

Robust Optimization with Reliability Constraints considering Approximate Models

Jacqueline C. M. do Nascimento¹, Silvana M. B. Afonso¹, Renato S. Motta¹

¹Dept. de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco
Av. Acadêmico Hélio Ramos, S/N, CEP 50740-530, Recife/PE, Brasil
jacqueline-cristine1@hotmail.com, silvana.bastos@ufpe.br, renato.motta@ufpe.br

Abstract. Reliability-Based Robust Design Optimization (RBRDO), where random variables are statistically treated, have been gaining space in practical engineering since it allows to compute the structural probability of failure associated with a design criteria. The mathematical formulation for robust optimization can falls into a multiobjective optimization (MO) problem involving as objectives the mean and the standard deviation of a given function. The most appropriate approach to solve these problems is through a class of strategies based on the Pareto concept. The uncertainties in the optimization process to obtain robust and reliable projects will be considered both in the objective function and in the constraints. Robustness measures required by objective functions are computed by Monte Carlo simulation (MC). For reliability constraints two approaches will be used: RIA (Reliability index approach) and PMA (Performance Measure Approach). The process of reliability analysis and optimization requires multiple function evaluations. When applied to real engineering problems it involves numerical simulations, resulting in a high computational cost procedure. Alternatives to overcome that here is through two distinct strategies for metamodels: the use of data fitting approximation and a reduced order model. For the application of the above process, a reinforced concrete frame with three floors will be used.

Keywords: robust optimization, reliability, approximate models

1 Introdução

A otimização em projetos da engenharia estrutural traz uma maior viabilidade e economia, porém a abordagem determinística, que ainda é muito utilizada, pode ser questionável para projetos otimizados, pois pequenas perturbações podem levar a violação das restrições de projetos. Por isso, a otimização baseada em confiabilidade (RBDO) e nesse caso a otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO ou R²BDO), onde as incertezas de projeto são tratadas estatisticamente, permitindo mensurar o grau de confiabilidade estrutural, estão ganhando espaço em diversos campos da engenharia e são objetos de estudo de diversos trabalhos como Alves [1], Almeida [2], Motta [3], dentre outros.

As restrições de confiabilidade presente na formulação da RBRDO estão associadas à probabilidade de falha ou ao índice de confiabilidade, proporcionando um projeto com bom desempenho e confiável. Já a robustez, que proporciona uma baixa sensibilidade às incertezas do problema, faz com que o problema recaia em um problema com mais de uma meta a ser otimizada (otimização multiobjetivo, MO), envolvendo média e desvio padrão de uma determinada função escolhida. Métodos para resoluções de problemas de otimização multiobjetivo foram estudados em referências como Bates [4] e Motta et al. [5] e baseiam-se no conceito de Pareto.

Tanto o processo de análise de confiabilidade como o de otimização requerem múltiplas avaliações de funções, por isso são necessárias estratégias eficientes para conduzir tais análises. Essas estratégias são construídas utilizando bibliotecas pré-existentes e códigos desenvolvidos, ambos na linguagem Python.

Ainda assim, esses processos, quando aplicados a problemas da engenharia envolvendo simulações numéricas, podem resultar num custo computacional proibitivo de aplicar tais ferramentas. Como alternativa para redução do custo computacional, podem ser utilizados modelos aproximados como em Motta [6], Afonso et al. [7] e Pinto [8], dentre os quais serão consideradas aqui duas estratégias separadamente com o objetivo de compara-

las. A primeira sendo o Método de Base Reduzida (MBR) que reduz a ordem do modelo computacional e será responsável pela análise estrutural que está presente tanto na função objetivo como nas funções de restrição. A segunda estratégia consiste na aproximação por ajuste de dados e também será utilizada tanto na função objetivo como nas funções de restrição.

2 Análise Estrutural

O objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura. A norma NBR 6118/2014 apresenta vários tipos de abordagens para análise estrutural de acordo com a resposta dos materiais. Mas, devido ao caso estudado ser um pórtico 2D de pequeno porte com três pavimentos e com apenas carregamentos uniformemente distribuídos que produzem relativamente pequenos deslocamentos, a norma permite considerar apenas a análise linear.

Aqui a análise linear foi feita pelo método de elementos finitos (MEF), onde considerou-se, para o elemento básico (elemento de barra linear), as premissas dos elementos de viga apresentadas pela teoria de Euler-Bernoulli que considera que as seções transversais permanecem planas após a deformação e, portanto, não considera qualquer deformação devido ao esforço cisalhante. Nesta análise busca-se encontrar o comportamento dos elementos das estruturas, o qual se caracteriza pelos deslocamentos nodais do sistema devido à ação de cargas pontuais aplicadas nestes nós equivalente as cargas originais.

Para tal análise, optou-se por usar um código apresentado por Alves [1] desenvolvido em Python, pois mostrou ter um bom tempo de processamento, bastante versátil e podendo ser facilmente adaptado para resolver vários tipos de estruturas. Contudo, devido aos demais processos envolvidos no problema (análise de confiabilidade e otimização) requererem um número grande de análises estruturais, isto pode se tornar muito caro computacionalmente. Para aumentar a rapidez da resposta estrutural, técnicas de aproximação baseadas no método de base reduzida (MBR) são inseridas na metodologia. Outra estratégia foi o uso de uma superfície de resposta para substituir completamente a análise estrutural.

2.1 Método de Base Reduzida

O MBR é um método que consiste numa projeção do tipo Galerkin de ordem reduzida que contém soluções (base) do modelo de alta fidelidade para o problema de interesse em pontos selecionados do espaço de projeto (MOTTA, [3]).

Assim como para o uso de uma superfície de resposta, os procedimentos para a análise via MBR, são divididos em duas etapas, na primeira são avaliados pontos distribuídos aleatoriamente no espaço de projeto, para a criação da base reduzida (\mathbf{Z}) e é chamada de fase *off-line*. Já na segunda etapa, chamada *on-line*, são realizadas as avaliações das funções requeridas nos procedimentos de otimização e análise de confiabilidade utilizando a base reduzida (\mathbf{Z}). A ideia do algoritmo para implementação da metodologia é que a parte *off-line* seja executada apenas uma vez, gerando a base, e no estágio *on-line* utiliza-se esses dados para executar uma resposta mais rápida para novos parâmetros que são as variáveis do problema.

Detalhes do algoritmo pode ser encontrado em Motta [3], que foi adaptado para o problema de análise linear deste trabalho e implementado na linguagem de programação utilizada, Python.

3 Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade

A análise de confiabilidade de uma estrutura baseia-se na ideia de que sempre há uma probabilidade de que algum critério não seja atendido, chamada probabilidade de falha. Esta falha pode ser caracterizada por ruptura dos materiais componentes ou por não atender às prescrições normativas referentes a deformações máximas, aberturas de fissuras, etc. A análise de confiabilidade leva em conta as incertezas inerentes aos materiais e suas resistências, aos carregamentos, e à geometria da estrutura. Essa probabilidade é pode ser quantificada de forma aproximada pelo índice de confiabilidade (β).

As incertezas no processo de otimização serão consideradas aqui tanto na função objetivo como nas restrições para obtenção de projetos robustos e confiáveis. Nas funções objetivos, as incertezas serão consideradas através das medidas de robustez com simulação de Monte Carlo (MC) e nas restrições foram utilizadas duas abordagens:

uma chamada RIA (Reliability index approach) e outra denominada PMA (Performance Measure Approach).

Para a análise de confiabilidade é necessário definir quais são as variáveis estocásticas, também chamadas de aleatórias ou randômicas e seu tipo de distribuição. No Brasil ainda não há estudos específicos que analisem as distribuições de probabilidades mais adequadas para as diferentes variáveis aleatórias do problema estrutural. Entretanto, há diversos trabalhos publicados no exterior sobre esse tema. Por isso, este trabalho seguirá as premissas apresentadas por Joint Committee on Structural Safety (JCSS) [9].

No método de Monte Carlo, após um estudo paramétrico, o tamanho da amostra é escolhido de acordo com o menor esforço computacional para resultados adequados dentro de uma determinada tolerância. Então, se utiliza essa amostra para calcular as medidas de robustez que são as médias e os desvios padrões nas funções de interesse (funções objetivo) que nesse trabalho serão o custo e o deslocamento máximo da estrutura.

Na abordagem RIA (mais tradicional) (MOTTA, [3]) é necessário calcular o índice de confiabilidade, que nesse trabalho foi obtido pelo método de primeira ordem (FORM – First Order Reliability Method) que usa uma técnica iterativa. Já a abordagem PMA avalia as restrições de confiabilidade estrutural durante o processo de otimização, sem a necessidade do cálculo direto do índice de confiabilidade, por isso é mais eficiente. Uma comparação ilustrativa das abordagens RIA e PMA podem ser vistas na Figura 1.

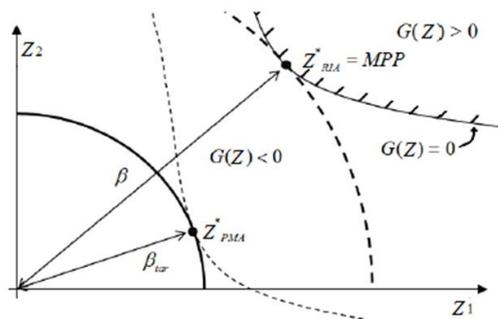


Figura 1. Avaliação de restrição de confiabilidade via RIA e PMA

Todas as definições, formulações e detalhamento dos procedimentos envolvidos em todas as abordagens dessa análise podem ser encontrados em Nascimento [10] ou Motta et al. [5]. A implementação computacional foi desenvolvida na linguagem Python, onde utilizou-se o módulo Numpy nos cálculos do MC, a biblioteca PyRe (Python Reliability) para utilização do FORM e esta última foi alterada para emprego da abordagem PMA.

4 Otimização com Modelos Substitutos

Nos problemas de otimização pode haver dificuldades associadas às avaliações das funções objetivo, restrições e seus gradientes, causando um elevado custo computacional ou uma resposta que apresente ruído. Uma forma apontada na literatura (AFONSO et al. [7]) de contornar estes problemas é a utilização de estratégias de otimização baseadas em modelos substitutos.

Várias técnicas podem ser utilizadas para construção do modelo substituto, onde o maior desafio é fazer com que ele seja o mais preciso possível, utilizando o menor número de avaliações do modelo de alta fidelidade. Essas técnicas estão agrupadas em duas categorias, a funcional que engloba várias abordagens, e a física (fidelidade hierárquica) que engloba modelos baseados na física do problema estudado.

O MBR, explicado anteriormente, pode ser considerado um modelo substituto da categoria física. Neste trabalho será utilizada, também, uma estratégia da categoria funcional com modelo de ajustes de dados por funções de base radial (FORRESTER et al. [11]) (RBF – Radial Basis Function). Na literatura (AFONSO et al. [7], PINTO [8]) o método RBF tem apresentado bons resultados em vários problemas da engenharia.

4.1 Funções Base Radial

O método das funções base radial (RBF – Radial Basis Function) é um procedimento para aproximar funções

multivariáveis em termos de funções mais básicas, de propriedades conhecidas e de mais fácil análise (FORRESTER et al [11]). A RBF é uma ferramenta eficiente para resolver problemas de interpolação de dados de múltiplas variáveis, onde o problema de interpolação é feito pela aproximação de uma função real por uma função substituta, através de m diferentes dados avaliados em n pontos distintos.

Toda a técnica de interpolação de dados com RBF pode ser encontrada em Pinto [8], neste trabalho foi adotada a biblioteca `Scipy.interpolate.Rbf` em Python, para implementação computacional. O modelo substituído via RBF foi aplicado nas restrições de confiabilidade, substituindo as funções de falha; e substituindo a função objetivo que possui maior custo computacional.

5 Otimização Multiobjetivo

Muitos problemas de engenharia possuem mais de uma meta ou objetivo a serem otimizados, além de vários critérios a serem satisfeitos, esses problemas são chamados de Otimização Multiobjetivo. A formulação matemática do problema de otimização consiste em encontrar um conjunto de n variáveis de projeto contido num vetor \mathbf{x} , tal que minimize o vetor de funções objetivos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, sujeito a restrições de desigualdade e igualdade e aos limites inferiores e superiores das variáveis de projeto.

Usualmente, não é possível encontrar um projeto que seja ideal para todos os objetivos, em vez disso, existem várias soluções para o problema, cada uma representando uma relação entre os objetivos. Para encontrar essas soluções pode ser empregado o conceito de Pareto encontrado em Bates [4]. Para encontrar os pontos de Pareto existem vários métodos, esse trabalho se restringirá ao Método da Interseção Contorno-Normal (NBI), que vem produzindo bons resultados na literatura (DAS e DENNIS [12]).

Em resumo, esse tipo de método consiste na transformação do problema com vários objetivos em outros com apenas um objetivo e, para a solução de cada otimização escalar, foi utilizado o método de Programação Quadrática Sequencial (SQP) que tem se provado altamente eficaz em problemas de otimização (ANTONIOU e LU [13]). O SQP aproxima o problema a uma sequência de subproblemas quadráticos convexos até que os valores das variáveis de projeto venham a convergir, onde todo procedimento pode ser encontrado em Motta et al. [5] e neste trabalho foi utilizado a função `minimize` presente na biblioteca `Scipy.optimize` na linguagem Python.

O método NBI foi introduzido por Das e Dennis [12] com o objetivo de encontrar pontos eficientes do contorno no espaço das funções objetivo (espaço viável), que possibilitem a construção de uma curva suave. Tal método teve sua formulação implementada na linguagem Python e pode ser encontrada em Nascimento [10].

6 Estudo de caso

O caso estudado trata-se de um pórtico plano, que foi adaptado da referência Coêlho [14], e possui três pavimentos com carregamentos uniformemente distribuídos aplicados ao longo de suas vigas, como mostra a Figura 2.

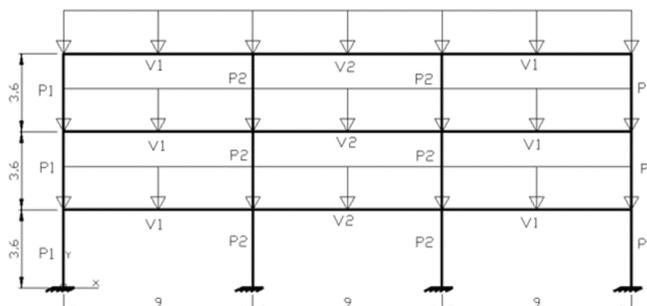


Figura 2. Pórtico plano com três pavimentos

Os detalhes dessa estrutura podem ser encontrados em Nascimento [10], mas, em resumo, foram adotados dois grupos de vigas e pilares que estão especificados na Figura 2, e para obter os esforços, as vigas foram

discretizadas em dois elementos de mesmo tamanho em cada vão, portanto a estrutura possui um total de 30 barras (12 pilares + 18 vigas). Considerou-se um carregamento permanente $g = 16.8 \text{ kN/m}$, uma sobrecarga de $q = 7.2 \text{ kN/m}$, módulo de elasticidade do concreto igual a 28.4 GPa, módulo de elasticidade do aço igual a 210GPa e coeficiente de Poisson igual a 0.2 como previsto pela NBR 6118.

Todas as variáveis envolvidas no problema (variáveis de projetos e aleatórias) assim como as suas respectivas distribuições e parâmetros relacionados estão apresentados na Tabela 1, onde V é o coeficiente de variação. Os dados estatísticos foram retirados da JCSS [9], onde também é encontrado o valor recomendado para o índice de confiabilidade $\beta = 4.2$, que foi admitido para a verificação do estado limite último.

Tabela 1. Variáveis do problema.

Variáveis	Unidade	PDF	Média	V	Limite superior	Limite inferior
Base das vigas	cm	Normal	Variável	0.025	20	50
Altura das vigas	cm	Normal	Variável	0.025	35	90
Base dos pilares	cm	Normal	Variável	0.025	30	60
Altura dos pilares	cm	Normal	Variável	0.025	30	90
As positivo vigas	cm ²	Determinístico	Variável	-	5.67	22.81
As negativo vigas	cm ²	Determinístico	Variável	-	5.67	22.81
As pilares	cm ²	Determinístico	Variável	-	11.34	88.36
Resistência do concreto	MPa	Lognormal	39.38	0.10	-	-
Resistência do aço	MPa	Lognormal	491.2	0.05	-	-
Módulo de elast. do aço	GPa	Normal	210	0.05	-	-
Carga permanente	kN/m	Normal	16.5	0.04	-	-
Sobrecarga	kN/m	Normal	-6.84	0.10	-	-

As variáveis da Tabela 1 que possuem média “Variável” são as variáveis de projeto, incluem as dimensões das vigas e pilares de cada grupo e as áreas de aço dos elementos, totalizando 14 variáveis de projeto. Essas variáveis foram tratadas como contínuas e os seus limites indicados na Tabela 1.

O primeiro objetivo (f_{obj1}) é minimizar a média do custo total da estrutura em USD (dólares americanos), e o segundo objetivo (f_{obj2}) é minimizar o maior valor dentre os desvios padrões das deformações nos nós, e é no segundo objetivo que se encontram os método de modelos aproximados.

Além da restrição específica do método NBI, as demais restrições possuem o formato da eq. (1) com abordagem RIA e o formato da eq. (2) com abordagem PMA, sendo associadas às funções estado limite mostradas na eq. (3). As restrições adotadas são os critérios de estado limite último (ELU) presentes na NBR 6118/2014 e totalizam 8 funções de falha.

$$g_i^T(\mathbf{x}) = \beta_i - \beta_{tar}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (1)$$

$$g_i^T(\mathbf{x}) = G_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (2)$$

$$G_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{S_{Sd}(\mathbf{x})}{S_{Rd}(\mathbf{x})} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (3)$$

onde S_{Sd} refere-se aos esforços solicitantes de dimensionamento e S_{Rd} aos esforços resistentes de projeto.

6.1 Resultados

O primeiro passo do MBR é o processo off-line, onde é necessário definir o tamanho N da amostra que dará origem a base. Após alguns estudos, constatou-se que o menor tamanho da amostra que traz um menor custo computacional, mas ainda com bons resultados foi um tamanho $N = 10$. O número de casos avaliados para a construção do modelo substituto RBF foi igual a 10 vezes o número de variáveis de projeto, ou seja, 140 casos.

O MBR foi testado para o método de otimização multiobjetivo NBI com as abordagens de confiabilidade via RIA e PMA, com 11 pontos de Pareto para traçar a curva de cada abordagem. Já o RBF, a princípio, foi testado apenas com abordagem de confiabilidade via PMA e também com 11 pontos de Pareto.

A seguir, estão ilustrados na Figura 3 e na Figura 4 os resultados obtidos neste trabalho comparados com os resultados retirados de Nascimento [10] com análise estrutural via MEF, que não utiliza nenhuma estratégia de modelo aproximado. O gráfico do RBF está plotado com os resultados reanalisados via MEF.

Pode-se observar que alguns pontos de Pareto “aproximados” não ficaram nas localizações esperadas. Os erros máximos entre as diferenças relativas dos resultados calculados via MBR e os resultados via MEF são de 15,4 % e 12,2 % para os ótimos da f_{obj1} e da f_{obj2} , respectivamente. Já os erros máximos entre os ótimos da f_{obj1} e da f_{obj2} são 17,1 % e 35,3 %, respectivamente, relativos à diferença entre os resultados calculados via RBF e via MEF.

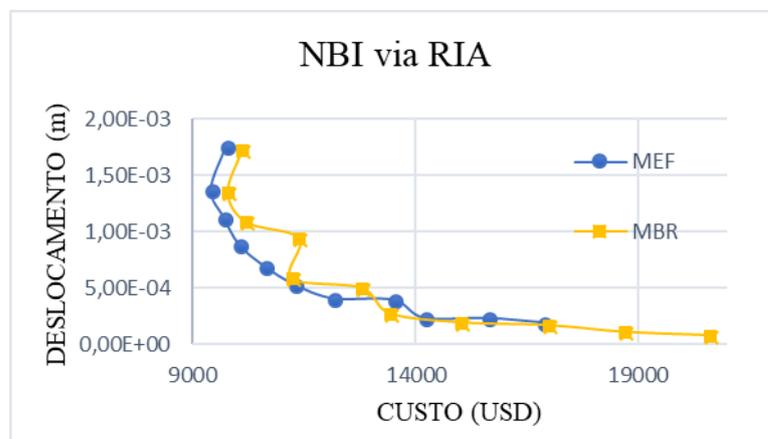


Figura 3. Pontos de Pareto com NBI via RIA

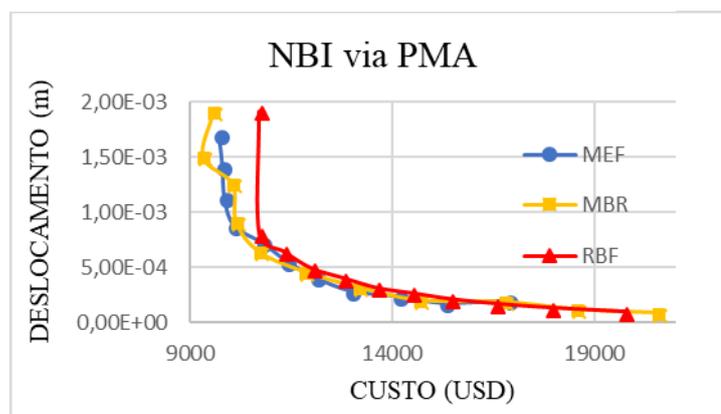


Figura 4. Pontos de Pareto com NBI via PMA

Na Tabela 2 são apresentadas as comparações do custo computacional de cada caso, através do número de iterações, avaliações de funções e tempo computacional. Pode-se observar que o MBR teve um menor custo computacional comparado ao tradicional MEF, como era esperado. Já o uso do modelo substituto RBF reduz enormemente esse custo, sendo 44 vezes mais rápido que o MBR e 64 vezes mais rápido que o uso tradicional do MEF, devido à rapidez da avaliação estrutural e convergência mais rápida.

Tabela 2. Custo computacional

		MEF via	MBR via	MEF via	MBR via	RBF via
		RIA	RIA	PMA	PMA	PMA
	Iterações	1023	499	1356	1170	340
NBI	Avaliações de funções	18557	8653	27827	22588	5784
	Tempo (hr)	39,82	24,63	44,95	30,93	0,70

7 Conclusões

A otimização do pórtico de concreto armado proposto com dois objetivos estatísticos e com restrições baseadas em confiabilidade, gera um elevado custo computacional. Para sanar tal problema, foram comparadas duas estratégias distintas de modelos aproximados. Tanto o método de Base Reduzida como o método de Funções Base Radial foram capazes de encontrar curvas de Pareto utilizando o método NBI que atendessem as restrições definidas, mostrando a eficiência do código desenvolvido, apesar das diferenças em relação à solução via MEF tradicional, chegando a um erro de até 35,3% que pode ser minimizado com uma investigação do tamanho da amostra, do ponto inicial, do cálculo dos gradientes, da tolerância, etc.

Dos dois métodos utilizados para a aproximação, o RBF obteve uma redução de custo computacional bastante considerável. O RBF foi 44 vezes mais rápido que o MBR e 64 vezes mais rápido que o uso tradicional do MEF, devido à rapidez da avaliação estrutural e convergência mais rápida. Entretanto, ainda são necessários alguns ajustes, pois, um dos pontos (ponto de custo mínimo) se encontra fora da localização esperada, em comparação com a curva encontrada pelo MEF.

Após serem feitos os ajustes necessários para que os métodos possam obter uma aproximação ainda melhor, ambos podem ser utilizados em diversas estruturas que possuam uma complexidade ainda maior, e portanto, um maior custo computacional.

Referências

- [1] B. S. Alves. Otimização baseada em confiabilidade de pórticos de concreto armado. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2018.
- [2] A. F. D. Almeida. Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- [3] R. S. Motta. Otimização robusta de estruturas utilizando o método da base reduzida. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de pernambuco, 2009.
- [4] S. J. Bates. Development of robust simulation, design and optimization techniques for engineering applications. PhD Theses, University of Wales Swansea, 2003.
- [5] R. S. Motta, S. M. B. Afonso, P ; R. Lyra, R. B. Willmersdorf. Development of a computational efficient tool for robust structural optimization. *Engineering Computations*, v. 32, p. 258-288, 2015
- [6] R. S. Motta. Otimização sob incertezas de estruturas com comportamento não linear utilizando modelos de ordem reduzida. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco.
- [7] S. M. B. Afonso, B. Horowitz, R. B. Wilmersdorf. Comparative study of surrogate models for engineering problems. In: ASMO-UK. 7th ASMO UK/ISSMO conference on Engineering Design Optimization, 2008.
- [8] D. L. Logan. *A first course in the finite element method*. Cengage Learning, 2011.
- [9] Joint Committee on Structural Safety. The JCSS probabilistic model code. *Structural Safety*, Elsevier Science, 1997.
- [10] J. C. M. Nascimento. Otimização multiobjetivo robusta de pórticos planos de concreto armado com restrições baseadas em confiabilidade. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2020.
- [11] A. Forrester, A. Sobester, A. Keane. *Engineering design via surrogate modelling: a practical guide*. John Wiley & Sons, 2008.
- [12] I. Das e J. E. Dennis. Normal Boundary Intersection: A new method for generation Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM J. Optimization*, vol. 8, n. 3, pp. 631-657, 1996.
- [13] A. Antoniou e W. S. Lu. *The optimization problem*. Springer, 2007.
- [14] G. A. G. Coêlho. Otimização de pórticos planos de concreto armado utilizando ajuste de parâmetros e operadores do algoritmo genético. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2017.