

Cálculo de deformações em Estruturas em Balanços Sucessivos aplicando incerteza nas variáveis de projeto com distribuição estatística através do método de Monte Carlo

Mariella Falcão de Lima Oliveira Santos¹, Silvana Maria Bastos¹, Renato Siqueira Motta¹

¹LITPEG, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil

mariella.santos@ufpe.br; smb@ufpe.br; renato.motta@ufpe.br

Resumo. Na análise de projetos, as características da estrutura podem solicitar verificações adicionais. Para as construções pelo método dos balanços sucessivos, cada novo trecho é executado a partir do anterior suportando as novas cargas de construção e aumentando as deformações à medida que a obra prossegue. Essas deformações são controladas com a aplicação de contra flechas compensando os deslocamentos para atingir o perfil de projeto. As contra flechas aplicadas são obtidas com o valor das deformações previstas em modelos computacionais de análise estrutural. Essas obras apresentam inúmeras variáveis de projeto que influenciam no comportamento estrutural. No desenvolvimento de projetos de estruturas, as metodologias determinísticas utilizam fatores de segurança para indiretamente considerar a incerteza das variáveis nos problemas. Este trabalho difere dos métodos convencionais para o cálculo das deformações, utilizadas para determinar as contra flechas, pois com o auxílio de um programa desenvolvido para as análises estruturais, considera a fluência em cada etapa executiva e as incertezas das variáveis. Com a simulação de Monte Carlo é obtido um conjunto de amostras das variáveis para realizar uma análise estocástica. As repetidas simulações são obtidas com a distribuição de probabilidade e os parâmetros estatísticos obedecem às orientações do JCSS e de estudos estatísticos empíricos e com dados de campo. Assim, é permitido encontrar uma melhor representação das propriedades do material aplicado na obra e sua estimada deformação.

Palavras-chaves: Balanços Sucessivos. Contra Flecha. Incerteza. Monte Carlo.

1 Introdução

A elaboração de um projeto depende das características da estrutura a ser construída e o seu comportamento durante a vida útil. Porém, verificações adicionais podem ser solicitadas devido à existência de um carregamento específico durante o período de construção ou do uso de uma técnica construtiva que modifique o sistema estrutural, caracterizando um diferencial na elaboração do projeto. É o caso das construções pelo método dos balanços sucessivos.

Além disso, ainda no desenvolvimento de projetos de estruturas, são comuns análises baseadas em metodologias determinísticas, que utilizam fatores de segurança para considerar a incerteza nos problemas. Entretanto, uma maneira mais adequada para que as incertezas sejam incluídas, é através de uma análise estocástica para considerar a aleatoriedade das variáveis de projeto (Ghali et al [1]). Assim, este tipo de análise é incorporado a projetos de construção em balanços sucessivos possibilitando projetar uma estrutura com conhecimento estatístico, para prever seu comportamento no período pretendido.

Este procedimento para o cálculo das deformações difere dos métodos convencionais, pois é considerada a fluência em cada etapa executiva e as incertezas das variáveis do problema. O programa desenvolvido para as análises estruturais considera as incertezas com curvas de distribuição estatística através do método de Monte Carlo, sendo possível encontrar uma melhor representação das propriedades do material aplicado na obra.

2 Características da Análise

É importante conhecer o processo da análise do método dos Balanços Sucessivos, para compreender a necessidade do cálculo das deformações previstas para a estrutura.

2.1 Método dos Balanços Sucessivos

O método construtivo em Balanços Sucessivos é realizado com cada novo trecho sendo executado a partir

do anterior. Os segmentos já executados são responsáveis por suportar as novas cargas de construção, aumentando as deformações à medida que a obra prossegue (Mathivat [2]) (Figura 1). Essas deformações atingem valores significativos, sendo controladas com aplicação de contra flechas na estrutura, que são determinadas através do cálculo das deformações previstas para cada fase da obra e da deformada final. Este cálculo das deformações pode ser feito através de simulação computacional para a análise estrutural.

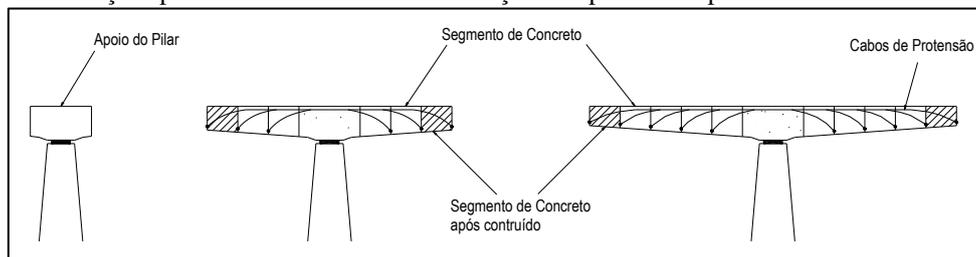


Figura 1 – Sequência de construção de ponte em Balanços Sucessivos. Fonte: Mathivat [2].

As inúmeras variáveis de projeto influenciam no comportamento da estrutura e a incerteza sobre as variáveis é avaliada, pois caracterizam ações e propriedades do material, que estão submetidas a parâmetros estatísticos do problema estrutural.

Com as análises realizadas, é obtido o valor das deformações considerando as incertezas no projeto e, assim, posteriormente calcular as contra flechas que deverão ser aplicadas à estrutura. Assim como, os fenômenos influenciados pelo tempo, como a fluência, que surgem no problema de forma determinística. Entretanto, é possível destacar a existência das variáveis submetidas às incertezas para o cálculo do coeficiente de fluência.

2.2 Análise dos Efeitos Dependentes do Tempo – Fluência

É essencial a consideração da fluência nas estruturas em Balanços Sucessivos (Bazant et al [3]; Silva et al [4]). Com isso, os modelos matemáticos que representam este fenômeno precisam caracterizar bem o problema, sendo utilizado o auxílio das Normas.

Cálculo da Fluência do Concreto

A curva tensão-deformação para o concreto é resultado da proporção entre as tensões aplicadas e a deformação ocorrida. Assim, a deformação imediata, $\varepsilon_c(t_0)$, é expressa pela equação (1):

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (1)$$

onde: $\sigma_c(t_0)$ é a tensão no concreto; $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade do concreto na idade t_0 , em que ocorreu a aplicação da tensão.

Após a aplicação da tensão, o fenômeno de fluência aumenta as deformações com o tempo. A deformação total corresponde à soma das deformações imediatas com as deformações por fluência.

A razão entre a deformação por fluência e a deformação imediata é o coeficiente de fluência, sendo calculado por modelos matemáticos que caracterizem o fenômeno. Essa deformação é aplicada linearmente e expressa no cálculo como na equação (2).

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \phi(t, t_0)\varepsilon_c(t_0) = \varepsilon_c(t_0)[1 + \phi(t, t_0)] = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}[1 + \phi(t, t_0)] \quad (2)$$

onde: $\phi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência que é função da idade de carregamento t_0 e da idade t ao qual a deformação será determinada.

Cálculo de Fluência segundo a Norma CEB-FIP (1993)

Obedecendo a CEB-FIP [5], o cálculo do coeficiente de fluência está submetido a uma função linear, representada na equação (3).

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} \phi(t, t_0) \quad (3)$$

onde: ϕ é o coeficiente de fluência, apresentado na equação (4):

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \beta_c(t - t_0) \quad (4)$$

onde: ϕ_0 é o coeficiente de fluência teórico; β_c é o coeficiente que determina o incremento de fluência com o tempo após o início do carregamento; com as equações encontradas no CEB-FIP [5].

2.3 Simulação de Monte Carlo

O método Monte Carlo (MC) é utilizado em várias análises estatísticas, bem como na avaliação numérica de integrais através do estudo da função de interesse. É muito utilizado em análises quantitativas e em problemas relacionados à propagação de incertezas. A ideia do método é simular estocasticamente o comportamento do sistema modelado (Cardoso et al [6]).

Repetidas simulações são realizadas, utilizando em cada uma delas um conjunto particular de valores de variáveis aleatórias geradas de acordo com as correspondentes distribuições de probabilidade conjunta. As variáveis aleatórias possuem um tamanho de amostra N , que corresponde à quantidade de simulações realizadas para obter um conjunto de soluções. Por isso, a amostragem gerada pelo MC é considerada uma amostra de observações experimentais, fazendo deste método uma análise estatística (Ang e Tang [7]).

Por essa razão, ao ser conhecida a função de distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias, o método MC pode ser aplicado para cálculos aproximados de várias respostas estatísticas, desde que haja pontos amostrados em número suficiente, ou seja, o tamanho da amostra (N) represente com acuidade o problema (Bucher [8]).

3 Parâmetros estatísticos das variáveis de projeto para o cálculo de deformações em conjunto de amostras através de Monte Carlo

3.1 Distribuição estatística através de Monte Carlo

O desenvolvimento de projetos de estruturas baseado em análises de metodologias determinísticas utiliza os fatores de segurança para considerar a incerteza das variáveis do problema. Neste trabalho, o programa computacional desenvolvido efetua o cálculo de deformações com uma análise estocástica das variáveis para que seja considerada de maneira mais adequada a aleatoriedade do problema (Ghali et al [1]).

Com a simulação de Monte Carlo, é gerado um conjunto de amostras das variáveis através das repetidas simulações de acordo com a distribuição de probabilidade e os parâmetros estatísticos das variáveis incertas do problema. Esses parâmetros obedecem às orientações do JCSS [9], Neville [10] e estudo com dados de campo. Após uma análise de convergência em valores obtidos para deformações, foi definida uma amostra de dimensão $N=100$, pois obteve resultados de forma satisfatória.

3.2 Geometria

Segundo o JCSS [9], as variações nas dimensões das peças de concreto são descritas pela dimensão x menos o valor da dimensão nominal (média da variável), μ_x , conforme equação (5).

$$Y = x - \mu_x \quad (5)$$

onde: Y é a variação da dimensão da peça de concreto; x é a dimensão da peça de concreto; μ_x é a dimensão nominal da peça de concreto (média da variável).

Assim, todas as demais propriedades geométricas que dependem da dimensão da peça são calculadas de acordo com a variação ocorrida na mesma. A dispersão nas dimensões é definida pela função de distribuição normal com desvio padrão obedecendo ao seguinte critério:

$$\sigma_x = 4mm + 0.006 \cdot \mu_x \leq 10mm \quad (6)$$

onde: σ_x é o desvio padrão da variável x ;

Como mostra a equação (6), as peças com dimensão maior do que 1000 mm (1 metro), o desvio padrão será sempre de 10 mm. Com estes parâmetros estatísticos das dimensões, é possível calcular o coeficiente de variação das variáveis que dependem das medidas da peça.

Para calcular as deformações, são utilizados os dados de entrada das seguintes propriedades geométricas: comprimento, área, perímetro e inércia. Com base nas recomendações do JCSS [9], os parâmetros utilizados nessas variáveis foram obtidos com um estudo por meio do método MC e estão apresentados na Tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros da distribuição probabilística das variáveis geométricas

Variável	Distribuição	Coeficiente de Variação	
		Dimensão menor que 1m	Dimensão maior que 1m
Comprimento	Normal	à calcular	0,01
Área	Normal	0,0231	0,0890
Perímetro	Normal	0,0106	0,0013
Inércia	Normal	0,0426	0,0136

3.3 Material

As incertezas nas variáveis referentes às propriedades do concreto foram analisadas especificamente.

Resistência à Compressão do Concreto

A principal propriedade do concreto é a resistência à compressão, obtida através de ensaios padronizados com idade de 28 dias. Apesar das recomendações existentes no JCSS [9], para o cálculo da resistência está sendo consideradas as equações do CEB-FIP [5] associado com estudos fornecidos por alguns trabalhos (NBR 12655 [11]; Neville [10]; Melchers e Beck [12]).

O projeto estrutural é baseado na consideração de uma determinada resistência mínima do concreto (resistência característica, f_{ck}), em que a resistência média, f_{cm} , é igual ao f_{ck} acrescido de um fator proporcional ao desvio padrão da resistência à compressão do concreto (Neville [10]). A distribuição de probabilidade utilizada é normal quando ocorre rigoroso controle na produção do material (Drysdale apud Melchers e Beck [12]), adotando para a resistência característica conforme a equação abaixo:

$$f_{ck} = f_{cm} - k \cdot \sigma \quad (7)$$

onde: k é o coeficiente devido às amostras menores que o f_{ck} ; σ é o desvio padrão da dosagem do concreto.

O coeficiente k é definido pelo número de amostras de corpo de prova que deram abaixo do valor mínimo. Com o objetivo de que apenas 5% das amostras não atinjam a resistência característica, é adotado $k = 1,65$ (NBR 12655 [11], 2015; Neville [10]; Melchers e Beck [12]).

O desvio padrão é função das condições de preparo do concreto, sendo possível adotar valores de acordo com as características do material. O CEB-FIP [5] admite um fator de acréscimo de 8 MPa para o cálculo da resistência média, o que corresponde a um desvio padrão de $\sigma = 4,85$ MPa. Com isso, através da equação (8), o valor do f_{cm} calculado é:

$$f_{cm} = f_{ck} + 1.65 \cdot \sigma = f_{ck} + 1.65 \cdot 4.85 \quad (8)$$

O uso de um desvio padrão constante é justificado por Neville [10] com ensaios realizados em centrais de concreto na Suécia, pois de acordo com os valores reais obtidos, o desvio padrão apresenta uma mesma característica, conforme mostra a Tabela 2:

Tabela 2 – Desvio padrão de acordo com a classe de resistência obtido por ensaio em concreteiras na Suécia

Classe de resistência	20	25	30	40	50	60
Desvio padrão (MPa)	3,2	3,3	3,5	3,7	3,4	3,3

Fonte: Neville [10]

O uso da distribuição normal na resistência do concreto corresponde a um rigoroso controle no preparo do material com um baixo valor de desvio padrão, pois nessas situações a probabilidade de resistência negativa é muito baixo, apesar de existir. Vários trabalhos que envolvem incertezas no projeto costumam utilizar essa distribuição (Santos et al [13]). Entretanto, Drysdale apud Melchers e Beck [12] recomenda que nas situações em que não houver controle adequado na fabricação do material, deve ser utilizada a distribuição lognormal, pois, para este tipo de distribuição, a probabilidade de valores negativos é nula. Como o valor do f_{cm} é variável e o desvio padrão é fixo, poderíamos ter uma distribuição com probabilidade de valores de resistência negativo considerável, para valores baixos de f_{cm} . Diante disso, a distribuição lognormal foi considerada com a resistência média, f_{cm} , e o desvio padrão de 4,85.

Módulo de Elasticidade

O módulo de elasticidade é uma das propriedades do concreto obtida com a resistência característica. O JCSS [9] apresenta como calcular essa variável, porém ao ser adotado a distribuição lognormal para a resistência do concreto, o trabalho propõe que baseado na equação do módulo de elasticidade seja calculado para cada ponto da amostra obtida pela simulação de Monte Carlo, como a equação (9), apresentada no CEB-FIP [5].

$$E_{Ci} = E_{Co} \left[\frac{(f_{Ci})}{f_{cmo}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

onde: f_{Ci} é a resistência característica do concreto para cada ponto da amostra obtida por MC.

Coeficiente de Fluência

O cálculo do coeficiente de fluência realizado pelo JCSS [9] sugere o uso de alguma norma, de forma determinística. Entretanto, a proposta do procedimento é que aplicando o CEB-FIP [5], conforme equação (4), as variáveis existentes no cálculo do coeficiente de fluência, como o f_{ck} , umidade relativa e dimensões, passam a considerar as incertezas do problema através de amostras obtidas randomicamente no programa MATLAB [14].

3.4 Umidade Relativa

Os parâmetros de distribuição para a variabilidade da umidade relativa dependem de incertezas intrínsecas as ações externas. A determinação desses parâmetros foi obtida por um modelo estatístico devido à ausência de trabalhos sobre a distribuição da umidade relativa e a possibilidade de obter dados específicos de uma região para realização de um estudo local. Neste caso, foram utilizados os dados experimentais da estação meteorológica de Surubim, que é representativo para o estado de Pernambuco, fornecidos pelo INMET (Instituto Nacional de Meteorologia). Esses dados contemplam a umidade relativa a cada hora, todos os dias durante o período de 2008 a 2014.

Após o tratamento dos dados, o histograma foi determinado como visto na Figura 2(a), porém para o ajuste de distribuição com característica lognormal é necessário considerar o estudo da variável como $Y = 100 - RH$. Assim, pode ser encontrada a média e o desvio padrão utilizados para a umidade relativa (Figura 2(b)).

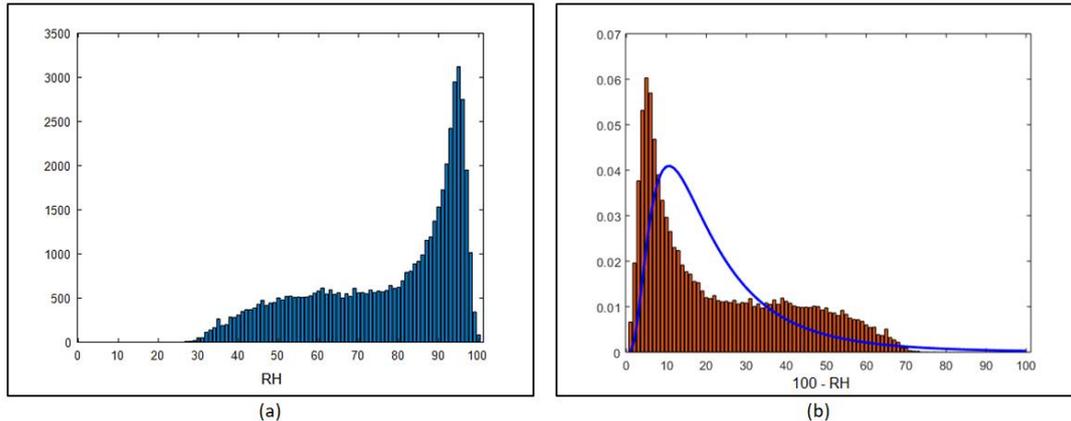


Figura 2 – Histograma da umidade relativa (a). Ajuste de curva de distribuição lognormal umidade relativa (b).

3.5 Carregamentos

O uso da distribuição normal para representar estudos estocásticos no cálculo de carregamentos de peso próprio é recomendado pelo JCSS [9], pois a mesma distribuição é utilizada no peso específico. Para determinar as contra flechas são consideradas as deformações de peso próprio e carga permanente (Menn [15]). A carga de peso próprio por MC é obtida através da densidade do material, com coeficiente de variação, $CV_\gamma = 0,04$, e volume da peça que obedece à variação das dimensões de peças de concreto, conforme os parâmetros geométricos (JCSS [9]). A formulação do cálculo do peso próprio possibilitou com o uso de MC obter a média, desvio padrão e coeficiente de variação do carregamento, $CV_{pp} = 0,0410$, em seções genéricas.

4 Verificação do cálculo estocástico de deformações para estruturas em balanços sucessivos

A proposta do cálculo de deformações por processo estocástico foi comparada com o método determinístico, para os modelos conforme apresentado na Figura 3 e na Tabela 3, para cada intervalo de tempo de execução, considerando a fluência em cada ciclo construtivo (t_0 – tempo inicial; t – tempo ao longo da execução; t_f – tempo final).

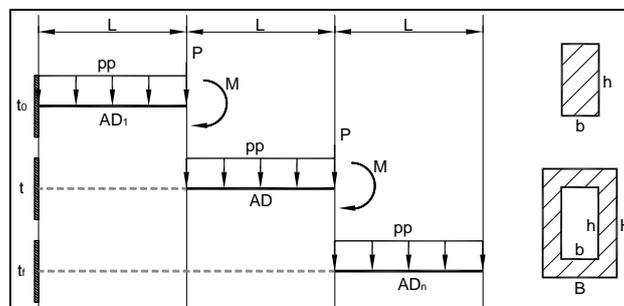


Figura 3 – Modelo genérico de viga engastada para comparação de deformações.

O modelo A possui 3 aduelas. Já o modelo B é composto por um total de 7 aduelas. Os carregamentos P e M são referentes ao peso do concreto fresco da aduela subsequente, que são removidos quando o peso próprio da referida aduela começar a atuar.

Tabela 3 – Modelos utilizados para comparação de deformações

Modelo	Geometria	Carregamentos	Propriedades do Material
A	L=3m b=30cm h=60cm ADn=3	pp=0.45tf/m P=1.35tf M=2.025tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%
B	L=5m B=800 – b=600cm H=300 – h=200cm ADn=7	pp=30tf/m P=150tf M=375tfm	fck=30Mpa u=1.09m RH=80%

4.1 Resultados das deformações

A comparação dos valores de deformação de projeto considerando a fluência existente em cada ciclo de execução pelos métodos determinístico e estocástico dos modelos A e B da Tabela 3 é apresentada nas Tabelas 4 e 5, respectivamente. Os valores do método estocástico são obtidos pela média da possível dispersão, desta forma, o estudo com variáveis aleatórias permite identificar a variabilidade das deformações do projeto. É possível ver a configuração das deformações pelos dois métodos nas Figuras 4 e 5.

Modelo A

O cálculo estocástico apresenta deformações com valores muito semelhantes ao determinístico, como mostra a taxa de relação entre os resultados (D/E) da Tabela 4. A Figura 4 também mostra a proximidade das curvas, em que a estocástica se apresenta mais acima.

Tabela 4 – Contra flecha de projeto para o modelo A (m)

Variáveis	Nós			
	1	2	3	4
Determinístico (D)	0.00	0.006751	0.019717	0.033238
Estocástico (E)	0.00	0.006710	0.019575	0.033014
Taxa D/E (%)	0.00	100.61	100.73	100.68

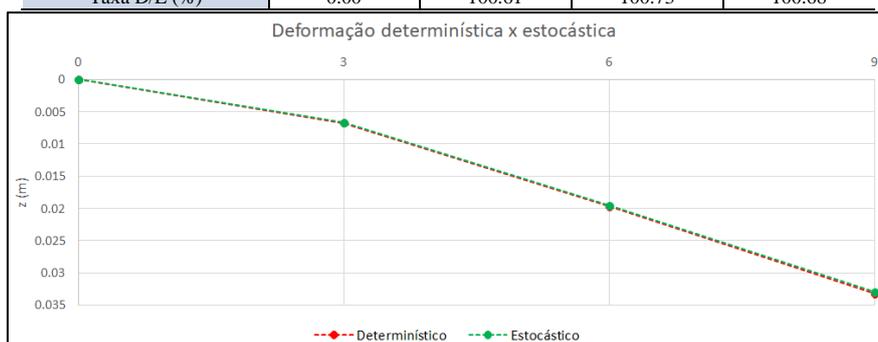


Figura 4 – Configuração das contra flechas de projeto determinística e estocástica para o modelo A.

Em relação ao estudo estocástico, a variabilidade dos valores de contra flecha pode ser analisado de acordo com a dispersão, que poderá ser aplicado em estudos de confiabilidade.

Modelo B

Os valores de deformações, novamente, estão muito próximos, sendo observado pela taxa (D/E) da Tabela 5. A curva determinística aparece, mais uma vez, abaixo da curva estocástica (Figura 5).

Tabela 5 – Contra flecha de projeto para o modelo B (m)

Variáveis	Nós							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Determinístico (D)	0.00	0.007495	0.026845	0.054327	0.086912	0.122256	0.158693	0.195225
Estocástico (E)	0.00	0.007370	0.026404	0.053434	0.085505	0.120266	0.156095	0.192016
Taxa D/E (%)	0.00	101.70	101.67	101.67	101.65	101.65	101.66	101.67

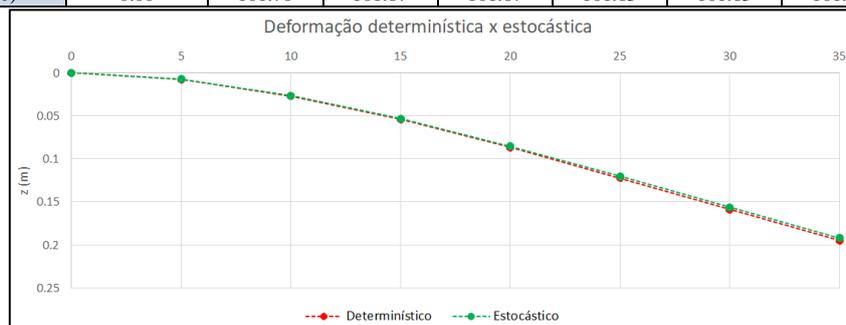


Figura 5 – Configuração das contra flechas de projeto determinística e estocástica para o modelo B.

5 Conclusões

Este trabalho é parte de uma análise mais ampla do estudo do método de balanços sucessivos, por isso a necessidade do estudo das deformações de maneira mais real. As verificações realizadas permitem destacar que a consideração de incertezas nas variáveis de projeto é relevante e devem seguir parâmetros estatísticos devidamente analisados:

- As recomendações do JCSS [9] são aplicáveis para determinar a distribuição probabilística e o coeficiente de variação das variáveis em um projeto. Entretanto, a umidade relativa não apresenta recomendações, mas é possível coletar dados meteorológicos da região do projeto e determinar os parâmetros probabilísticos.
- No caso da resistência característica do concreto, f_{ck} , mesmo com as orientações do JCSS [9], outros estudos (Neville [10]; Melchers e Beck [12]) sugerem o uso da distribuição lognormal quando não há rigoroso controle da fabricação. Essa distribuição foi utilizada no método proposto com os devidos parâmetros definidos e apresenta bons resultados para caracterizar o concreto.
- Diante dos resultados apresentados, a média do processo estocástico apresenta valores de deformação próximos aos do determinístico, que é o método utilizado atualmente nos projetos. Nos modelos estudados, é observado que as deformações determinísticas possuem valores maiores. Assim, essa estrutura apresenta uma maior flexibilidade, o cálculo pelo método determinístico pode ser considerado conservador ao confrontar com o processo estocástico proposto. À medida que a estrutura aumenta de comprimento o valor determinístico tende a fugir do valor médio de um estudo estocástico.

Agradecimentos. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) pelos recursos financeiros disponíveis para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

- [1] GHALI, A.; NEVILLE, A. M.; BROWN, T. G. *Structural analysis: a unified classical and matrix approach*. CRC Press, 2014.
- [2] MATHIVAT, J. *The cantilever construction of prestressed concrete bridges*. 3a ed. New York: A Wiley- Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc, 1983.
- [3] BAZANT, Z. P.; HUBLER, M. H.; YU, Q. *Pervasiveness of excessive segmental bridge deflections: Wake-up call for creep*. ACI Structural Journal, 2011, 108.6: 766-774.
- [4] SILVA, I. M., OYAMADA, R., ESA, S. T., & ISHITANI, H. *Efeito da deformação lenta sobre o comportamento em serviço*. In: Ibracon, Vitória, 2003.
- [5] CEB-FIP. COMITE EURO-INTERNATIONAL du BETON, FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE. *CEB-FIP Model Code 1990*. Design Code. Lausanne: CEB, 1993.
- [6] CARDOSO, J. B., ALMEIDA, J. R., DIAS, J. M., & COELHO, P. G. *Structural reliability analysis using Monte Carlo simulation and neural networks*. Advances in Engineering Software, 2008, 39.6: 505-513.
- [7] ANG, A. H. S.; TANG, W. H. *Probability concepts in engineering planning and design, vol. 2: Decision, risk, and reliability*. New York, John Wiley & Sons, 1984.
- [8] BUCHER, C. G. *Adaptive sampling—an iterative fast Monte Carlo procedure*. Structural safety, 1988, 5.2: 119-126.
- [9] JCSS, JCSS. *Probabilistic model code*. Joint Committee on Structural Safety, 2001.
- [10] NEVILLE, A. M. *Propriedades do Concreto*. 5ª ed. Bookman Editora, 2015.
- [11] ABNT. Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 12655: Concreto de cimento Portland—Preparo, controle, recebimento e aceitação—Procedimento*. Rio de Janeiro, 2015.
- [12] MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley & Sons, 2018.
- [13] SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. *Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras*. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 7, n. 5, p. 723-746, 2014.
- [14] MATLAB. MATHWORKS, *Optimization Toolbox™ User's Guide*. Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2019.
- [15] MENN, Christian. *Prestressed Concrete Bridge*. Traduzido por: Paul Gauvreau. 1a ed. Boston: Basel, 1990.