

Cálculo da velocidade de flutter de uma asa retangular considerando incertezas paramétricas

Marcelo A. D. Filho¹, Antônio M. G. de Lima¹, Gutemberg F. Diniz¹, Denner M. Borges¹

¹*Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila 2121, Campus Santa Mônica, 384000-902, Uberlândia/Minas Gerais, Brasil
marcdelf6@gmail.com, amglima@ufu.br, gutemberg_ferreira@hotmail.com, dennermiranda@msn.com*

Resumo. No contexto da aeroelasticidade, a velocidade de flutter pode ser calculada pelo o método doublet lattice (DLM) em conjunto com o método dos elementos finitos (MEF) e o método pk. Os referidos métodos, apesar de bastante consolidados, são determinísticos, e não consideram assim o efeito de variações nos parâmetros de entrada que possam existir na prática. Assim, o objetivo deste trabalho é o de verificar a influência da incerteza inerente às variáveis de projeto geométricas sobre a velocidade de flutter de uma asa retangular. Com essa finalidade, empregou-se o método de Monte Carlo, considerando o comprimento, largura e espessura da asa como variáveis aleatórias, todas com distribuição gaussiana. Conclui-se que a velocidade de flutter é sensível às variações geométricas, variando 25,5% para 10% de incerteza nas dimensões avaliadas, apresentando uma distribuição aproximadamente gaussiana.

Palavras-chave: Aeroelasticidade, Quantificação de Incertezas, Flutter.

1 Introdução

A análise aeroelástica é um aspecto importante ao se considerar o projeto eficiente e confiável de estruturas aeronáuticas. Entre os fenômenos estudados pela aeroelasticidade está o flutter. Essa instabilidade dinâmica se manifesta em uma velocidade específica, após uma rápida redução do amortecimento, criando uma oscilação autossustentada, a qual pode, com um pequeno aumento na velocidade do escoamento, e, dada uma pequena perturbação acidental, resultar em uma vibração de grande violência (Fung [1]).

Nesse contexto, o método doublet lattice (DLM) combinado ao método dos elementos finitos (MEF) não estocástico e o método pk apresentam-se como ferramentas bastante empregadas nos estágios iniciais de projeto, permitindo o cálculo de cargas aerodinâmicas e da velocidade de flutter. Apesar da sua natureza determinística dos referidos métodos, os resultados pretendidos podem ser sensíveis a várias variáveis de projeto, cuja natureza é, na prática, incerta (Beran et al. [2]). Possíveis fontes causadoras de variabilidade na velocidade de flutter são as variações nas dimensões estruturais da asa, decorrentes dos processos de fabricação, que apresentam natureza aleatória (Kurdi et al. [3]). Diante disto, o objetivo deste trabalho é verificar a influência da incerteza inerente às variáveis de projeto geométricas sobre a velocidade de flutter de uma asa retangular. Nomeadamente, as variáveis de projeto consideradas são o comprimento, largura e espessura da asa.

2 Metodologia

A análise é realizada segundo o método de Monte Carlo. Apesar da necessidade de uma grande quantidade de amostras para a obtenção de resultados precisos, essa metodologia resulta em uma aproximação para a função densidade de probabilidade da resposta de um sistema, o que permite, à posteriori, o cálculo dos momentos estatísticos secundários e a execução de análises de confiabilidade (Sudret [4]).

Considerando uma abordagem paramétrica para a construção do modelo estocástico, a simulação Monte Carlo consiste em gerar amostras dos parâmetros vetoriais ou escalares do sistema analisado, e avaliar, para cada amostra, a resposta de um modelo matemático determinístico (Sampaio and de Lima [5]). Assim, os itens 2.1 e 2.2 tratam, respectivamente, da construção do modelo estocástico e do modelo determinístico empregados neste trabalho. Por sua vez, o item 2.3 trata da descrição da metodologia empregada para se determinar o número de

amostras usado na simulação.

2.1 Modelo estocástico

No estudo realizado, considera-se uma asa retangular engastada, a qual é submetida a um escoamento uniforme. O modelo estocástico do sistema é dado pelas funções densidade de probabilidade de cada parâmetro analisado. A partir dessas funções, as amostras podem ser geradas e utilizadas para executar o método Monte Carlo. Nesse sentido, assume-se que os parâmetros com incerteza, isto é, as variáveis aleatórias (VA's), apresentem distribuição gaussiana. Acrescenta-se ainda que as amostras são obtidas a partir do truncamento da função rand do software MATLAB®, no qual toda a análise numérica foi realizada.

As VA's consideradas são as dimensões de uma asa retangular: corda, envergadura e espessura, variando 10% em torno dos seus respectivos valores nominais, como sumarizado na Tabela 1. Vale salientar que embora o grau de incerteza dimensional pareça elevado, sobretudo tendo em vista estruturas aeronáuticas, o intuito da análise é levar em consideração extrapolações e casos extremos. Além disso, ressalta-se que o valor empregado está em consonância com outros trabalhos que tratam de incerteza em estruturas aeroelásticas, como os trabalhos de Kurdi et al. [3] e Georgiou et al. [6]. Na Tabela 1 também estão sumarizados parâmetros físicos da asa e do escoamento, considerados determinísticos.

Tabela 1. Parâmetros aleatórios e determinísticos usados na simulação

Parâmetro	Valor Médio	Incerteza (%)
Corda	0.300	10
Envergadura	0.500	10
Espessura	0.015	10
Módulo de elasticidade	70 GPa	0
Coefficiente de Poisson	0.34	0
Massa Específica	2700 kg/m ³	0
Número de Mach	0.25	0
Densidade do ar	1.225 kg/m ³	0

2.2 Modelo determinístico

A velocidade de flutter pode ser calculada através de um código numérico determinístico, composto pelos métodos DLM, MEF e pk. Destaca-se que uma descrição completa das metodologias apresentadas seria demasiada extensa para este trabalho, além de se estender além de seus objetivos. Aos leitores que buscam maior aprofundamento, sugere-se consultar as referências mencionadas, principalmente Borges [7], de onde a metodologia descrita neste item se baseou.

Como descrito por Albano and Rodden [8], o método DLM consiste em representar a superfície sustentadora por um conjunto de painéis dispostos em colunas paralelas ao escoamento, formando uma malha aerodinâmica, com cada painel contendo uma linha de dipolos, a $\frac{1}{4}$ da corda do painel, c , e um ponto de cálculo do downwash induzido, a $\frac{3}{4}$ de c (Fig. 1).

O escoamento induzido pela linha de dipolos é usando assim para gerar uma solução elementar para o potencial aerodinâmico linearizado em torno do escoamento paralelo e uniforme ao longo do eixo x , considerando o escoamento invíscido, subsônico e compressível (Borges [7]). Uma descrição completa da formulação é fornecida por Blair [9]. Resumidamente, o DLM, permite obter a distribuição de pressão oscilatória de uma superfície sustentadora a partir da eq. (1):

$$\{\Delta c_p\} = [AIC] \{w_N\}. \quad (1)$$

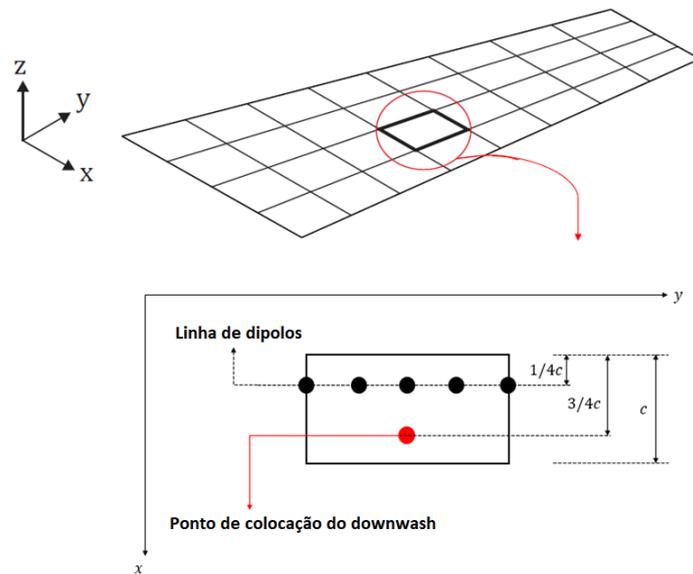


Figura 1. Representação de uma superfície sustentadora pelo DLM

Como evidenciado pela eq. (1), os coeficientes de pressão adimensionais dos painéis, Δc_p , são função dos componentes normais de velocidade induzida (downwash), w_N , e da matriz $[AIC]$. Essa matriz é denominada matriz de coeficientes de influência aerodinâmicos e é obtida a partir da inversa da matriz de fatores downwash, que relaciona a diferença de pressão devido à influência de um painel a outro. Os componentes de w_N , por sua vez, são obtidos satisfazendo as condições de contorno do potencial aerodinâmico linearizado, de acordo com as quais o escoamento é considerado completamente tangente à superfície, sem a existência de componentes normais a essa (Silva [10]). Matematicamente, as condições de contorno são expressas pela eq. (2).

$$\{w_N\} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2)$$

Na eq. (2) t representa o tempo, x a coordenada espacial indicada na Fig. 1, U_∞ a velocidade do escoamento livre e h a deformação do plano médio da asa. Essa última variável é determinada por meio de interpolações dos deslocamentos modais da estrutura, obtidos a partir do MEF.

Por sua vez, a modelagem via MEF consiste em tratar as superfícies sustentadoras como placas finas retangulares, segundo a abordagem de Kirchhoff-Love. O elemento finito de placa é mostrado na Fig. 2, apresentando 4 nós (i, j, k, l) e 3 graus de liberdade (gdl) por nó, sendo dois de rotação (θ_x e θ_y), sobre os eixos x e y , e um de deslocamento (w), na direção de z . Destaca-se que são empregadas aproximações bidimensionais de terceira ordem para o deslocamento transversal w .

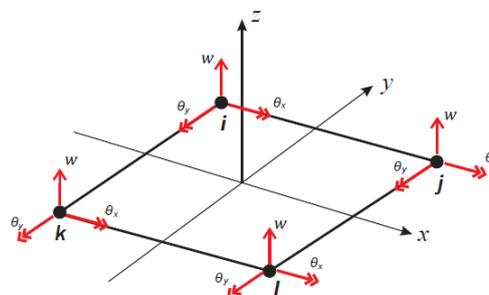


Figura 2. Elemento finito de placa

Segundo o modelo de elementos finitos, a equação de movimento do sistema é dada pela eq. (3), na qual o

amortecimento estrutural foi desprezado. $[M]$ e $[K]$ são as matrizes globais de massa e de rigidez, respectivamente, enquanto os deslocamentos nodais são dados por δ . Do lado direito, F designa o vetor de esforços atuantes sobre a estrutura. No presente trabalho, os esforços são provenientes do carregamento aerodinâmico, sendo calculados através do DLM, pela eq. (1), resultando na eq. (4), na qual q_∞ é a pressão dinâmica e $[S]$ é vetor com as áreas de cada painel.

$$[M_S] \{\ddot{\delta}\} + [K_S] \{\delta\} = \{F\}. \quad (3)$$

$$\{F\} = q_\infty [S] \{w_N\} [AIC] \{h\}^T. \quad (4)$$

A partir das eq. (3) e eq. (4), pode-se então escrever a equação de movimento generalizada do sistema, expressa em coordenadas modais:

$$[M_q] \{\ddot{q}\} + [K_q] \{q\} = \frac{\rho V^2}{2} [Q] \{q\}. \quad (5)$$

Na Equação 5, $[M_q]$ e $[K_q]$ são as matrizes de massa e de rigidez modais, respectivamente, q são as coordenadas modais, V é a velocidade do escoamento e $[Q]$ é a matriz de esforços aerodinâmicos generalizados. Salienta-se que a transformação para as coordenadas modais é dada por $\delta = \phi h_{\text{modal}}$, na qual ϕ é a matriz modal e h_{modal} são os deslocamentos modais obtidos pelo MEF.

A Equação 5 descreve o comportamento aeroelástico do sistema, sendo empregada pelo método pk para a determinação da velocidade de flutter. No método pk, a eq. (5) é escrita na forma de um problema de autovalores não linear, convertendo-se na eq. (6). Ressalta-se aqui a dependência da matriz de esforços aerodinâmicos generalizados $[Q]$ em relação à frequência reduzida $k = \frac{\omega b}{V}$, em que, b representa a semicorda e ω representa a frequência circular. Outro ponto a ser ressaltado é que o parâmetro p é dado por $p = g + ik$, em que g representa o amortecimento. Assim, o problema de autovalor pode ser resolvido numericamente e a velocidade de flutter, identificada quando o amortecimento se torna positivo, obtida a partir da parte real de p .

$$\left(\left(\frac{V^2}{b^2} \right) p^2 [M_q] + [K_q] - \frac{\rho V^2}{2} [Q(k)] \right) \{q\} = 0. \quad (6)$$

2.3 Determinação do Número de Amostras e Refino de Malha

Para a realização da simulação Monte Carlo, faz-se necessário determinar o número de amostras a ser empregado. A fim de assegurar que o resultado obtido seja representativo e, simultaneamente, evitar custos computacionais elevados, realiza-se uma análise de convergência. A análise consiste em usar a velocidade de flutter determinística, u_r , como referência no cálculo do erro quadrático médio (RMS) de um conjunto de n amostras de velocidade de flutter, u_i , através da eq. (7). Verifica-se então a partir de qual número de amostras o erro se estabiliza. Neste ponto, pode-se considerar que houve a convergência, não sendo preciso empregar um número maior de amostras na simulação Monte Carlo.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - u_r)^2}. \quad (7)$$

Antes que a análise de convergência possa ser realizada, faz-se necessário selecionar o grau de refino da malha de elementos finitos, a fim de executar a simulação de maneira adequada e eficiente. Para esse fim, avalia-se a velocidade de flutter sucessivas vezes, com um número crescente de elementos nas direções x (nex) e y (ney), até que a diferença entre dois resultados consecutivos esteja dentro de uma tolerância especificada.

3 Resultados

A Figura 3 apresenta o gráfico da variação da velocidade de flutter com o refino de malha, representado pela razão entre o número de elementos na direção da corda, x , e na direção da envergadura, y . Percebe-se claramente que a convergência ocorre a partir de 20 elementos nas direções x e y , totalizando assim 400 elementos finitos. Desta forma, esse será o grau adotado para o refinamento de malha. Por sua vez, a Fig. 4, mostra o gráfico de convergência para a velocidade de flutter em função do número de amostras n , utilizando o erro RMS como parâmetro. Como pode ser constatado, o erro se estabiliza em torno de 400 amostras, com incrementos adicionais apresentando pouca influência. Todavia, tendo em vista que os resultados já estão disponíveis, realiza-se a análise com 600 amostras, visando obter respostas mais nítidas. Assume-se, portanto, que o número de 600 amostras gera resultados representativos.

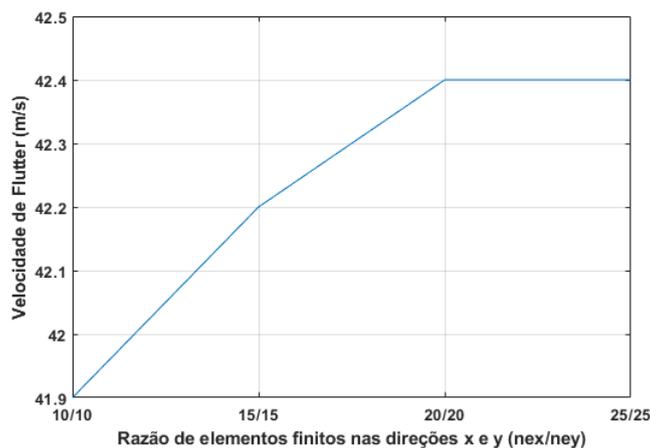


Figura 3. Variação da velocidade flutter determinística com o refinamento

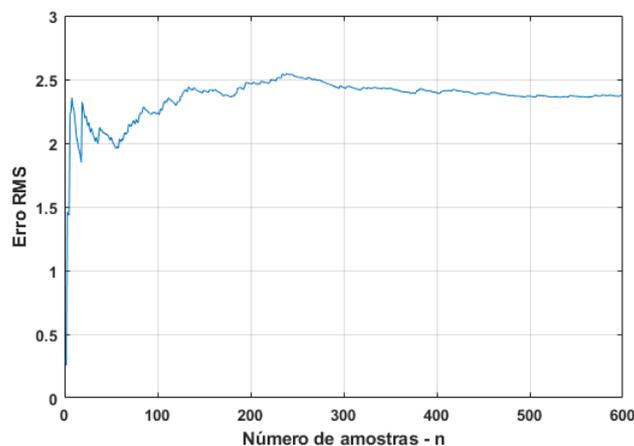


Figura 4. Variação da velocidade flutter média com o número de amostras

Realizando a simulação Monte Carlo com 600 amostras, obtiveram-se os envelopes de amortecimento mostrados na Fig. 5. Percebe-se a ocorrência do fenômeno de flutter para o modo 2, de torção, fato evidenciado pelas curvas nas quais o amortecimento passa de valores negativos para valores positivos. O mesmo não pode ser dito para o modo 1, de flexão, no qual o flutter não ocorre. Ressalta-se que o fenômeno também não é observado nos modos 3 e 4.

Observa-se ainda na Fig. 5 que, em ambos os modos, o efeito da incerteza é inicialmente pequeno, porém começa a aumentar a partir de 30 m/s. Isso demonstra que a sensibilidade do amortecimento em relação aos parâmetros estruturais é pequena em velocidades menores que a velocidade de flutter. Em contraste, as frequências

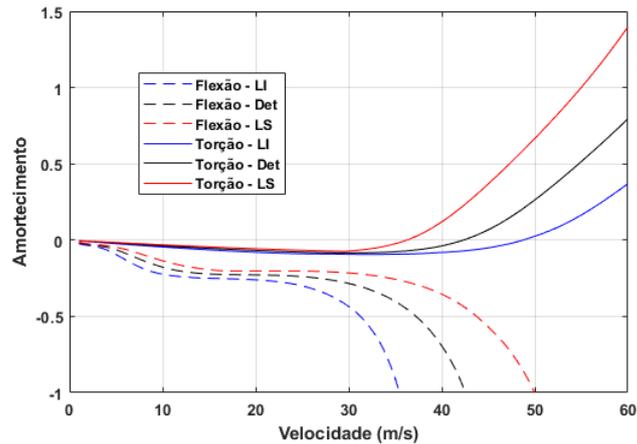


Figura 5. Limites superiores (LS), limites inferiores (LI) e curvas determinísticas (Det) dos modos de amortecimento 1 (Flexão) e 2 (Torção)

naturais não apresentam grande variabilidade no intervalo de velocidade considerado, como mostrado na Fig. 6, para os modos 1 e 2.

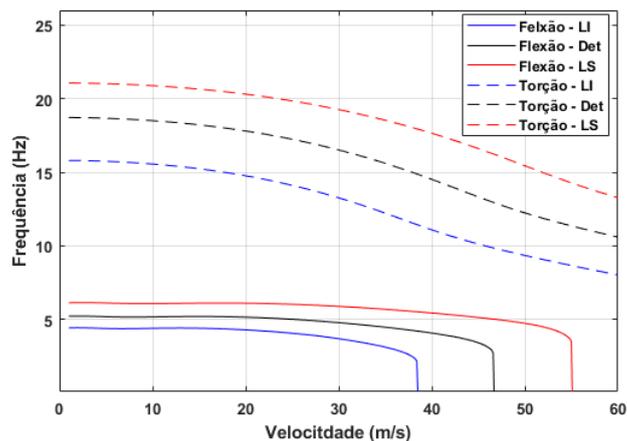


Figura 6. Limites superiores (LS), limites inferiores (LI) e curvas determinísticas (Det) dos modos de amortecimento 1 (Flexão) e 2 (Torção)

No caso do modo de torção, ocorre uma variação considerável na velocidade de flutter em relação ao valor determinístico de 42,4 m/s. Além disso, o histograma da Fig. 7 pode ser considerado uma aproximação para a função densidade de probabilidade da velocidade de flutter. Neste sentido, é mostrado um ajuste para uma distribuição normal, que aproxima bem a distribuição do histograma. Portanto, pode-se afirmar que a variação da velocidade de flutter é aproximadamente normal, a mesma empregada para caracterizar a incerteza dos parâmetros geométricos.

4 Conclusões

Procurou-se verificar a influência da incerteza de parâmetros geométricos sobre a velocidade de flutter de uma asa retangular. Para esse fim, considerou-se uma variação de 10% nas dimensões nominais da corda, envergadura e espessura, assumidas normalmente distribuídas. Em seguida, foi empregada a simulação Monte Carlo para a propagação das incertezas estruturais no modelo aeroelástico do sistema. Obteve-se a convergência para 600 amostras e uma malha com 20 elementos nas direções x e y .

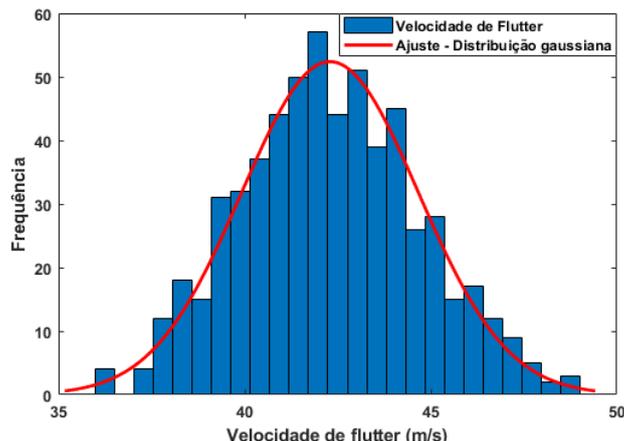


Figura 7. Histograma da velocidade de flutter obtido na simulação

Como resultado da análise realizada, observou-se a ocorrência de flutter no modo de torsão, com a velocidade de flutter variando 25,5%, segundo uma distribuição aproximadamente normal, em uma faixa 15% acima e 15% abaixo do valor determinístico. Conclui-se, desta forma, que a velocidade de flutter é sensível às incertezas dos parâmetros dimensionais considerados. Acrescenta-se que as incertezas inseridas não alteraram o modo responsável pela ocorrência do flutter. Como uma sugestão para trabalhos futuros, propõe-se realizar uma análise de sensibilidade, a fim de avaliar a influência individual de cada um dos parâmetros considerados sobre a velocidade de flutter.

Agradecimentos. Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pelo apoio contínuo às suas atividades de pesquisa por meio da bolsa de pesquisa 306138 / 2019-0 (A.M.G. de Lima). Se agradece também à CAPES e FAPEMIG, em especial aos projetos de pesquisa APQ-01865 e PPM-0058-18 (A.M.G. de Lima).

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são as únicas pessoas responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte deste artigo é de propriedade (e autoria) dos autores ou tem a permissão dos proprietários a serem incluídos aqui.

Referências

- [1] Fung, Y. C., 1993. *An Introduction to The Theory of Aeroelasticity*, volume 1. Dover Publications, Inc.
- [2] Beran, P., Stanford, B., & Schrock, C., 2017. Uncertainty Quantification in Aeroelasticity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 49, n. 1, pp. 361–386.
- [3] Kurdi, M., Lindsley, N., & Beran, P., 2007. Uncertainty quantification of the Goland+ Wing's flutter boundary. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, vol. 1, n. August, pp. 104–123.
- [4] Sudret, B., 2007. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. PhD thesis.
- [5] Sampaio, R. & de Lima, R. Q., 2012. *Modelagem Estocástica e Geração de Amostras e Variáveis e Vetores Aleatórios*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.
- [6] Georgiou, G., Manan, A., & Cooper, J. E., 2012. Modeling composite wing aeroelastic behavior with uncertain damage severity and material properties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 32, pp. 32–43.
- [7] Borges, D. M., 2019. *Desenvolvimento de uma Metodologia de Análise da Estabilidade de Sistemas Aeroviscoelásticos Empregando o Método Doublet Lattice*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.
- [8] Albano, E. & Rodden, W. P., 1969. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, vol. 7, n. 2, pp. 279–285.
- [9] Blair, M., 1994. A compilation of the Mathematics Leading to the Doublet Lattice Method. Technical Report 88.
- [10] Silva, L. A., 2018. *Modelagem Aeroviscoelástica de Painéis Sanduíches Planos Via Método dos Painéis*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.