

# Regulador Linear Quadrático iterativo para Controle de Atitude de um Quadricóptero

Iago S. Vieira<sup>1</sup>, Aniel S. Morais<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Electrical Engineering, Federal University of Uberlândia  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bairro Santa Mônica, 38.400-902, Uberlândia, Brazil  
iagosimoes92@gmail.com, aniel@ufu.br

**Abstract.** The quadrirotor is an aircraft which has a vertical takeoff and landing. Due to the mechanical simplicity many papers have been published recently, proposing numeric methods to increase the reliability on flights. This work presents the development of a dynamic model of a quadcopter that was obtained from the Newton-Euler formalism and also the development of a control system using iLQR (interactive Linear Quadratic Regulator) with a time variant system considering the gyroscopic effect generated by the angular velocity from the frame. The method must be able to stabilize and act on the trajectory compliance of a quadcopter. The model was built in SolidWorks to extract the moments of inertia required for the mathematical model and the prototype was built by hand using aluminum profiles and brushless motors. A simulation was developed on the MATLAB® platform from the model obtained to check the proposed control, and then analyze the experimental flights, where the simplifications on the mathematical model will be verified..

**Keywords:** Interactive Linear Quadratic Regulator (iLQR); Unmanned Aerial Vehicle; Dynamic Model.

## 1 Introdução

Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), comumente conhecidos como drones, sendo controlados remotamente ou de forma autônoma, possui algoritmos sofisticados de voo. Nos últimos anos, verificou-se uma tendência no desenvolvimento de pesquisas que viabilizem a aplicação prática dos quadricópteros, uma vez que a redução de custo, do tamanho de sensores e as baterias os tornam muito interessantes para o mercado civil, sendo possível realizar miniaturização do VANT com um preço mais acessível.

Quadricópteros são veículos subatuados, e por consequência, sistemas inerentemente instáveis Austin [2]. Por consequência da dinâmica inerentemente instável deste tipo de veículo, é necessário desenvolver um controlador para levar o sistema à estabilidade. O objetivo deste trabalho é encontrar um modelo matemático do quadricóptero e desenvolver um método de controle variante no tempo, capaz de estabilizar o voo de um veículo aéreo quadrirotor. A decolagem, a estabilidade da aeronave em voo, a realização de manobras e o pouso são dependentes de um bom projeto de um controlador de voo. Um dos principais desafios do projeto de controladores de voo é a identificação da dinâmica de voo com fidelidade suficiente para ser usada em diferentes estágios de desenvolvimento do controlador.

Os modelos matemáticos utilizados são apenas uma aproximação da dinâmica do veículo e servem para descrever a complexa dinâmica de voos reais Paw and Balas [8]. As características não lineares e multivariáveis aumentam a complexidade em controlar o quadricóptero.

## 2 Metodologia

### 2.1 Modelagem Dinâmica

Existem inúmeras pesquisas envolvendo o desenvolvimento de um modelo dinâmico para um veículo quadricóptero, utilizando algumas técnicas como dinâmica de corpos rígidos segundo equações de Coriolis e o formalismo Euler-Lagrange Alves [1]. Será utilizado o modelo dinâmico de corpos rígidos utilizando as forças e os torques baseado no formalismo de Newton-Euler para representar o comportamento dinâmico do voo de um quadricóptero Bouabdallah [4], expresso em eq. (1).

$$\begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{3 \times 1} \\ \dot{\omega}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{3 \times 1} \times mV_{3 \times 1} \\ \omega_{3 \times 1} \times I_{3 \times 3} \omega_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{3 \times 1} \\ \tau_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde  $m$  é a massa total do sistema,  $I \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  é a matriz de inercia do corpo,  $V = (V_x, V_y, V_z)$  e  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  são respectivamente os vetores das velocidades lineares e angulares do veículo. O vetor de forças produzido pelas hélices é dado por  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$  e o vetor de torques  $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ , onde a força de empuxo é dada por  $F_i = \Omega_i^2 b$ , sendo  $b$  é o coeficiente de empuxo e  $\Omega_i, i=1, \dots, 4$ , representa a velocidade angular da  $i$ -ésima hélice.

O quadricóptero apresenta dois grupos de variáveis, as variáveis de posição,  $\xi = (x, y, z)$  que indicam o vetor deslocamento do centro de gravidade do veículo no espaço relativo ao sistema inercial. E as coordenadas de orientação angular  $\eta = (\psi, \theta, \phi)$  que representam respectivamente os ângulos de Euler (*yaw*, *pitch* e *roll*) da aeronave. O vetor  $q = [\xi \ \eta]^{-1}$  é definido no referencial inercial, sendo as entradas do sistema  $u = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$ , a resultantes das forças das hélices em cada eixo.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Na Fig. 1 pode-se observar as forças e os torques atuantes no quadricóptero e também a existência de dois referenciais e, por conveniência, os define como: referencial inercial  $E = (O^E, x^E, y^E, z^E)$  e referencial fixo ao corpo  $B = (O^B, x^B, y^B, z^B)$ .

Na modelagem do quadricóptero, assume-se que (i) o corpo é rígido e simétrico, (ii) o centro de massa do corpo é igual ao da origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo, (iii) as hélices são rígidas e (iv) as forças de empuxo e arrasto são proporcionais ao quadrado da velocidade das hélices.

A transformação entre a variação da posição angular medida pelos sensores  $(\phi, \theta, \psi)$  e a velocidade angular do corpo  $(p, q, r)$  pode ser considerada idêntica se as perturbações no voo da aeronave forem pequenas, mantendo as variações nos ângulos menores que trinta graus. Então, considera-se  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$  Bouabdallah [4].

O uso de sistemas de coordenadas diferentes se deve a: (i) Forças aerodinâmicas, torques e as equações de movimento de Newton são dadas em relação a um referencial fixo ao corpo; (ii) Sensores inerciais IMU (giroscópios, acelerômetro e magnetômetro) fornecem informações referentes ao sistema fixo ao corpo; (iii) Medidas de posição, podendo ser adquirida por GPS, velocidade de chão e alguns requisitos de missão como trajetória e ponto de parada, são medidas em relação ao referencial inercial.

A transformação entre o referencial do veículo e o referencial fixo ao corpo pode ser obtido utilizando a Matriz dos Cossenos Diretores  $R_E^B$ , obtido pelo método de Thait-Bryan Craig [5], onde são necessários três passos de rotação seguindo a sequência  $R_E^B(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^B(x, \phi)R_{v1}^{v2}(y, \theta)R_E^{v1}(z, \psi)$  resultando em,

$$R_E^B(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

O sistema do quadricóptero pode ser dividido em dois subsistemas, um controle de atitude e outro controle de posição. O objetivo deste trabalho será o controle de atitude, onde os estudos serão concentrados em estabilizar as variáveis angulares  $\eta = (\psi, \theta, \phi)$

Aplicando o método de Newton-Euler para as variáveis angulares ambos no referencial inercial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}/I_{xx} \\ (I_{zz} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\psi}/I_{yy} \\ (I_{xx} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\phi}/I_{zz} \end{bmatrix} - J_r \begin{bmatrix} \dot{\theta}/I_{xx} \\ -\dot{\phi}/I_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} \Omega_r + \begin{bmatrix} \tau_{\phi}/I_{xx} \\ \tau_{\theta}/I_{yy} \\ \tau_{\psi}/I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2.2 Regulador Linear Quadrático

O problema do regulador linear quadrático (RLQ) é dado da seguinte forma Ogata [7]. Considere o modelo linear discreto no espaço de estados

$$x_{i+1} = A_i x_i + B u_i; i = 0, \dots, N \quad (5)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $u_i \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entradas de controle,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes de parâmetros nominais assumidas conhecidas e  $\{u_i\}_{i=0}^N$  uma sequência de entradas de controle sem restrição. Assume-se que o sistema linear, eq. (4) é controlável. O problema do RLQ consiste na minimização do índice de desempenho quadrático, sujeito a uma restrição de igualdade, onde deseja-se determinar uma lei de controle e  $\{u_i\}_{i=0}^N$ , dado por:

$$\min_{u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^N (x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j) \right\} \quad (6)$$

s. a  $x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i; \quad i = 0, \dots, N$

sendo  $P_{N+1} \geq 0, Q_j \geq 0$  e  $R_j > 0$  matrizes hermitianas assumidas conhecidas com  $P_{N+1}$  e  $Q_j$  semidefinidas positivas e  $R_j$  definida positiva.

A solução ótima, denotada com o índice \*, do problema RLQ é dada por:

$$u_i^* = -K_i x_i; \quad i = 0, \dots, N \quad (7)$$

sendo  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} K_i &= (R_i + B_i^T P_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T P_{i+1} A_i \\ P_i &= (A_i - B_i K_i)^T P_{i+1} (A_i - B_i K_i) + K_i^T R_i K_i + Q_i \end{aligned} \quad (8)$$

## 2.3 Regulador Linear Quadrático Recursivo

Para o modelo do sistema iterativo se faz necessário um regulador que calcule um novo ganho a cada iteração. Em Terra, Cerri and Ishihara [9] desenvolveu um regulador linear quadrático recursivo baseado nas funções de penalidade e no método dos mínimos quadrado regularizados (MPR) para realizar a minimização do funcional, eq. (9).

$$\min_{x_{i+1}, u_i} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{j=0}^N (x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j) \right\} \quad (9)$$

s. a  $x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i; \quad i = 0, \dots, N$

Para esta nova formulação as matrizes hermitianas  $P_{N+1} > 0, Q_j > 0$  e  $R_j > 0$  devem ser todas definidas positivas.

Deve-se encontrar a trajetória ótima  $\{x_{i+1}^*\}_{i=0}^{N+1}$  e  $\{u_i^*\}_{i=0}^N$ , onde chegará ao estado ótimo e encontrará a menor ação de controle, nota-se que para este método a minimização é feita também em função de  $x_{i+1}$  e não apenas em torno da entrada  $u_i$ . A solução recursiva ótima, denotada com o índice \*, do problema RLQ recursivo é dada por:  $u_i^* = -K_i x_i; i = 0, \dots, N$ .

Segundo o Princípio da Otimalidade Bellman [3], que diz “Uma política ótima tem a propriedade de que qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, as decisões restantes devem constituir uma política ótima com respeito ao estado resultante da primeira decisão.”

Assim o a estratégia de controle pode ser escrita na forma de minimização restrita do seguinte funcional quadrático, eq. (10), no intervalo de interesse  $[i, N + 1]$ .

$$\begin{aligned} \min_{x_{i+1}, u_i} \{ & x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i + x_{i+1}^T P_{i+1} x_{i+1} \} \\ \text{s. a } & x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i; \quad i = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (10)$$

Então encontra-se  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$$\begin{bmatrix} P_i \\ K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -I & 0 \\ B_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -A_i \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & A_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A convergência do método e a estabilidade é garantida em Terra, Cerri and Ishihara [9].

As matrizes Q e R determinam, respectivamente, a importância relativa do erro e o consumo de energia das entradas, isto é, são ponderações dos erros. As escolhas dessas matrizes podem ser efetuadas utilizando a Regra de Bryson como visto em Franklin, Powell and Emami-Naeimi [6]. Na prática, para a obtenção de valores aceitáveis  $x$  e  $u$  é inicialmente a escolha apropriada das matrizes diagonais Q e R .

## 2.4 Projeto do Protótipo

Com o intuito de mensurar a relação do PWM com a força produzida nas hélices foi realizado uma linearização dos dados obtidos experimentalmente. No teste utilizou um pêndulo com braços de tamanhos iguais, onde no lado direito utilizou uma balança de precisão e no lado esquerdo posicionou o motor com a hélice. A cada entrada PWM do motor, arquivou-se os dados apresentados na balança assim obtendo o gráfico da Fig. 1.

Para controlar este sistema foi utilizado um Arduino® Due, que além de realizar os cálculos do regulador também realiza a leitura de um sensor inercial MPU6050 para gerar os ângulos de Euler e atua nos motores. Este microcontrolador mostrou-se eficaz visto o tempo para realizar um ciclo é de 5 ms a metade do tempo de amostragem do regulador que é de 10 ms.

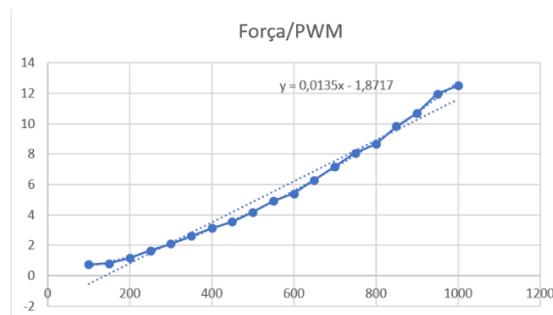


Fig. 1 – Relação Força/PWM

O método RLQ iterativo possui uma dificuldade que é a necessidade de encontrar o ganho K a cada iteração e para isto precisa trabalhar com operações matriciais, onde foi utilizado uma biblioteca em C MathUtil® para auxiliar nas operações.

Como este trabalho se concentrou no controle de atitude, foi necessário utilizar um controle remoto de 4 canais, um canal para controlar a altura e outros três dedicados a alterar o setpoint dentro do regulador, um para cada eixo. Por exemplo, se deseja realizar um movimento translacional na direção do eixo x então deve-se alterar o ângulo  $\theta$ , o sentido do movimento dependerá do sinal do ângulo.

O protótipo utilizado no projeto foi construído artesanalmente utilizando perfis de alumínio, assim como o corpo do quadricóptero também criou-se um modelo no SOLIDWORKS® para auxiliar nos cálculos dos momentos de inércia, apresentados na Fig. 2.



Fig. 2 – Quadricóptero utilizado no projeto.

Os dados obtidos a partir do desenho estão descritos na Tab. 1.

Tabela 1. Parâmetros do Quadricóptero

Variável	Valor
Massa	1,441 Kg
Volume	0,078487513 m <sup>3</sup>
Ixx	1747752,185 Kg · m <sup>2</sup>
Iyy	1818720,002 Kg · m <sup>2</sup>
Izz	3447889,251 Kg · m <sup>2</sup>

Para o projeto do controlador utilizando a teoria do RLQ recursivo será utilizado o modelo em espaço de estados linear e variante no tempo, o modelo se torna variante no tempo pois dentro da matriz de estados  $A_i$ , possui efeitos giroscópicos onde variam com o tempo fazendo necessário calcular o ganho a cada iteração. O sistema pode ser escrito da seguinte forma:  $x_{i+1} = A_i x_i + B u_i; y_i = C x_i$ .

Considerando que o modelo representado tem acesso a todas as saídas do sistema, pode-se dizer que a matriz C é uma matriz identidade e, portanto,  $x = y$ , sendo controladas apenas as variáveis angulares  $x_i = [\phi_i \dot{\phi}_i \theta_i \dot{\theta}_i \psi_i \dot{\psi}_i]^T$ .

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx}) \dot{\psi}_i & 0 & (I_{yy} - I_{zz}/2I_{xx}) \dot{\theta}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy}) \dot{\psi}_i & 0 & 0 & 0 & (I_{zz} - I_{xx}/2I_{yy}) \dot{\phi}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz}) \dot{\theta}_i & 0 & (I_{xx} - I_{yy}/2I_{zz}) \dot{\phi}_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}$$

### 3 Resultado e Discussões

Com as informações, como a massa e momento de inercia, sobre o quadricóptero é possível desenvolver um simulador no MATLAB®, para aferir a estabilidade do controlador, aplicando uma entrada em degrau, com o estado inicial  $x_i(0)$  com  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Na Fig. 3 é possível observar a sequência de entradas discretas calculadas

para estabilizar o sistema, para uma variação de um grau, degrau unitário, nos ângulos de Euler, saída do sistema representado na Fig. 4 em tempo contínuo. Nas Fig. 3 e 4 é possível observar que o tempo de resposta do sistema foi de apenas 0,4 s, onde foram necessários 40 iterações de 10 ms. Aferida a estabilidade do controlador e o tempo de resposta é possível realizar o experimento com o protótipo.

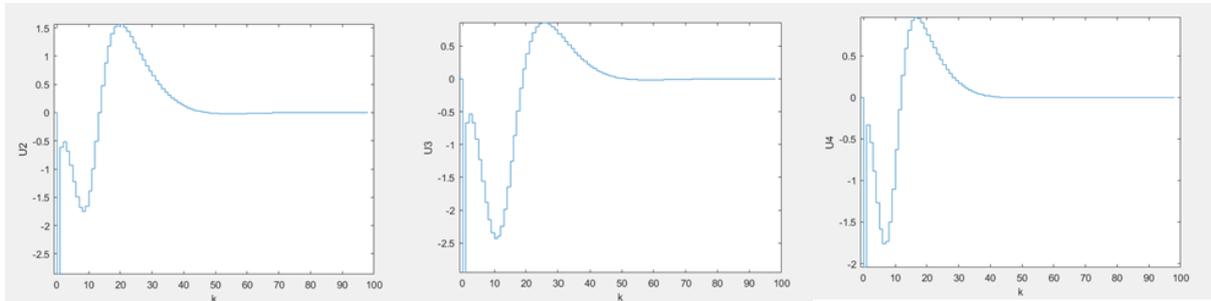


Fig. 3 – Resultados obtidos com o método RLQ variante no tempo.

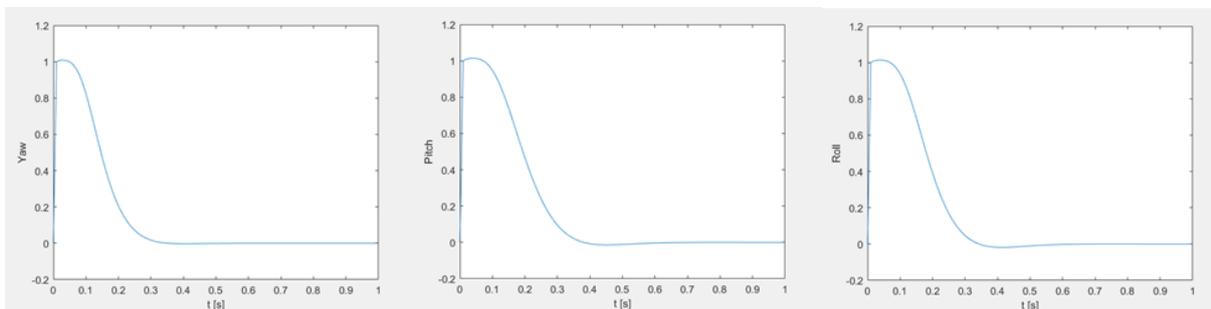


Fig. 4– Resultados obtidos com o método RLQ variante no tempo.

No voo experimental representado na Fig. 6, foram feitas leituras referentes ao ângulo associado do eixo x em graus para o método Regulador Linear Quadrático iterativo, aplicado em voos de teste no protótipo em ambiente controlado sem haver influências de perturbações externas como, por exemplo, o vento. No teste foi utilizado um controle remoto para controlar o setpoint, como o objetivo deste trabalho é o controle de atitude o controle remoto atua no sistema de posição do quadricóptero no espaço, no momento do teste o rádio não altera valores para o eixo x. Na Fig. 5 apresenta a saída do sistema referente ao eixo x onde foram feitas 1000 leituras com um tempo de amostragem de 10 ms, totalizando 10 s, do controlador embarcado no quadricóptero, sendo possível observar que a variação no ângulo de Euler não ultrapassou de um grau, mostrando um voo estável pairando no ar. Como o método proposto foi um regulador, em que o sinal de referência é igual a zero, os resultados práticos se mostraram eficazes para a utilização proposta.

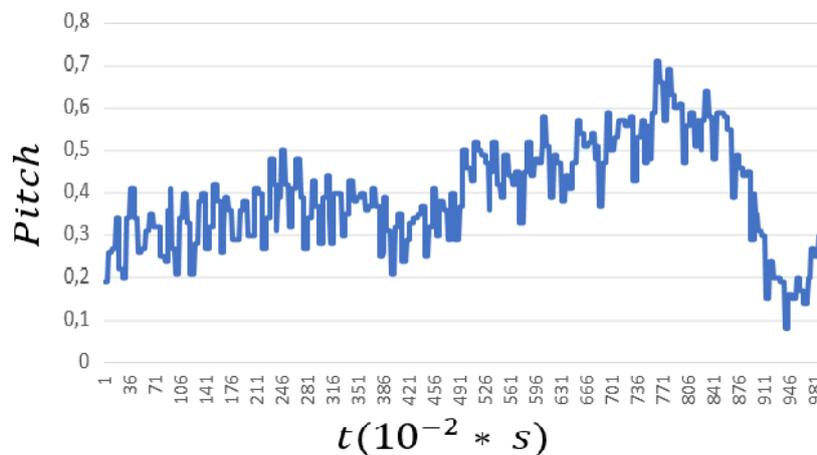


Fig. 5 - Dados obtidos com o RLQ recursivo.



Fig. 6 – Voo experimental com o RLQ recursivo.

## 4 Conclusão

Esse trabalho apresentou a modelagem matemática do quadricóptero segundo equações físicas e aerodinâmicas, com parâmetros fiéis ao modelo real, sendo feito um modelo no SOLIDWORKS® para calcular os momentos de inércia. Para os motores, foram geradas curvas onde se aplicou entrada PWM obtendo a força em Newtons. Desenvolvido o método do regulador recursivo, foram realizadas simulações computacionais no MATLAB®, que após verificar a estabilidade do controlador, foram feitos testes práticos, onde observou um voo com resultados satisfatórios, visto que para aplicações onde a variação do ângulo é pequena, menor que  $30^\circ$ , os resultados obtidos mostraram-se capazes de estabilizar o quadricóptero, mesmo após algumas simplificações feitas no modelo dinâmico do sistema. Com o sistema variante no tempo, o método RLQ recursivo mostrou uma complexidade na elaboração do algoritmo de controle, tendo em vista que a cada iteração gera-se uma nova matriz de ganho  $K$ , onde é necessário cálculos com matrizes no microcontrolador. Todavia, o microcontrolador mostrou-se capaz de realizar estes cálculos, onde o tempo de cada iteração sendo menor que a metade do tempo de amostragem do sensor inercial. Propõe-se, como trabalhos futuros, aplicar técnicas de controle robusto, como por exemplo o RLQ robusto recursivo, com o intuito de garantir a estabilidade e segurança da aeronave em situações adversas, onde há incertezas paramétricas.

## Referências

- [1] Alves, A. S. C. (2012) Estudo e aplicação de técnicas de controle embarcadas para estabilização de voo de quadricópteros. TESE (Doutorado em Sistemas de Energia) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.
- [2] Austin, R. (2011) Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment. [S.l.]: Wiley.
- [3] Bellman, R. E.; R. Kalaba (1965) Dynamic Programming and Modern Control Theory. Academic Press. New York.
- [4] Bouabdallah, S. (2007) Design and control of quadrotors with application to autonomous ying. PhD Thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [5] Craig, J. J. (2008) Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3. ed., Pearson.
- [6] Franklin, G. F. , Powell, J.D. and Emami-Naeini ,A. (2013) Sistemas de Controle para Engenharia, 6. ed., Bookman.
- [7] Ogata, K. (1995) Discrete-time control systems, 2nd ed., Prentice-Hall.
- [8] Paw, Y. C. and Balas, G. J. (2011) Development and application of an integrated framework for small UAV flight control development. Mechatronics.
- [9] Terra, M. H. , Cerri, J. P. and Ishihara, J. Y. (2014) “Optimal robust linear quadratic regulator for systems subject to uncertainties,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 9, pp. 2586–2591.