

# Proposta para obtenção do momento de inércia efetivo aplicado à laje mista de aço e concreto

Elis Lemos Andrade<sup>1</sup>, Rodrigo Sernizon Costa<sup>1</sup>, Armando Cesar Campos Lavall<sup>2</sup>, Renata Gomes Lanna da Silva<sup>3</sup>, Harley Francisco Viana<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Construção e Estruturas, Universidade Federal da Bahia  
Salvador, Bahia, Brasil*

*elis\_lemos97@hotmail.com, rodrigo.sernizon@ufba.br*

<sup>2</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil*

*lavall@dees.ufmg.br*

<sup>3</sup>*Departamento de Engenharia Civil do Centro Federal de Educação e Tecnologia de Minas Gerais  
Minas Gerais, Brasil*

*rglanna.silva@gmail.com, harley-viana@hotmail.com*

**Resumo.** A análise do comportamento e da resistência de lajes mistas de aço e concreto abrange vários parâmetros; nesse viés, a curva carga *versus* flecha no meio do vão consiste em uma importante relação para a verificação dos deslocamentos. Em relação ao cálculo da flecha, geralmente, as normas técnicas recomendam que o momento de inércia da seção mista seja dado pela média simples dos momentos de inércia das seções não-fissurada e fissurada. Porém, investigações experimentais mostram que esse procedimento não representa adequadamente o comportamento das lajes mistas de aço e concreto, levando a uma estimativa inadequada do momento efetivo de inércia e resultando em menor flecha, principalmente quando submetidas a cargas maiores. Utilizando os resultados de pesquisas realizadas no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para determinar o momento de inércia efetiva em lajes mistas que representa adequadamente o comportamento durante a fase de carregamento.

**Palavras chaves:** laje mista, aço e concreto, momento de inércia efetivo, flecha.

## 1 Introdução

A análise do comportamento e da resistência de lajes mistas de aço e concreto envolve diversos parâmetros, sob esse viés, a curva carga x flecha no meio do vão consiste em uma relação importante para a verificação das flechas. Através dessa curva é possível identificar a existência de dois estágios no comportamento das lajes mistas, esses estágios são denominados não-fissurado e fissurado. No estágio não-fissurado ocorre a interação completa entre o aço e o concreto e a curva é caracterizada por um comportamento praticamente linear. Posteriormente, com a fissuração do concreto e conseqüente mudança de rigidez, a interação entre o aço e o concreto torna-se parcial, levando a um comportamento não-linear da curva, caracterizando o estágio fissurado.

Quando se verificam as flechas, geralmente, as normas técnicas recomendam que para o cálculo, seja utilizado o momento de inércia efetivo da seção mista dado pela média simples dos momentos de inércia das seções não-fissurada e fissurada. Entretanto, investigações experimentais têm evidenciado que esse procedimento leva a estimativas não conservadoras das flechas, principalmente em lajes mistas submetidas a carregamentos mais elevados. Com base nisso, utilizando-se os resultados de pesquisas realizadas no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta para a determinação do momento de inércia efetivo em lajes mistas que represente adequadamente o comportamento durante a fase de carregamento.

## 2 Descrição dos modelos e ensaios

Para os estudos realizou-se uma análise teórico-experimental do comportamento do sistema de laje mista Steel Deck P-75. Os decks metálicos dos modelos foram fabricados com aço ZAR 280 tanto para a espessura de 0.65 mm quanto para a espessura de 0.95 mm. A Figura 1 ilustra a seção transversal do deck utilizado, apresentando um comprimento de 2800 mm e largura nominal de 880 mm. As mossas, responsáveis pela resistência ao cisalhamento longitudinal, foram estampadas nas almas do perfil, em forma de “V”, tendo profundidades médias de 1.43 mm para ambas as espessuras. Todas as fôrmas de aço tinham uma camada de revestimento de zinco em sua superfície. A Tabela 1 fornece as características da seção transversal do deck P-75.

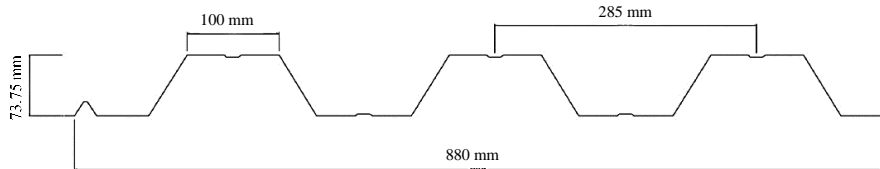


Figura 1. Seção transversal do deck P-75

Tabela 1. Dimensões e propriedades geométricas do Steel Deck

$t$ (mm)	$t_e$ (mm)	$b$ (mm)	$h_F$ (mm)	$A'_{F,ef}$ (mm <sup>2</sup> )	$y_{cg}$ (mm)	$I'_{sf}$ (mm <sup>4</sup> )	$pp_f$ (kN/m <sup>2</sup> )
0.65	0.61	878.67	74.23	774.35	37.12	690084	0.0682
0.95	0.91	878.94	74.53	1132.15	37.27	1084438	0.0997

Sendo que as variáveis são definidas por  $t$  a espessura nominal da fôrma;  $t_e$  a espessura da fôrma sem camada de galvanização;  $b$  a largura da fôrma;  $h_F$  a altura total da fôrma;  $A'_{F,ef}$  a área efetiva da seção da fôrma;  $y_{cg}$  a distância do centro de gravidade à face externa inferior da fôrma;  $I'_{sf}$  o momento de inércia da seção transversal bruta e  $pp_f$  o peso próprio da fôrma.

Tendo em vista as propriedades mecânicas do aço empregado na fabricação das fôrmas dos modelos ensaiados, o valor médio da resistência ao escoamento foi de 333 MPa e à ruptura na tração de 415 MPa, para as duas espessuras. Para o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) o valor adotado foi igual a 200 GPa. A concretagem dos modelos foi solicitada em uma usina de concreto com resistência característica à compressão  $f_{ck} \geq 20$  MPa. Foram realizados ensaios de flexão de quatro pontos (Fig. 2) onde se utilizaram doze modelos, sendo que seis modelos possuíam a espessura de 0.65 mm e seis de 0.95 mm, conforme mostra a Tab. 2.

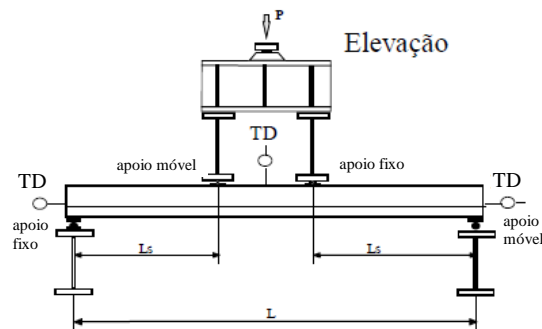


Figura 2. Ensaio de flexão de quatro pontos

O carregamento era aplicado de forma gradual e crescente até o estado limite último do modelo ser atingido, sendo a carga última do ensaio definida pelo valor máximo da carga atingida pelo atuador hidráulico. O sistema de aplicação de carga em questão é semelhante àqueles indicados pelo CSSBI S2 [1], EN 1994-1-1 [2], ANSI/ASCE 3-91 [3], Schuster [4] e Costa *et al* [5].

Em relação a instrumentação, a flecha no meio do vão foi medida por meio de dois transdutores de deslocamento (TD), simetricamente dispostos, localizados, aproximadamente, 20 cm da borda da laje, e tomada como a média dos dois valores lidos. Para medir o deslocamento horizontal relativo entre a fôrma de aço e o concreto foram fixados quatro TD's posicionados nas extremidades de cada modelo. Por fim, extensômetros elétricos de resistência (EER) foram empregados para medir as deformações da fôrma de aço no meio do vão, tanto em sua mesa superior quanto inferior.

Tabela 2. Características nominais dos modelos ensaiados

Modelo	Espessura do deck ( $t$ ) (mm)	Largura do modelo ( $b$ ) (mm)	Vão do Modelo ( $L$ ) (mm)	Altura total do modelo ( $h_t$ ) (mm)	Vão de cisalhamento ( $L_s$ ) (mm)
01A	0.65	880	2700	160	450
01B	0.65	880	2700	160	450
02A	0.65	880	2700	160	650
02B	0.65	880	2700	160	650
03A	0.65	880	2700	160	900
03B	0.65	880	2700	160	900
04A	0.95	880	2700	160	450
04B	0.95	880	2700	160	450
05A	0.95	880	2700	160	650
05B	0.95	880	2700	160	650
06A	0.95	880	2700	160	900
06B	0.95	880	2700	160	900

### 3 Curva carga versus flecha no meio do vão

O comportamento do sistema de lajes mistas durante toda a fase de carregamento pode ser representado através das curvas carga x flecha no meio do vão, onde se pode identificar, através da mudança de inclinação inicial da curva do modelo ensaiado, a existência dos estágios não-fissurado e fissurado, conforme ilustra a Fig. 3, que tem o modelo 01B como representativos dos demais.

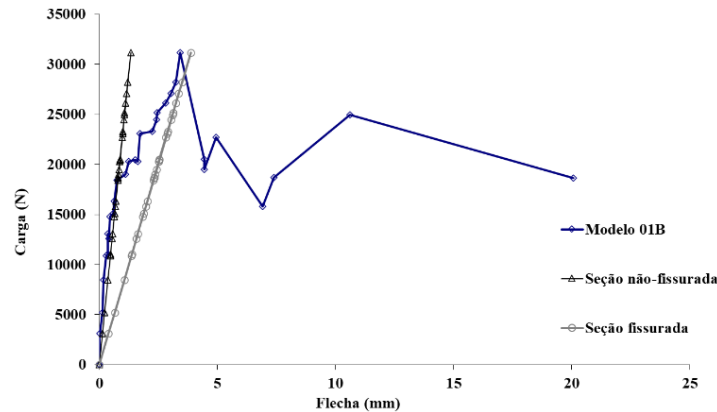


Figura 3. Curva carga x flecha no meio do vão do modelo 01B

Inicialmente, o modelo não apresentou fissuras visíveis e a seção permaneceu com interação completa. Com o início da fissuração do concreto e consequente mudança na rigidez inicial de cada modelo, constata-se o estágio fissurado, caracterizado pelo comportamento não-linear da curva, indicando a interação parcial entre o aço e o concreto. Também por meio da curva carga x flecha no meio do vão é possível classificar o comportamento do sistema como dúctil ou frágil. De acordo com a EN 1994-1-1 [2] o sistema é caracterizado como dúctil quando a carga última de colapso excede a carga de deslizamento de extremidade inicial em mais que 10%. Para os ensaios realizados verificou-se que as lajes tiveram comportamento caracterizado como frágil.

### 4 Considerações sobre flecha

Segundo a EN 1994-1-1 [2] existem duas condições para os vãos das lajes mistas: vãos interno e externo, sendo que as lajes biapoiadas são tratadas como de vão externo. Portanto, o cálculo da flecha pode ser feito por processo elástico, sendo que o momento de inércia efetivo da seção mista,  $I_{lm}$ , pode ser dado pela média dos momentos de inércia da seção não-fissurada,  $I_{cf}$ , e da seção fissurada,  $I_{fl}$ . No caso de uma laje mista biapoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída, a flecha pode ser determinada através da expressão:

$$\delta_{max} = \frac{5wL_F^4}{384E_{cs}I_{lm}} \quad (1)$$

onde,  $w$  é a sobrecarga,  $L_F$  o vão da laje mista e  $E_{cs}$  o módulo de elasticidade secante do concreto.

A ABNT NBR 8800 [6] estabelece que a flecha máxima, considerando-se a etapa após a cura do concreto em situação de serviço, não pode exceder  $L_F/350$  considerando apenas o efeito das ações variáveis.

Para o caso das lajes mistas de vão externo, o deslizamento relativo de extremidade pode ter um efeito

significativo sobre a flecha. Segundo a EN 1994-1-1 [2], nenhuma consideração sobre este deslizamento precisa ser feita se a carga de deslizamento de extremidade inicial excede em 1.2 a carga de serviço. Entretanto se a carga de deslizamento de extremidade inicial for menor do que 1.2 vezes a carga de serviço devem ser utilizadas ancoragens de extremidade e pode-se omitir o cálculo da flecha.

O cálculo dos momentos de inércia da seção não-fissurada e fissurada a seguir é baseado no estudo de Costa [7], que considera o módulo típico da seção transversal da laje mista ilustrada na Fig. 4.

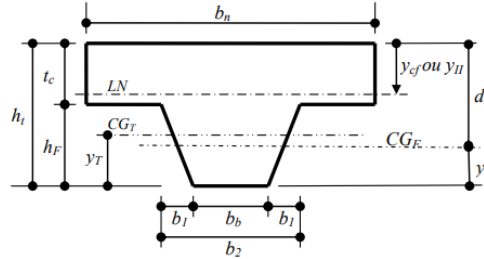


Figura 4. Módulo típico da seção transversal da laje mista

A distância  $y_{cf}$  corresponde a posição da linha neutra (LN) da seção não-fissurada;  $y_T$  é a distância do centro de gravidade da seção trapezoidal à extremidade inferior da seção transversal e  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_b$  as dimensões indicadas na Fig. 4. O momento de inércia da seção não-fissurada,  $I_{cf}$ , é dado pela seguinte expressão:

$$I_{cf} = n \left[ \frac{b_n t_c^3}{12} + b_n t_c \left( y_{cf} - \frac{t_c}{2} \right)^2 + I_T + A_T (h_t - y_{cf} - y_T)^2 + \alpha_e I'_{sf} + \alpha_e A'_{F,ef} (d_F - y_{cf})^2 \right] \quad (2)$$

onde  $n$  corresponde ao número de módulos típicos da fôrma metálica;  $b_n$ ,  $t_c$ ,  $h_t$  e  $d_F$  são indicados na Fig. 4;  $I_T$  é o momento de inércia da seção trapezoidal em relação ao seu centro de gravidade ( $GG_T$ );  $A_T$  é a área da seção trapezoidal da alma;  $\alpha_e$  é relação modular entre os módulos de elasticidade do aço e concreto;  $I'_{sf}$  é o momento de inércia do módulo típico da fôrma metálica e  $A'_{F,ef}$  é a área efetiva do módulo típico da fôrma.

O momento de inércia da seção fissurada da laje mista,  $I_{II}$ , é dado pela seguinte expressão:

$$I_{II} = n \left[ \frac{b_n y_{II}^3}{3} + \alpha_e I'_{sf} + \alpha_e A'_{F,ef} (d_F - y_{II})^2 \right] \quad (3)$$

onde a posição da LN da seção mista fissurada,  $y_{II}$ , é medida a partir da extremidade superior da seção transversal, conforme ilustra a Fig. 4.

## 5 Expressões de cálculo do momento de inércia efetivo em lajes mistas

Com o intuito de determinar o momento de inércia efetivo em lajes mistas,  $I_{lm}$ , após a fissuração do concreto, as normas e literatura técnicas têm admitido expressões para o cálculo, conforme se apresenta a seguir.

Autores como Schuster[4] e Johnson[8] e normas técnicas como ANSI/ASCE 3-91 [3] e CSSBI S3 [9], recomendam que o cálculo das flechas em serviço seja realizado utilizando-se o momento de inércia efetivo da seção mista,  $I_{lm}$ , dado pela média simples,  $I_{med}$ , das inércias das seções não-fissurada,  $I_{cf}$ , e fissurada,  $I_{II}$ .

$$I_{lm} = I_{med} = \frac{I_{cf} + I_{II}}{2} \quad (4)$$

Em seu estudo, Tenhovuori [10] sugere empregar a formulação de Branson para estruturas de concreto armado no cálculo do momento de inércia efetivo da seção da laje mista.

$$I_{lm} = I_{cf} \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 + I_{II} \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \leq I_{cf} \quad (5)$$

onde  $M_a$  é o momento fletor atuante para o cálculo da flecha que depende do ensaio realizado e  $M_r$  é o momento de fissuração.

Segundo Souza Neto [11], com o uso da formulação de Branson os valores da rigidez  $I_{lm}$  permanecem elevados em comparação com valores reais obtidos nos ensaios. Almejando corrigir os valores de  $I_{lm}$ , a fórmula de Branson foi ajustada conforme a expressão a seguir:

$$I_{lm} = I_{cf} \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 + \frac{I_{II}}{20} \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \leq I_{cf} \quad (6)$$

O ANSI/ASCE 3-91 [3] adota o método proposto por Lamport e Porter [12], no qual o momento de inércia efetivo é dado por:

Para  $M_a < M_r$ :

$$I_{lm} = \alpha I_{cf} \quad (7)$$

Para  $M_a \geq M_r$ ;  $h_F = 38$  mm e 50 mm:

$$I_{lm} = \alpha I_{cf} \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^{0.55} + I_D \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^{0.55}\right] \leq \alpha I_{cf} \quad (8)$$

Para  $h_F = 76$  mm:

$$I_{lm} = \alpha I_{cf} \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^{1.3} + I_D \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^{1.3}\right] \leq \alpha I_{cf} \quad (9)$$

onde  $I_D$  é o momento de inércia somente da fôrma metálica, calculado em relação a  $LN$  da seção mista fissurada;  $\alpha$  é o coeficiente de redução da rigidez.

De acordo com a EN 1994-1-1[2], para elementos estruturais de concreto armado submetidos principalmente à flexão, o comportamento pode ser adequadamente previsto utilizando-se a eq. (10).

$$I_{lm} = I_{cf} \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2 + I_{II} \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2\right] \leq I_{cf} \quad (10)$$

## 6 Equação proposta neste trabalho

Desde 1997, o Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG estuda os sistemas de lajes mistas de aço e concreto. Estudos realizados por Souza Neto [10], Brendolan [13] e Araujo [14] serviram de base para esta pesquisa, sendo que a proposta adotada foi formulada por Costa [7]. Nesse âmbito, as evidências experimentais têm constatado que a contribuição da rigidez da seção fissurada no cálculo do momento de inércia efetivo ainda é superestimada nas formulações apresentadas neste trabalho. Conseqüentemente, as expressões fornecem valores não conservadores de flecha. Com base nisso, apresenta-se neste trabalho uma proposta (eq. 11) que visa aproximar os resultados teóricos dos experimentais, através da desconsideração da influência da seção fissurada no cálculo do momento de inércia efetivo quando  $M_a \geq M_r$ .

$$I_{lm} = I_{cf} \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2 \leq I_{cf} \quad (11)$$

O momento de fissuração,  $M_r$ , deve ser obtido conforme a ABNT NBR 6118 [15], sendo que se deve adotar  $f_{ct} = 0,7f_{ct,m}$  e quando  $M_a < M_r \Rightarrow I_{lm} = I_{cf}$ .

## 7 Análises das expressões do momento de inércia efetivo

Com o objetivo de analisar comparativamente as diversas expressões apresentadas e a proposta deste trabalho, as Figs. 5 e 6 mostram a variação do momento de inércia efetivo da seção mista, ( $I_{lm}/I_{cf}$ ), em função do momento fletor atuante, ( $M_a/M_r$ ), para os modelos 01B e 06B que são representativos dos demais modelos ensaiados para as espessuras de 0.65 mm e 0.95 mm, respectivamente.

Observando os gráficos das Figs. 5 e 6 é possível observar que as formulações que envolvem a média simples das inércias das seções não-fissurada e fissurada, Tenhovuori [10], ANSI/ASCE 3-91 [3], EN 1994-1-1:2 [2] e Souza Neto [11] fornecem rigidezes elevadas após a fissuração do concreto. Especificamente, a média simples das inércias é conservadora na fase antes da fissuração do concreto. Por fim, a proposta deste trabalho representa mais adequadamente a rigidez da laje mista durante o processo de carregamento.

As Figuras 7 e 8 apresentam as curvas carga *versus* flecha no meio do vão para os modelos 01B e 06B, utilizando-se o momento de inércia efetivo da seção mista de cada formulação apresentada anteriormente para o cálculo das flechas durante a fase de carregamento.

A análise dos gráficos das Figs. 7 e 8 permite concluir que as formulações que envolvem a média simples das inércias das seções não-fissurada e fissurada, Tenhovuori [10], ANSI/ASCE 3-91 [3], EN 1994-1-1 [2] e Souza Neto [11] apresentam após da fissuração elevada rigidez, fornecendo valores não conservadores de flecha. A proposta estudada apresenta um comportamento mais adequado durante o processo de carregamento.

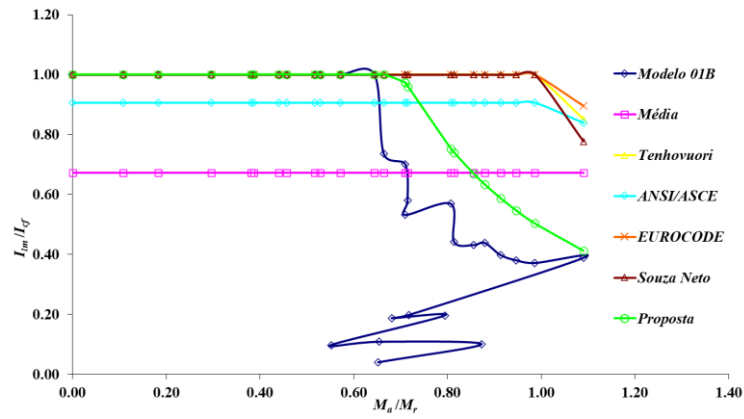


Figura 5. Variação do momento de inércia do modelo 01B ( $t = 0.65$  mm)

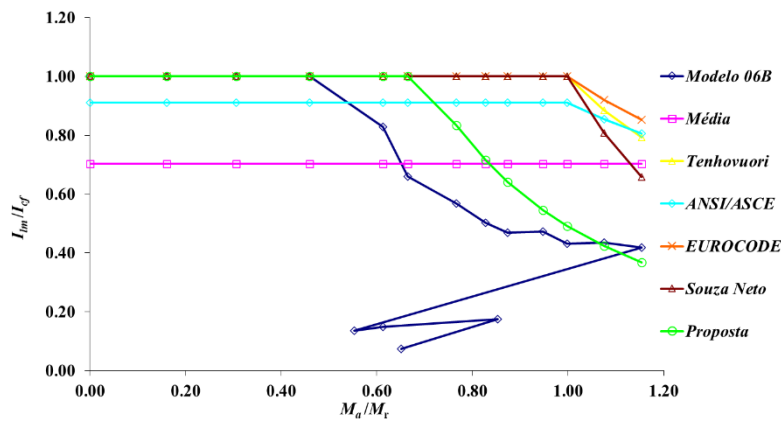


Figura 6. Variação do momento de inércia do modelo 06B ( $t = 0.95$  mm)

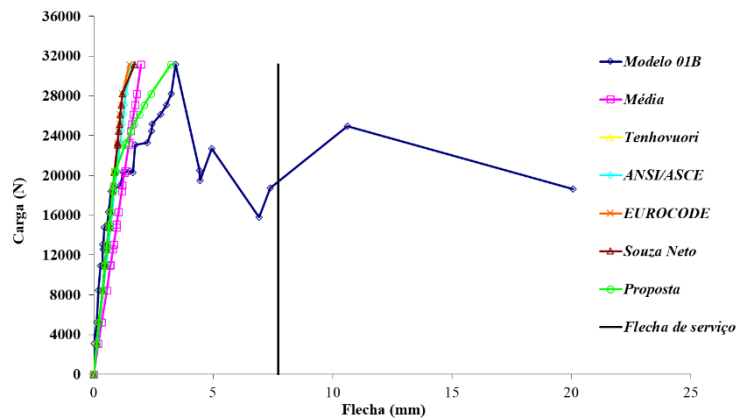


Figura 7. Curva carga x flecha no meio do vão do modelo 01B ( $t = 0.65$  mm)

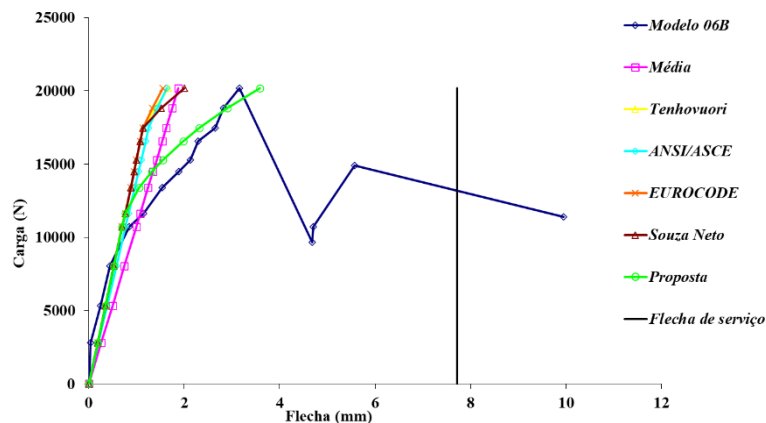


Figura 8. Curva carga x flecha no meio do vão do modelo 06B ( $t = 0.95$  mm)

## 8 Conclusão

As lajes mistas de aço e concreto foram submetidas à ensaios de flexão de quatro pontos, que constaram de doze modelos, sendo que seis modelos possuíam a espessura de 0.65 mm e seis de 0.95 mm, onde a partir da análise da curva carga *versus* flecha no meio do vão pôde-se avaliar o comportamento do sistema estrutural.

Dessa forma, por meio de uma análise teórico-experimental, a proposta deste trabalho foi comparada com as expressões indicadas pelas normas e especificações técnicas para o cálculo do momento de inércia efetivo em lajes mistas. Nesse âmbito, foi possível constatar que a proposta representa mais adequadamente o comportamento da curva carga *versus* flecha no meio do vão em lajes mistas com comportamento frágil.

Conforme já mencionado anteriormente, a proposta deste trabalho desconsidera completamente a contribuição da seção fissurada no cálculo do momento de inércia efetivo, sendo, portanto, pela sua simplicidade e boa correlação com os resultados, recomendada para a verificação prática das flechas de lajes mistas durante o processo de carregamento em situação de projeto.

**Agradecimentos.** Os autores são gratos à FEP- Fundação Escola Politécnica da Bahia, pelo apoio recebido para a realização deste trabalho de pesquisa.

**Authorship statement.** The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

## Referências

- [1] CSSBI S2:2008, *Criteria for the Testing of Composite Slabs*. Ontario, Canada: Canadian Sheet Steel Building Institute, Willodale, revised.
- [2] EN 1994-1-1:2004, *Design of Composite Steel and Concrete Structures*, Part 1.1, General rules and rules for building, CEN - European Committee for Standardization.
- [3] ANSI/ASCE 3-91:1992, *Standard for the Structural Design of Composite Slabs*, American Society of Civil Engineers. New York, December.
- [4] Schuster, R. M., *Strength and Behaviour of the P-2430 - 12HB, Composite Slab System (normal weight concrete)*, Report no. WRI 110-12-02, Canada: Department of Civil Engineering, University of Waterloo, 1984.
- [5] Costa RS, Lavall ACC, Silva RGL, Rodrigues FC. Experimental study of the influence of friction at the supports on longitudinal shear resistance of composite slabs. *Rev IBRACON Estruturas e Mater* 2017;10:1075–86
- [6] ABNT NBR 8800:2008. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.
- [7] R. S. Costa. *Análise de um Sistema de Lajes Mistas considerando a Influência do Atrito dos Apoios e a Avaliação do Momento de Inércia Efetivo*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- [8] Johnson, R. P. *Composite Structures of Steel and Concrete - Beams, Slabs, Columns and Frames for Buildings*, vol. 1, Blackwell Scientific Publications, 2ª edição, Oxford, 1994.
- [9] CSSBI S3:2008. *Criteria for the Design of Composite Slabs*. Canadian Sheet Steel Building Institute. Willodale, Ontario, Canada, November.
- [10] Tenhovuori, A., ASCE. *Parameters and Definitions for Classifying the Behaviour of Composite Slabs, Composite Construction in Steel and Concrete III*, Proceedings of an Engineering Foundation Conference, New York: American Society of Civil Engineers, 1996.
- [11] Souza Neto. A.S. *Análise do Comportamento e da Resistência de um Sistema de Lajes Mistas com ancoragem de extremidade com considerações sobre a fôrma de aço isolada e o atrito nos apoios*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.
- [12] Lamport, W. B. & Porter, M. L. Deflection Predictions for Concrete Slabs Reinforced with Steel Decking. *ACI Structural Journal* (87-S57), pp. 564 – 570, 1990.
- [13] Brendolan, G. *Análise do Comportamento e da Resistência de um Sistema de Lajes com Fôrma de Aço Incorporada*. Dissertação de Mestrado, Programa de PósGraduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.
- [14] Araujo, G. S. *Análise do Comportamento e da Resistência de um Sistema de Lajes Mistas pelo Método da Interação Parcial*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- [15] ABNT NBR 6118:2014. *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.