbf{w}^{seT} (\bar{\mathbf{g}}^{se} + \mathbf{K}^{se} \Delta\mathbf{u}^{se}) \quad (32)$$

2.5 Solução temporal

As Eqs. (19) e (28) envolvem deslocamentos e velocidades sólidos. Para relacionar essas duas quantidades é utilizado um esquema trapezoidal para a solução no tempo (Hughes [21]). Em um esquema de solução temporal trapezoidal o deslocamento u^s no tempo t_{n+1} e iteração i é relacionado com o deslocamento u^s e velocidade v^s no tempo t_n de acordo com:

$$(\mathbf{u}_{n+1}^s)^i = \mathbf{u}_n^s + (1 - \omega)\Delta t \mathbf{v}_n^s + \omega \Delta t (\mathbf{v}_{n+1}^s)^i \quad (33)$$

onde $\omega \in [0, 1]$. Para o problema bifásico, a solução será estável para $\omega \geq 0.5$ (Almeida and Spilker [18]). Neste trabalho se usou $\omega = 0.5$ conforme Suh et al. [19].

As Eqs. (32) e (33) são introduzidas nas Eqs. (19) e (28), e um esquema iterativo de avanço no tempo é obtido. O esquema de solução obtido pode ser sumarizado nos seguintes passos:

1. Primeira iteração Newton-Raphson ($i = 0$):

(a) Inicialização dos vetores de velocidade, pressão e deslocamento usando os resultados convergidos do instante anterior.

$$\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{s(0)} = \mathbf{u}_n^s + \Delta t \mathbf{v}_n^s \quad (35)$$

(b) $i = 1$. Cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} e capacitância \mathbf{Y} usando $\mathbf{u}_{n+1}^{s(0)}$, e obtenção de $\Delta\mathbf{v}_{n+1}$ resolvendo a equação:

$$[\mathbf{Y}_{n+1}^0 + \omega \Delta t \mathbf{K}_{n+1}^0](\Delta\mathbf{v}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{Y}_{n+1}^0 \mathbf{v}_{n+1}^0 - \mathbf{g}_{n+1}^0 \quad (36)$$

(c) Correção das variáveis:

$$\mathbf{v}_{n+1}^1 = \mathbf{v}_{n+1}^0 + \Delta \mathbf{v}_{n+1} \quad (37)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{s(1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{s(0)} + w \Delta t \Delta \mathbf{v}_{n+1} \quad (38)$$

2. Iterações restantes:

(a) Atualização da iteração: $i = i + 1$

(b) Cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} e capacitância \mathbf{Y} usando $\mathbf{u}_{n+1}^{s(i)}$, e obtenção de $\Delta \mathbf{v}_{n+1}$ resolvendo a equação:

$$[\mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} + w \Delta t \mathbf{K}_{n+1}^{i-1}](\Delta \mathbf{v}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{Y}_{n+1}^{i-1} \mathbf{v}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{g}_{n+1}^{i-1} \quad (39)$$

(c) Correção das variáveis:

$$(\mathbf{u}_{n+1}^s)^i = \mathbf{u}_n^s + (1 - w) \Delta t \mathbf{v}_n^s + w \Delta t (\mathbf{v}_{n+1}^s)^i \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_{n+1}^i = \mathbf{v}_{n+1}^{i-1} + \Delta \mathbf{v}_{n+1} \quad (41)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{s(i)} = \mathbf{u}_{n+1}^{s(i-1)} + w \Delta t \Delta \mathbf{v}_{n+1} \quad (42)$$

(d) Repetição da etapa 2.(a-c) até que o resíduo seja menor que a tolerância estabelecida

3. Após convergência, avança-se para o próximo instante de tempo. Repetem-se as etapas anteriores.

3 Metodologia

Este estudo será dividido em duas partes. Na primeira parte é realizado um teste de benchmark das formulações de penalidade e de elementos mistos de modo a entender as suas capacidades, vantagens e desvantagens frente a acurácia e tempo de processamento. Na segunda parte deste estudo será investigado o comportamento mecânico do modelo para casos de tração e compressão, usualmente utilizados para a caracterização mecânica de tecidos biológicos, sendo incorporado para isto um modelo anisotrópico na descrição do comportamento mecânico da fase sólida.

4 Resultados e discussões

4.1 Benchmark

Para o estudo de benchmark das formulações, se escolheu o caso de compressão confinada, já que por se tratar de um problema unidimensional o mesmo pode ser resolvido por diferenças finitas (ver Almeida and Spilker [22] para detalhes), fornecendo um resultado independente para comparação. Um diagrama representando um típico ensaio de compressão confinada é mostrado em Fig. 1.

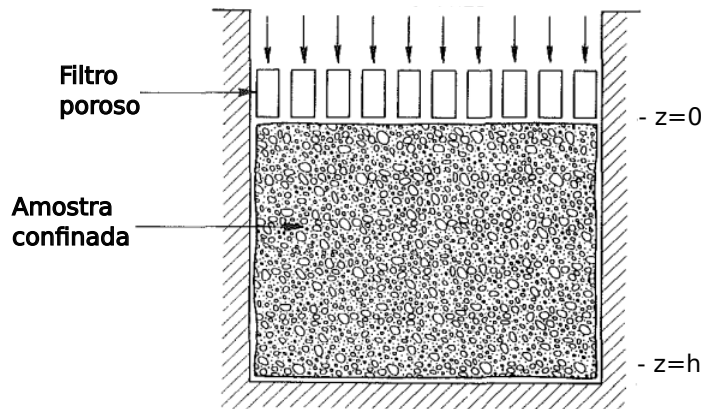


Figura 1. Diagrama esquemático de um ensaio de compressão confinada. Adaptado de Holmes [23]

A geometria simulada corresponde a uma coluna de 0.25 mm de diâmetro e 1 mm de altura. Foram analisados um caso de relaxação, com uma deformação imposta $\epsilon_o = 0.1$ em $t_o = 50$ s, e um caso de fluência com carregamento $\sigma_o = 0.2664$ MPa. Para o caso de relaxação e fluência o carregamento foi discretizado usando 721 intervalos de tempo para um tempo final de 120 s.

A função de energia livre de Helmholtz ψ^s e a função de permeabilidade escolhida foram retiradas da literatura.

$$\kappa = \kappa_0 \left(\frac{\phi_0^s \phi^f}{(1 - \phi_0^s) \phi^s} \right)^L \exp \left(\frac{M(I_3 - 1)}{2} \right) \quad (43)$$

$$\Psi^s = \alpha_0 \frac{\exp(\alpha_1(I_1 - 3) + \alpha_2(I_2 - 3))}{I_3^n - \alpha_0} \quad (44)$$

Os parâmetros de material utilizados foram retirados de Almeida and Spilker [22] e são apresentados na Tab. 1:

Tabela 1. Parâmetros de material

Parâmetro	Valor
α_o	0.1084 MPa
α_1	0.592
α_2	0.0846
κ_o	$2.519e-15 \frac{m^4}{Ns}$
L	0.0848
M	4.638
ϕ_o^s	0.2
n	0.7612

Foi testado uma malha de 11 elementos retangulares axissimétricos. Para elementos de ambas as formulações se utilizou uma interpolação quadrática nas variáveis cinemáticas (deslocamento e velocidade) e uma interpolação linear para a pressão.

Nas Figs. 2 a 4 são mostrados os resultados obtidos por elementos finitos para o carregamento de relaxação e fluência, comparados com os resultados de referência, obtido por diferenças finitas (Almeida and Spilker [22]). Os resultados são normalizados utilizando o módulo agregado $H_a = 0.33$ MPa e tempo de difusão $t_d = 1200$ s, quantidades que caracterizam a equação unidimensional que governa o problema (Holmes [23]). Na Tab. 2 é mostrado a norma Euclidiana de erro entre os resultados obtidos pelas formulações em elementos finitos e os resultados obtidos por diferenças finitas.

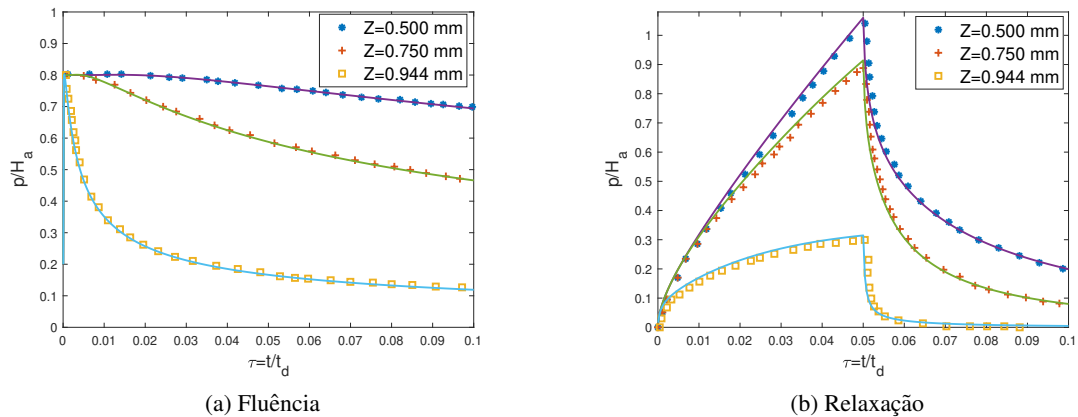


Figura 2. Pressão normalizada ao longo do tempo para alturas de 0.5 mm, 0.75 mm e 0.944 mm. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão sobrepostas.

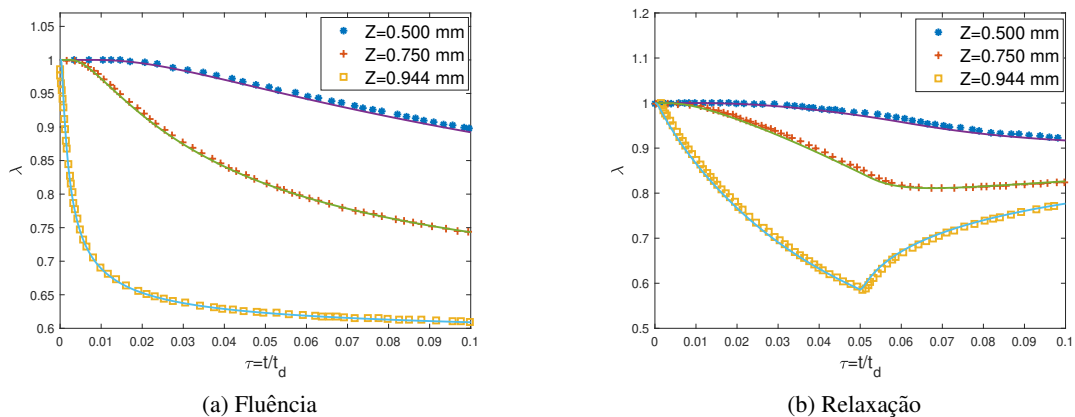


Figura 3. Alongamento axial ao longo do tempo para alturas de 0.5 mm, 0.75 mm e 0.944 mm. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão sobrepostas.

Pode-se notar que a formulação de penalidade apresentou uma norma de erro menor que a de elementos mistos, porém, como observado nas Figs. 2 a 4, os resultados apresentados são muito similares, com ambas apresentando bons resultados.

Nas Figs. 2 a 4 já se pode notar algumas características do comportamento mecânico do modelo bifásico. Por exemplo, durante toda a duração da aplicação do carregamento o mesmo é suportado principalmente pela pressão hidrostática, o que indica que a fase fluída é a principal responsável pela resistência a carga para esse caso. Isso é salientado ao separar a parcela da força de reação devido à fase sólida e fluída, conforme mostra a Fig. 5, onde foi usado os resultados obtidos pela formulação de penalidade.

Analisando Fig. 3 (b) e Fig. 4 (b), se nota que após o fim da rampa de deslocamento, ocorre uma

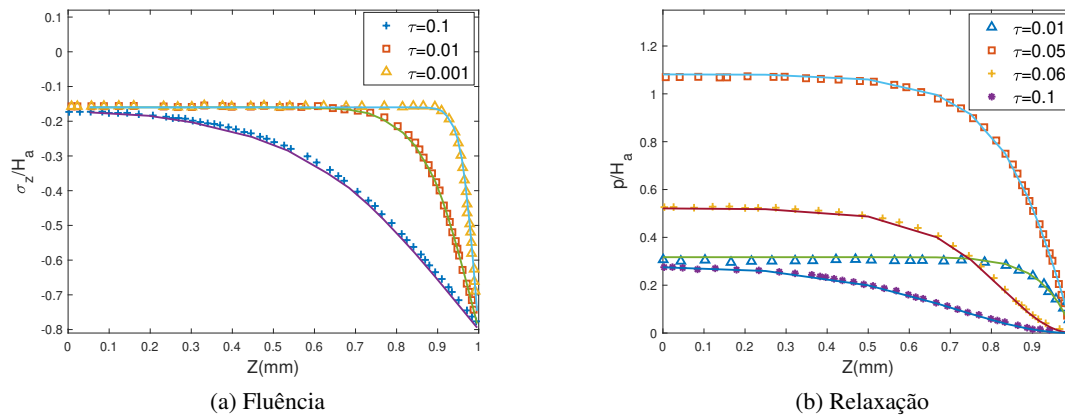


Figura 4. a) Tensão axial normalizada ao longo da altura para $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ e $\tau = 0.001$ b) Pressão normalizada ao longo da altura para $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ e $\tau = 0.001$. Marcadores indicam resultados por diferenças finitas e linhas contínuas indicam resultados obtidos por elementos finitos mistos e por penalidade, onde estas estão sobrepostas.

Tabela 2. Normas de erro entre formulações em elementos finitos e diferenças finitas para pressão normalizada e alongamento nas alturas $Z = 0.500$ mm, 0.750 mm, 0.944 mm

	Formulação mista	Formulação penalidade
Pressão normalizada $\frac{p}{H_a}$ (Relaxação)	0.438	0.198
Pressão normalizada $\frac{p}{H_a}$ (Fluência)	0.099	0.090
Alongamento λ (Relaxação)	0.083	0.042
Alongamento λ (Fluência)	0.072	0.069

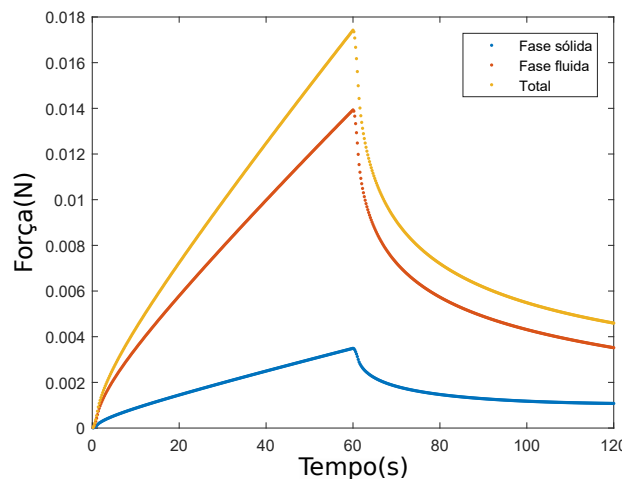


Figura 5. Força de reação vertical ao longo do tempo por fase (Relaxação)

diminuição progressiva do alongamento da amostra, causado pela exsudação de fluido, a qual também leva a uma diminuição da pressão hidrostática interna, em direção ao equilíbrio. Isso condiz fisicamente com o que se espera que ocorra para um sólido permeável saturado de fluido.

O tempo médio de execução para cada formulação é mostrado na Tab. 3. O processador usado foi um *Intel Core i7* 4.00 GHz.

Tabela 3. Tempo médio de simulação para formulação de penalidade e elementos mistos.

Carregamento(Formulação)	Tempo de execução
Relaxação (elementos mistos)	93.4 s
Relaxação (penalidade)	214 s
Fluência (elementos mistos)	89.4 s
Fluência (penalidade)	281.7 s

Se nota uma clara vantagem da formulação de elementos mistos em relação ao tempo de execução. Vale salientar que foi usado o mesmo critério de convergência para ambas as formulações, assim como a mesma malha de elementos finitos e quantidade de passos na discretização do carregamento.

4.2 Casos de estudo para tecidos biológicos

Com o objetivo de verificar a capacidade de representação do comportamento mecânico de tecidos biológicos frente a diferentes modos de deformação, estes modelos bifásicos foram estudados frente a um teste de relaxação em tração e compressão não confinada. Estes são casos geralmente utilizados em ensaios experimentais para caracterizar o comportamento de tecidos biológicos (Böl et al. [25], Carniel et al. [24]). Para se aproximar a uma situação mais realista frente a ensaios de tendões e ligamentos, neste estudo foi incorporado um modelo de material anisotrópico com fibras para a fase sólida (Holzapfel et al. [26]).

$$\psi_{ani}^s = \frac{k_1}{2k_2} \exp(k_2(I_4 - 1)^2 - 1) \quad (45)$$

No caso em que a fibra está em compressão ($I_4 \leq 1$), a contribuição anisotrópica é suposta nula. A parcela isotrópica de ψ^s , assim como a função de permeabilidade κ e parâmetros usados são iguais aos da seção anterior. Para o caso de tração e compressão as fibras são orientadas na direção do carregamento. Os parâmetros de material usados para ψ_{ani}^s são mostrados na Tab. 4.

Tabela 4. Parâmetros de ψ_{ani}^s

Parâmetro	Valor
k_1	0.5 MPa
k_2	2

A geometria utilizada consiste em uma coluna de diâmetro 2 mm e altura de 1 mm. O deslocamento aplicado para o caso de tração e compressão foi de 0.2 mm, aplicados em forma de rampa até o tempo $t_0 = 50$ s, após o qual é mantido constante. Um diagrama esquemático representando este ensaio é mostrado na Fig. 6:

O contato da amostra com a placa superior e inferior é modelado como completamente adesivo ($u_r = 0$), e a placa é suposta completamente impermeável. A pressão é suposta nula na lateral da amostra cilíndrica, permitindo com que o fluido escoe livremente. Os resultados obtidos na análise são apresentados nas Figs. 7 a 11:

Analisando a Fig. 8 percebe-se que o comportamento viscoso da força de reação é mais pronunciado para o caso de compressão do que para o de tração. No modelo bifásico a viscosidade mecânica é controlada pelo movimento relativo de fluido, que foi de maior magnitude para o caso de tração (ver

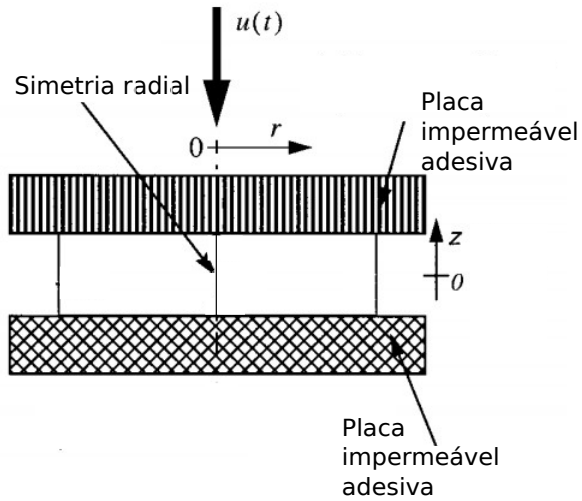


Figura 6. Diagrama esquemático de compressão e tração não confinadas em placa impermeável adesiva (adaptado de Wu and Herzog [27])

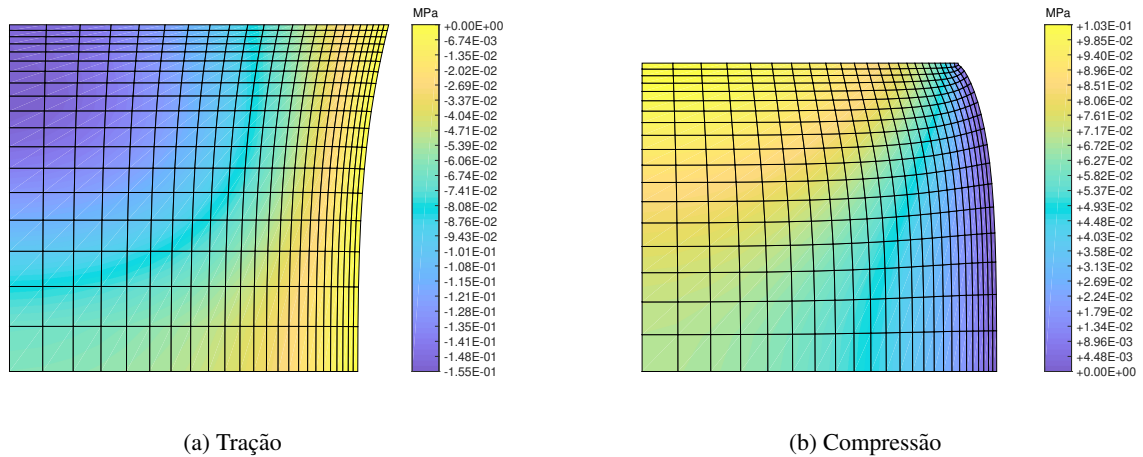


Figura 7. Distribuição de pressão em $t = 50$ s para o carregamento de tração (a) e compressão (b).

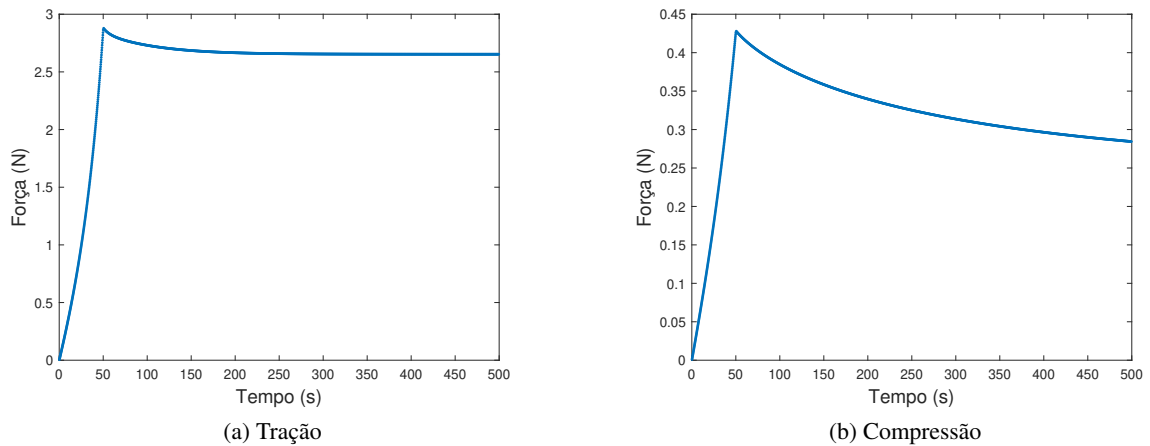


Figura 8. Valor absoluto da força de reação vertical ao longo do tempo para o carregamento de tração (a) e compressão (b).

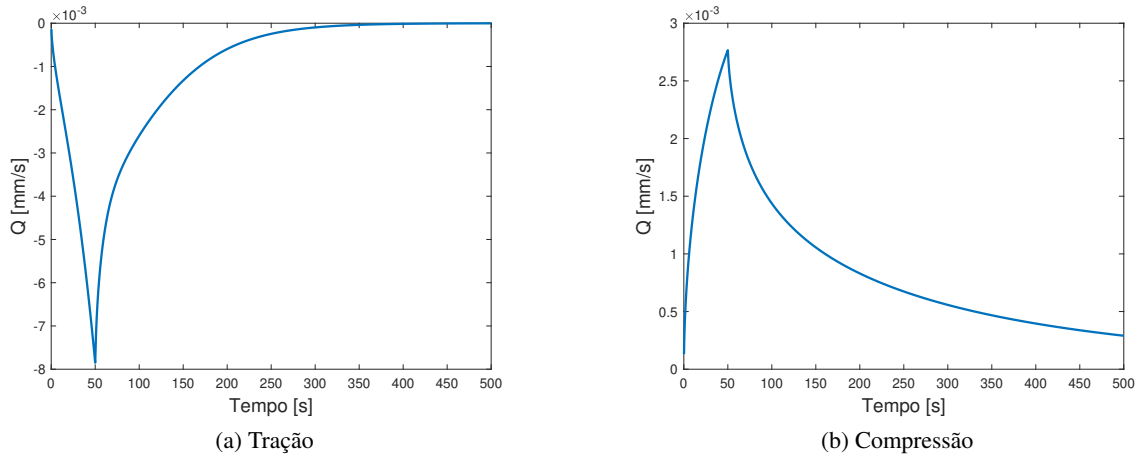


Figura 9. Fluxo de fluido no contorno da coluna ao longo do tempo para o carregamento de tração (a) e compressão (b).

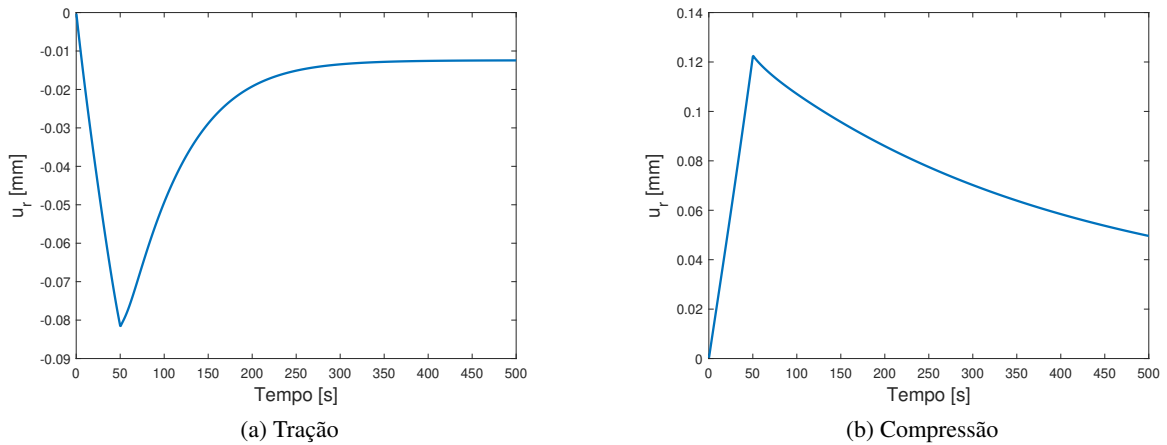


Figura 10. Deslocamento radial máximo ($r = 1 \text{ mm}$, $z = 0 \text{ mm}$) ao longo do tempo para o carregamento de tração (a) e compressão (b).

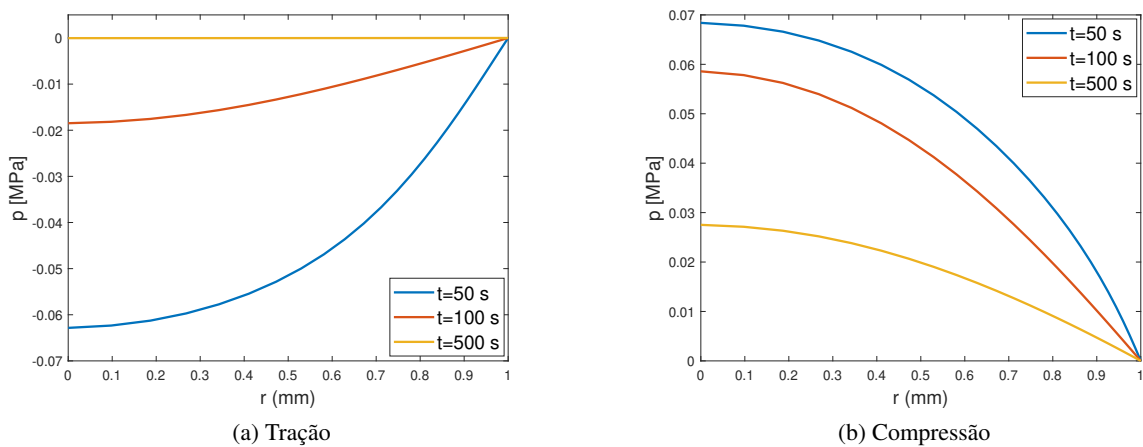


Figura 11. Pressão ao longo do raio em $z = 0 \text{ mm}$ no tempo de 50 s, 100 s e 500 s para o carregamento de tração (a) e compressão (b).

Fig. 9). Como a rigidez extra, fornecida pela anisotropia da fase sólida só é ativada quando a fibra esta em tração, esta poderia agir como uma possível causa para a menor magnitude do efeito viscoso na força de reação. Em tecidos biológicos moles, essa anisotropia geralmente decorre devido à presença de fibras de colágeno (tendão e ligamentos, por exemplo), as quais possuem uma rigidez muito maior que a matriz na qual elas se encontram (Böl et al. [25]), e também apresentam uma viscosidade inerente (Sanjeevi et al. [28]) independente do escoamento do fluido.

Na Fig. 9 valores positivos de fluxo denotam saída de fluido, e valores negativos, entrada. Logo se nota que ocorre a saída de líquido da amostra em compressão, e entrada de líquido na tração, o que é devido ao gradiente de pressão gerado pelo carregamento (Fig. 10), e é coerente com o esperado pela lei de Darcy. Entretanto, se sabe que vários tecidos cartilagosos apresentam uma exsudação de fluido durante carregamento de tração (Ehret et al. [5]), o que contrasta com o esperado pela teoria bifásica com as hipóteses usadas neste trabalho. Isso indica que o modelo constitutivo aqui estudado, com os respectivos potenciais e parâmetros de material escolhidos, levam a respostas inconsistentes com as esperadas. A Fig. 10 mostra que após o termino da aplicação da rampa de deslocamento em $t = 50$ s, a troca de fluido com o ambiente produz uma relaxação no deslocamento radial, fazendo com que a geometria se aproxime à sua configuração original. Já a Fig. 11 mostra que para o caso de tração o estado de equilíbrio é alcançado para $t = 500$ s, pois, a pressão hidrostática é nula nesse instante. Isso não ocorre para o caso de compressão, indicando que o equilíbrio ainda não foi alcançado para esse carregamento.

5 Conclusões

Neste trabalho foi estudado e implementado duas formulações de elementos finitos para a solução do problema bifásico em grandes deformações, sendo uma formulação baseada em penalidade, e outra baseada em elementos mistos de pressão e velocidade sólida. Como esperado, ambas formulações apresentaram resultados com boa concordância em relação a uma solução convergida de diferenças finitas para o caso de compressão confinada, entretanto, a formulação baseada em elementos mistos obteve grande vantagem no quesito custo computacional, e por foi utilizada para os testes de relaxação e fluência.

Para testar as capacidades e limitações da resposta mecânica da teoria bifásica aplicada em tecidos biológicos, foram realizados testes numéricos de tração e compressão não confinada. Foi incorporado uma lei anisotrópica para a matriz sólida, que representaria a presença de fibras alinhadas, sendo que a rigidez destas fibras foi suposta muito maior que a rigidez da matriz. A força de reação obtida para o caso de tração foi dominado pela rigidez das fibras, apresentando pouco comportamento dissipativo quando comparado com o resultado obtido para a carga compressiva, o que pode indicar a necessidade de inclusão de leis viscoelásticas independentes do movimento de fluido para governar a dissipação mecânica das fibras. Para o carregamento de tração, o modelo apresentou entrada de líquido na amostra, apresentando discrepância com resultados experimentais de tecidos cartilagosos, que preveem a exsudação de fluido. Tais resultados evidenciam a necessidade de adequação das leis constitutivas do modelo bifásico para tecidos biológicos com anisotropia, tanto da fase sólida como da fluida. Assim, trabalhos futuros incluindo ensaios experimentais serão realizados com o objetivo de capturar esse comportamento, assim como o estudo de outros modelos de leis constitutivas.

Acknowledgements

Os autores gostariam de agradecer as agências de fomento CNPq, Finep e CAPES, que forneceram suporte financeiro para a realização deste trabalho.

References

- [1] Cowin, S. C. & Doty, S. B., 2007. *Tissue Mechanics*. Springer-Verlag, New York.

- [2] Ateshian, G. A., 2017. Mixture Theory for Modeling Biological Tissues: Illustrations from Articular Cartilage. In Holzapfel, G. A. & Ogden, R. W., eds, *Biomechanics: Trends in Modeling and Simulation*, Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials, pp. 1–51. Springer International Publishing, Cham.
- [3] Maroudas, A. & Bullough, P., 1968. Permeability of Articular Cartilage. *Nature*, vol. 219, n. 5160, pp. 1260.
- [4] McEwen, W. K., 1958. Application of Poiseuille's law to aqueous outflow. *A.M.A. Archives of Ophthalmology*, vol. 60, n. 2, pp. 290–294.
- [5] Ehret, A. E., Bircher, K., Stracuzzi, A., Marina, V., Zündel, M., & Mazza, E., 2017. Inverse poroelasticity as a fundamental mechanism in biomechanics and mechanobiology. *Nature Communications*, vol. 8, n. 1, pp. 1002.
- [6] Mow, V. C., Kuei, S. C., Lai, W. M., & Armstrong, C. G., 1980. Biphasic Creep and Stress Relaxation of Articular Cartilage in Compression: Theory and Experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 102, n. 1, pp. 73.
- [7] Truesdell, C. & Toupin, R. A., 1960. *The Classical Field Theories*. Springer.
- [8] Oftadeh, R., Connizzo, B. K., Nia, H. T., Ortiz, C., & Grodzinsky, A. J., 2018. Biological connective tissues exhibit viscoelastic and poroelastic behavior at different frequency regimes: Application to tendon and skin biophysics. *Acta Biomaterialia*, vol. 70, pp. 249–259.
- [9] Bryant, M. R. & McDonnell, P. J., 1998. A Triphasic Analysis of Corneal Swelling and Hydration Control. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 120, n. 3, pp. 370–381.
- [10] LeRoux, M. A. & Setton, L. A., 2002. Experimental and Biphasic FEM Determinations of the Material Properties and Hydraulic Permeability of the Meniscus in Tension. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 124, n. 3, pp. 315.
- [11] Huyghe, J. M., van Campen, D. H., Arts, T., & Heethaar, R. M., 1991. A two-phase finite element model of the diastolic left ventricle. *Journal of Biomechanics*, vol. 24, n. 7, pp. 527–538.
- [12] Khayyeri, H., Gustafsson, A., Heuveljans, A., Matikainen, M. K., Julkunen, P., Eliasson, P., Aspenberg, P., & Isaksson, H., 2015. A fibre-reinforced poroviscoelastic model accurately describes the biomechanical behaviour of the rat Achilles tendon. *PloS One*, vol. 10, n. 6, pp. e0126869.
- [13] Spilker, R. L., Suh, J.-K., Vermilyea, M. E., & Maxian, T. A., 1990. Alternate Hybrid, Mixed, and Penalty Finite Element Formulations for the Biphasic Model of Soft Hydrated Tissues. In Ratcliffe, A., Woo, S. L.-Y., & Mow, V. C., eds, *Biomechanics of Diarthrodial Joints*, pp. 401–435. Springer New York.
- [14] Chan, B., Donzelli, P., & Spilker, R., 2000. Mixed-penalty biphasic finite element formulation incorporating viscous fluids and material interfaces. *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 28, n. 6, pp. 589–597.
- [15] Pérez del Palomar, A. & Doblaré, M., 2006. On the numerical simulation of the mechanical behaviour of articular cartilage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, n. 9, pp. 1244–1271.
- [16] Ateshian, G. A., Maas, S., & Weiss, J. A., 2010. Finite Element Algorithm for Frictionless Contact of Porous Permeable Media Under Finite Deformation and Sliding. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 132, n. 6, pp. 061006.
- [17] Un, K. & Spilker, R. L., 2006. A penetration-based finite element method for hyperelastic 3D biphasic tissues in contact. Part II: Finite element simulations. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 128, n. 6, pp. 934–942.

- [18] Almeida, E. S. & Spilker, R. L., 1997a. Mixed and penalty finite element models for the nonlinear behavior of biphasic soft tissues in finite deformation: Part I - alternate formulations. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, vol. 1, n. 1, pp. 25–46.
- [19] Suh, J. K., Spilker, R. L., & Holmes, M. H., 1991. A penalty finite element analysis for nonlinear mechanics of biphasic hydrated soft tissue under large deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n. 7, pp. 1411–1439.
- [20] Bonet, J. & Wood, R. D., 2008. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.
- [21] Hughes, T. J. R., 2000. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, NY, 1 edition edition.
- [22] Almeida, E. S. & Spilker, R. L., 1997b. Mixed and penalty finite element models for the nonlinear behavior of biphasic soft tissues in finite deformation: Part II - nonlinear examples. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, vol. 1, n. 2, pp. 151–170.
- [23] Holmes, M. H., 1986. Finite Deformations of Soft Tissue: Analysis of a Mixture Model in Uni-Axial Compression. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 108, n. 4.
- [24] Carniel, T. A., Formenton, A. B. K., Klahr, B., Vassoler, J. M., de Mello Roesler, C. R., & Fancello, E. A., 2019. An experimental and numerical study on the transverse deformations in tensile test of tendons. *Journal of Biomechanics*, vol. 87, pp. 120–126.
- [25] Böl, M., Ehret, A. E., Leichsenring, K., & Ernst, M., 2015. Tissue-scale anisotropy and compressibility of tendon in semi-confined compression tests. *Journal of Biomechanics*, vol. 48, n. 6, pp. 1092–1098.
- [26] Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., & Ogden, R. W., 2000. A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, vol. 61, n. 1, pp. 1–48.
- [27] Wu, J. Z. & Herzog, W., 2000. Finite Element Simulation of Location- and Time-Dependent Mechanical Behavior of Chondrocytes in Unconfined Compression Tests. *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 28, n. 3, pp. 318–330.
- [28] Sanjeevi, R., Somanathan, N., & Ramaswamy, D., 1982. A viscoelastic model for collagen fibres. *Journal of Biomechanics*, vol. 15, n. 3, pp. 181–183.