

COMPARATIVE ANALYSES BETWEEN MONTE CARLO AND KERNEL SMOOTHER METHODS TO EVALUATE STRUCTURAL RELIABILITY

Clayton F. da Silva¹, Flávio de S. Barbosa¹, Alexandre A. Cury¹, George O. Ainsworth Jr¹.

¹Graduate Program in Civil Engineering, Federal University of Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia UFJF Rua José Lourenço Kelmer, s/n – São Pedro, 36036-900, Juiz de Fora/Minas Gerais, Brasil
felicio.clayton@engenharia.ufjf.br; flavio.barbosa@engenharia.ufjf.br; alexandre.cury@engenharia.ufjf.br;
george.ainsworth@engenharia.ufjf.br

Abstract.

Among the methodologies widely used for structural reliability, some of them can be highlighted. The semi-probabilistic approach, for example, considers the structure in a failure scenario, taking into account purely deterministic variables and safety coefficients established by standards, without calculating the probability of failure. Numerical methods, such as First-order reliability method (FORM), Second-order reliability method (SORM), and First-order second-moment method (FOSM), calculate the probability of failure from the limit state equation considering stochastic factors. On the other hand, observational methods, such as Monte Carlo, simulate pseudo-random scenarios and estimate the probability of failure by counting collapse occurrences. To guarantee the convergence of this method, a sufficiently large number of simulations must be carried out, increasing the required computational effort. Alternatively, the Kernel Smoother observational method may be used to calculate the probability of failure (PoF) of structural systems demanding a computational effort considerably smaller than Monte Carlo. In that way, the purpose of the present work is to establish a comparison between Monte Carlo and Kernel Smoother methods by evaluating PoFs and reliability indexes calculated for numerical applications, by using both methodologies.

Keywords: Structural Reliability, Stochastic Modelling, Probability of Failure.

1 Introdução

Um dos grandes desafios da engenharia estrutural consiste em lidar com incertezas. Grandezas como características físicas e geométricas dos elementos estruturais bem como os carregamentos, sejam eles oriundos de utilização da estrutura ou de eventos excepcionais como acidentes ou atentados, podem levar uma dada estrutura a se comportar de maneira inadequada ou, até mesmo, ao colapso.

É fácil encontrar exemplos de colapsos estruturais devidos a cenários não previstos pelos projetistas responsáveis. Pode-se citar o caso da *Tacoma Narrows Bridge* (1940), onde a carga de vento excitou o tabuleiro da ponte levando-a ao colapso. Ou, mais recentemente, o edifício situado no bairro de Maraponga, Fortaleza, CE (2019), que desabou parcialmente em junho do referido ano. Segundo a perícia, o desabamento se deu devido a erros no projeto acerca da análise e avaliação do solo local.

As normas de projeto vigentes sugerem o tratamento das variáveis envolvidas no dimensionamento como determinísticas e, para se afastar de cenários indesejados, o emprego de coeficientes parciais de segurança de modo a estabelecer uma certa margem entre a resistência e a sollicitação. O emprego de tais coeficientes visa cobrir o caráter estocástico das variáveis, não considerado pelos métodos de dimensionamento.

Neste contexto, a confiabilidade estrutural se mostra uma valiosa ferramenta, visto que suas metodologias consideram de forma mais realista o caráter não determinístico dos problemas de dimensionamento. Tais métodos envolvem cálculo de probabilidade de falha (PF) e índices relacionados à robustez da estrutura. Computacionalmente, estes métodos podem ser divididos em duas categorias, a saber: métodos numéricos, que trabalham com os parâmetros das variáveis aleatórias como Método de confiabilidade de primeira ordem, Método de confiabilidade de segunda ordem e Método de segundo momento de primeira ordem; e métodos observacionais, como Monte Carlo (MC), que analisam uma quantidade de cenários de dimensionamento suficientemente numerosos, gerados

de forma aleatória, para determinação da PF .

Há uma vantagem no emprego dos métodos observacionais no que diz respeito a cenários em que mais de um ponto da estrutura falha concomitantemente. Entretanto, estes métodos demandam uma amostra relativamente grande para garantir suas respectivas convergências.

Gadallah [1], Miladinovic [2], Li et al. [3], entre outros autores, exploram métodos do tipo *kernel*, que se baseiam em uma amostra similar àquelas analisadas pelos métodos observacionais para aproximar uma função de densidade de probabilidade (PDF), do inglês *probability density function*, do fenômeno em estudo.

Neste contexto, o presente trabalho visa realizar comparações entre resultados obtidos para valores de PF s alcançados através do método de MC e um método *kernel*, mais precisamente o *kernel smoother* (KS). Além das precisões dos resultados, são também analisados os tempos computacionais necessários para os cálculos e o número de avaliações para as respectivas convergências de cada método. Para tanto, dois exemplos numéricos extraídos da literatura são usados como base de comparações.

2 Cálculo de probabilidade de falha

Para o cálculo da PF , o primeiro passo para ambas as metodologias consiste na geração de uma amostra pseudo-aleatória para cada variável estocástica envolvida no fenômeno estudado. As amostras geradas são aplicadas à equação de estado limite que governa o problema, onde se observa se há ou não estabilidade estrutural para cada cenário gerado.

O presente trabalho empregou a mesma amostra para ambas as metodologias, visando não somente reduzir o esforço computacional, como também possibilitar uma comparação mais isonômica entre as metodologias avaliadas.

A partir desse ponto, as metodologias MC e KS seguem passos distintos descritos em 2.1 e 2.2 respectivamente.

2.1 Simulações de Monte Carlo

As simulações de Monte Carlo consistem basicamente em se obter a PF através da contagem de cenários em que a equação de estado limite assume valores negativos. Tais cenários denotam que a solicitação superou a resistência caracterizando uma falha do sistema. Após a contagem de cenários a PF é obtida diretamente conforme a Eq. 1.

$$PF = \frac{f}{n}, \quad (1)$$

onde:

f = número total de cenários nos quais o sistema falha,

n = número total de avaliações.

Para se ter uma ideia da robustez desse método, Nowak and Collins [4] recomendam seu emprego em três situações: para solucionar problemas complexos que não possuem resposta exata; para solucionar problemas em que a solução exata exija que se faça muitas considerações, podendo tornar a resposta encontrada menos realista; e para avaliar a assertividade de outras técnicas de abordagem em confiabilidade.

Entretanto, o emprego do MC possui uma desvantagem: quanto menor é a PF que se deseja detectar, maior deve ser o número de observações. Diferentes autores fazem considerações sobre o número mínimo de observações para que se detecte a PF de uma determinada ordem de grandeza. Haldar and Mahadevan [5] sugerem que o número de observações adotado seja ao menos dez vezes o inverso da ordem de grandeza da PF que se quer determinar.

Essa desvantagem pode inviabilizar sua aplicação em alguns problemas típicos de Engenharia Civil com PF de ordem inferior a 10^{-5} , tendo em vista o elevado esforço computacional que se demanda nestes casos.

2.2 Kernel smoother

No caso do método KS, o domínio da função de estado limite é discretizado em pontos igualmente espaçados. A distância entre estes são denominadas bandas e as probabilidades de ocorrência de cada ponto discreto são associadas segundo à ocorrência de valores em sua respectiva banda. A PDF da equação de estado limite é construída a partir da interpolação das probabilidades por uma função com lei de formação escolhida. Para realizar esta etapa,

a função de uma *toolbox* nativa do MATLAB ©, *ksdensity*, foi usada. Os parâmetros empregados são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do KS

Parâmetro	Valor/Tipo
Função interpoladora	Normal
Número de pontos	100
Largura de banda	Otimizada para o número de pontos

De acordo com Gadallah [1], a PDF obtida com esta metodologia é capaz de representar bem o comportamento estocástico do sistema com uma amostra consideravelmente reduzida. Assim, a aplicação desse método diminuiria o esforço computacional necessário para uma aproximação razoável da PF do sistema e, consequentemente, o tempo requerido para esse cálculo.

A terceira e última etapa consiste em integrar a PDF até a fronteira do domínio de falha para obter a área sob a curva que representa a PF do sistema. Neste trabalho, a PDF foi integrada pelo método do trapézio.

Um detalhe importante sobre o emprego do KS neste contexto é a limitação intrínseca para se lidar com a interseção de eventos, visto que a PF é obtida pela PDF criada para a equação de estado limite. Desta forma, o presente trabalho não faz distinção daqueles cenários em que duas seções falham concomitantemente, buscando exclusivamente comparar o tempo das metodologias e seus desempenhos ao calcular a PF de cada seção.

2.3 Aplicações

Para estabelecer uma comparação entre as metodologias supracitadas, dois exemplos extraídos da literatura fora analisados. Primeiramente uma viga bi-engastada sujeita a uma carga concentrada tratada por Seck et al. [6]. Posteriormente, um pórtico plano de três barras carregado por duas forças concentradas abordadas por Seck et al. [6] e Kagho [7].

Viga bi-engastada.

Este problema consiste em uma viga bi-engastada sujeita a uma força concentrada aplicada a um terço do vão conforme ilustrado pela Fig. 1.

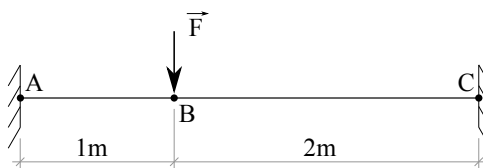


Figura 1. Modelo estrutural de viga bi-engastada.

O primeiro passo para solução deste exemplo consiste em resolver a análise estrutural da viga em questão, considerando-se uma carga unitária, e encontrar o diagrama de momentos fletores (DMF) ilustrado pela Fig. 2.

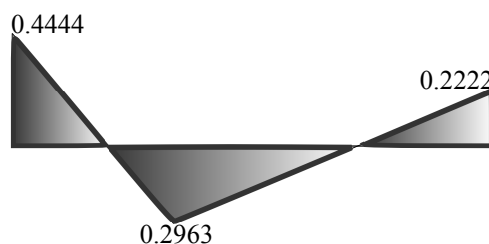


Figura 2. Diagrama de momento fletor (DMF)

Concluída a parte referente à análise estrutural do problema, a abordagem segue para o tratamento estocástico. São consideradas variáveis aleatórias neste problema: a força aplicada e o momento resistente das seções de interesse, ambas com distribuição normal. A viga possui seção regular constituída de material que apresenta comportamento elasto-plástico perfeito, com resistência à tração idêntica a de compressão. Desta forma, os parâmetros das variáveis de momento resistente são iguais para todas as seções como mostrado na Tabela 2, bem como os parâmetros da força aplicada.

Os valores extremos do DMF formam um vetor de influência da carga em cada seção de interesse, mostrado na Eq. 2. Este vetor é usado para gerar o arranjo que contem as três amostras aleatórias de momentos solicitantes a partir do produto mostrado na Eq. 3.

$$K = (0.4444, 0.2963, 0.2222), \quad (2)$$

$$M_{s(n \times 3)} = F_{(n \times 1)} \times K_{(1 \times 3)}, \quad (3)$$

onde:

$M_{s(n \times 3)}$ = conjunto aleatório de momentos fletores observados,

$F_{(n \times 1)}$ = vetor composto por valores de força sorteados,

$K_{(1 \times 3)}$ = vetor influência da carga unitária, composto pelos valores extremos do diagrama de momentos fletores, "×" representa o produto tensorial, onde dois vetores, um $(m \times n)$ e outro $(n \times p)$, dão origem a uma matriz $(m \times p)$.

Tabela 2. Variáveis aleatórias consideradas no exemplo de viga bi-engastada

Variáveis	Distribuição	Média (μ)	Desvio padrão (σ)
M_{rA}	Normal		
M_{rB}	Normal	1600 Nm	500 Nm
M_{rC}	Normal		
F	Normal	2800 N	1000 N

A Eq. eq. (4) permite obter a amostra da função de estado limite se dá pela :

$$S_{(n \times 3)} = M_{r(n \times 3)} - M_{s(n \times 3)}, \quad (4)$$

onde:

$S_{(n \times 3)}$ = amostra da função de estado limite,

$M_{r(n \times 3)}$ = conjunto aleatório de momentos resistentes observados.

Assim, a amostra da função de estado limite pode ser processada seguindo as duas metodologias. Para observar como ambas se comportam com a variação do tamanho da amostra, o número de avaliações iniciou com 401 e chegou a 4000001 observações assumindo os valores listados na Eq. 5,

$$n = \{401, 4001, 40001, 400001, 4000001, 40000001\}. \quad (5)$$

O progresso das PF s para as seções A, B e C é mostrado na figura 3.

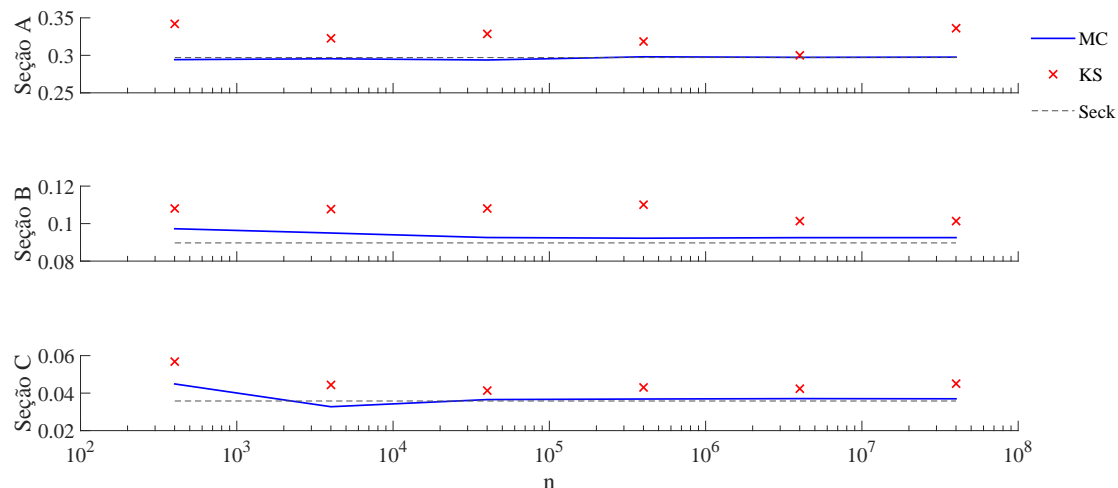


Figura 3. Probabilidade de falha para as seções de interesse da viga

A partir destes gráficos, pode-se notar que o número de avaliações necessárias para que ambas as metodologias alcancem a convergência foi praticamente o mesmo. Nota-se ainda que, ao convergir, as *PFs* em ambos métodos se aproxima daquelas encontradas por Seck et al. [6] para as três seções de interesse.

O MC obteve valores de *PF* final mais próximos daqueles encontrados por Seck et al. [6] para todas as seções de interesse. Os valores finais encontrados para ambas metodologias estão dispostos na Tabela 3, bem como os valores de Seck et al. [6] usados como referência no presente trabalho.

Tabela 3. *PFs* encontradas para $n = 40000001$

Seção	<i>PFs</i>		
	Seck	MC	KS
A	0.2970	0.2976	0.3362
B	0.0897	0.0925	0.1013
C	0.0358	0.0370	0.0449

Os tempos de processamento necessários para os cálculos envolvidos em cada método podem ser observados na Tabela 4.

Tabela 4. Evolução dos tempos de processamento em segundos

n	401	4001	40001	400001	4000001	40000001
MC	0.0001	0.0003	0.0013	0.0166	0.2547	11.1047
Tempo (s) KS	0.0135	0.0432	0.2695	2.3012	22.9495	246.9439

A Tabela 4 mostra que o MC, mesmo para um número elevado de avaliações, levou tempo inferior ao KS para encontrar as *PFs* de cada seção do sistema.

Pórtico plano de três barras bi-engastado.

O segundo exemplo visa avaliar o desempenho dos métodos analisados nos casos de PF s com valores sensivelmente inferiores àqueles do exemplo precedente.

Este exemplo consiste em um pórtico plano formado por três barras sujeito ao carregamento de duas forças concentradas, uma horizontal e outra vertical, ilustrado pela Fig. 4.

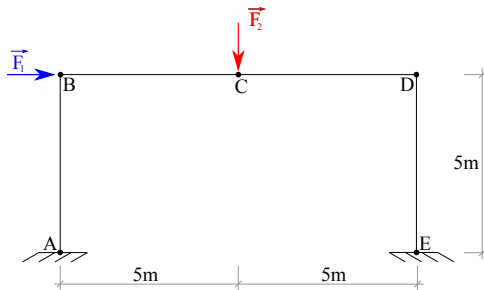


Figura 4. Pórtico bi-engastado

De modo análogo ao explicado no exemplo anterior, foi feita a análise estrutural separadamente para se determinar a influência de cada força na composição do momento solicitante. Os DMFs obtidos pela análise são mostrados na Fig. 5 e os vetores de influência são mostrados nas Eqs. 6 e 7.

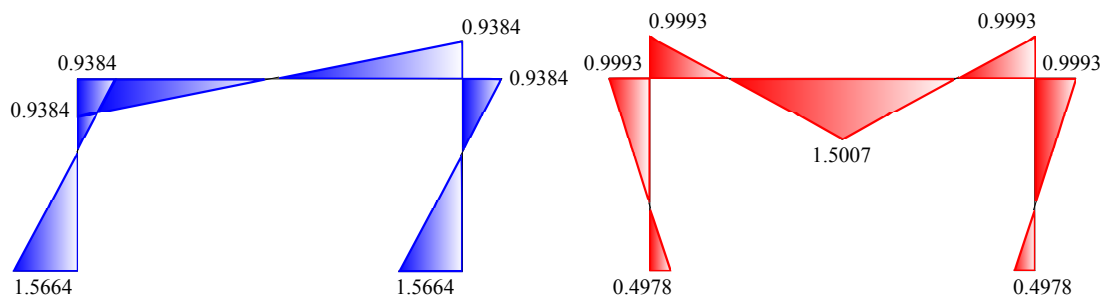


Figura 5. DMF's pórtico

$$K_1 = (-1.5664, 0.93841, 0.0012, -0.93603, 1.5592), \quad (6)$$

$$K_2 = (0.49786, -0.99929, -1.5007, -0.99929, 0.49786). \quad (7)$$

Terminada a etapa de análise estrutural a metodologia segue para o próximo passo no qual, para este problema, a amostra de momentos solicitantes é definida por uma combinação dos carregamentos como explicitado pela Eq. 8,

$$M_{S(n \times 5)} = F_{1(n \times 1)} \times K_{1(1 \times 5)} + F_{2(n \times 1)} \times K_{2(1 \times 5)}. \quad (8)$$

Todas as variáveis estocásticas consideradas neste problema possuem distribuição normal e seus parâmetros encontram-se listados na Tabela 5. As simulações tiveram número de amostras listados na Eq. 9,

$$n = \{401, 4001, 40001, 400001, 4000001, 40000001\}. \quad (9)$$

Tabela 5. Variáveis aleatórias consideradas para o pórtico

Variáveis	Distribuição	Média (μ)	Desvio padrão (σ)
M_{rA}	Normal		
M_{rB}	Normal		
M_{rC}	Normal	101292 Nm	5064.6 Nm
M_{rD}	Normal		
M_{rE}	Normal		
F_1	Normal	20000 N	6000 N
F_2	Normal	40000 N	12000 N

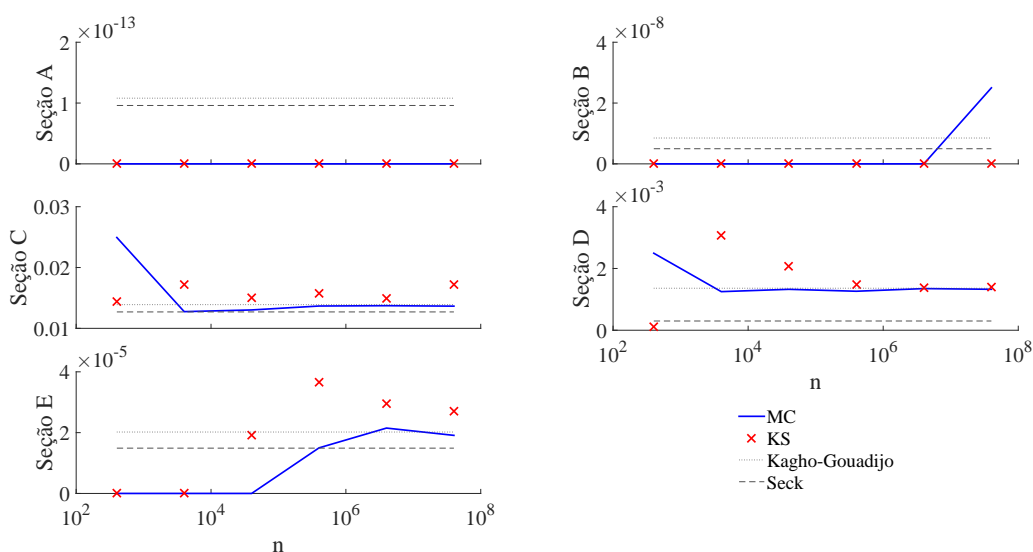


Figura 6. Probabilidades de falha das seções de interesse

A evolução das PFs para as seções A, B, C, D e E estão mostradas na Figura 6. Também constam na figura, as PFs de encontradas por Seck et al. [6] e Kagho [7].

Observa-se, na Fig. 6, que as PFs para as seções A e B foram identificadas como nulas em ambos os métodos avaliados. Lembrando-se da recomendação de Haldar and Mahadevan [5], nota-se que para a determinação de PFs de ordem 10^{-13} (seção A) e 10^{-8} (seção B), seriam necessárias 10^{14} e 10^9 amostras aleatórias, respectivamente, o que não foi o caso neste trabalho, já que o número de amostras foi limitado a 10^8 . Essa limitação se deve ao recurso computacional disponível, que não foi suficiente para viabilizar análises com um número superior de amostras.

Para as demais seções, onde as PFs tem ordens de grandeza superiores, observa-se valores diferentes de zero obtidos por ambos os métodos avaliados.

A Tabela 6 resume os valores de PFs alcançados usando-se 40000001 amostras aleatórias, deixando claro que os resultados das metodologias alcançadas são semelhantes àqueles extraídos da literatura.

Os tempos computacionais para as análises realizadas no exemplo do pórtico são mostrados na Tabela 7. Nota-se que, de maneira semelhante ao exemplo da viga, o MC demandou tempo inferior ao KS para todos os números de amostras. Observa-se, entretanto, que o tempo necessário para a análise via método de MC cresce a uma taxa superior. Nota-se que para $n = 401$, o tempo despendido pelo método de MC é praticamente dez vezes menor que o do KS. Já para $n = 40000001$, os tempos estão numa mesma ordem de grandeza, indicando que o método KS pode apresentar um melhor desempenho computacional para os casos de amostras aleatórias de tamanhos superiores. Mais uma vez, em função de limitações do recurso computacional disponível, não foi possível avaliar amostras maiores para se comprovar ou não essa tendência.

Tabela 6. PF s encontradas para $n = 4000001$

Seção	PF s			
	Seck	Kagho-Gouadijo	MC	KS
A	$9.6000 \cdot 10^{-14}$	$1.0800 \cdot 10^{-13}$	0.0000	0.0000
B	$4.9800 \cdot 10^{-9}$	$8.5000 \cdot 10^{-9}$	$2.5000 \cdot 10^{-8}$	0.0000
C	0.0127	0.0139	0.0136	0.0172
D	0.0003	0.0014	0.0013	0.0014
E	$1.4900 \cdot 10^{-5}$	$2.0200 \cdot 10^{-5}$	$1.9100 \cdot 10^{-5}$	$2.7065 \cdot 10^{-5}$

Tabela 7. Evolução do tempo em segundos

n	401	4001	40001	400001	4000001	40000001	
Tempo (s)	MC	0.0015	0.0004	0.0033	0.0380	0.3471	316.6842
	KS	0.0189	0.0606	0.4381	4.0389	37.7661	447.9260

3 Conclusões

Este trabalho apresentou um estudo preliminar comparativo entre os métodos de MC e KS aplicados à determinação de PF s em dois modelos numéricos. Em ambos os exemplos analisados, os dois métodos apresentaram PF s próximas aos respectivos valores extraídos da literatura.

Com relação aos tempos computacionais, observou-se que, para os exemplos analisados, o método de MC apresentou melhor desempenho. Entretanto, com base nos resultados obtidos no segundo exemplo, infere-se uma tendência de que o método KS pode vir a apresentar resultados mais competitivos em relação ao MC para o caso de elevados números de amostras. Tal tendência não pode ser confirmada neste trabalho por motivos de limitação de hardware.

Agradecimentos. Os autores do presente artigo agradecem às agências CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, PGCI 046/2014), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, PROCAD 88881.068530/2014-0), FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, projeto PPM-00001-18), FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, projeto PPM-00106-17), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, projeto 304329/2019-3), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, projeto 311576/2018-4-PQ), UFJF (Universidade Federal de Juiz de Fora)

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Gadallah, M. H., 2011. An alternative to monte carlo simulation method. *International Journal of Experimental Design and Process Optimisation*, vol. 2, n. 2, pp. 93–101.
- [2] Miladinovic, B., 2008. Kernel density estimation of reliability with applications to extreme value distribution.
- [3] Li, H.-s., Lü, Z.-z., & Yue, Z.-f., 2006. Support vector machine for structural reliability analysis. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 27, n. 10, pp. 1295–1303.
- [4] Nowak, A. S. & Collins, K. R., 2012. *Reliability of structures*. CRC Press.
- [5] Haldar, A. & Mahadevan, S., 2000. *Probability, reliability, and statistical methods in engineering design*. J. Wiley & Sons, Incorporated.
- [6] Seck, E. H. B. et al., 2018. *Contribution au développement d'outils analytiques et numériques pour quantifier et qualifier la robustesse des structures*. PhD thesis, Paris 10.

- [7] Kagho, N., 2013. *Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages*. PhD thesis, Ph. D thesis, University of Paris-est, France.