

## ANÁLISE NÃO LINEAR CÍCLICA COM LEIS DE DESCARREGAMENTO-RECARREGAMENTO BASEADAS EM PONTO FOCAL MÓVEL

### NONLINEAR CYCLIC ANALYSIS WITH UNLOADING-RELOADING LAWS BASED ON MOVING FOCAL POINT

Lívia Ramos Santos Pereira<sup>1</sup>, Samuel Silva Penna<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>*Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha, 31270-901, Belo Horizonte, Brasil*

<sup>1</sup>*liviarsp.eng@gmail.com*

<sup>2</sup>*penna@dees.ufmg.br*

**Abstract.** Constitutive models are mechanical-mathematical formulations that describe the behavior of a material. For a complete representation of the medium, these models must be able to reproduce the processes of loading, unloading and reloading. Usually, models for quasi-brittle materials present deterioration of the elastic modulus, while residual strains are not verified. Models for ductile materials, although, have their elastic modulus preserved during unloading and that results in permanent strains. In real materials analysis what is observed is a composition of these two behaviors. The literature presents analytical models to incorporate both hypotheses, developed from the concept of focal point. Traditional formulations usually work with a fixed focal point. Thus, in order to expand existing formulations, this work presents an elastic degradation model associated with cyclic stress-strain laws according to a moving focal point, which varies depending on the deterioration of the material medium.

**Keywords:** Constitutive models, Cyclic stress-strain laws, Moving focal point.

**Resumo.** Modelos constitutivos são formulações mecânico-matemáticas que descrevem o comportamento de um material. Para uma representação completa do meio, esses modelos devem ser capazes de reproduzir processos de carga, descarga e recarga. Usualmente, modelos para materiais parcialmente frágeis apresentam deterioração do módulo elástico, enquanto não são verificadas deformações residuais. Já os modelos para materiais dúcteis têm o módulo elástico preservado durante o descarregamento, o que resulta em deformações permanentes. Na análise de materiais reais o que é observado é uma composição desses dois comportamentos. A literatura apresenta modelos analíticos para incorporar ambas as hipóteses, desenvolvidos a partir do conceito de ponto focal. Formulações tradicionais geralmente trabalham com um ponto focal fixo. Assim, com o intuito de expandir as formulações existentes, este trabalho apresenta um modelo de degradação elástica associado a leis tensão-deformação cíclicas segundo um ponto focal móvel, o qual varia em função da deterioração do meio material.

**Palavras-chave:** Modelos constitutivos, Leis tensão-deformação cíclicas, Ponto focal móvel.

## 1 Introdução

Análises fisicamente não lineares abordam a degradação a partir da variação da rigidez do elemento estrutural, acionando os modelos constitutivos para descrição do comportamento material. A completude da descrição do meio por um modelo constitutivo acontece quando esse é capaz de simular a resposta do

material diante de carregamentos cíclicos. Modelos desenvolvidos para materiais parcialmente frágeis apresentam deterioração permanente do módulo elástico, representada pelo módulo secante, enquanto não são verificadas deformações residuais. Já nos modelos para materiais dúcteis, o módulo elástico é preservado durante o ciclo de carga, conduzindo às deformações permanentes. O que é observado experimentalmente na análise de materiais reais, contudo, é uma composição desses dois comportamentos.

Em busca de uma representação que incorpore ambas as hipóteses, Lee et al. [1] apresentam um modelo analítico desenvolvido segundo um ponto focal, em que a lei tensão-deformação é associada a um polo para o qual o descarregamento é direcionado. Essa lei estabelece um foco fixo, limitando a reprodução dos laços de histerese mecânica, típicos das análises cíclicas. Outras abordagens, como a proposta por Yankelevsky e Reinhardt [2], inclui a utilização de pontos focais diversos, embora sua formulação seja restrita à descrição geométrica, isto é, não está relacionada à evolução das variáveis internas do modelo. Com o propósito de elaborar uma metodologia que represente ciclos de histerese, apresenta-se neste trabalho um modelo baseado em ponto focal móvel que varia em função da evolução da degradação do meio material a partir do controle das deformações observadas durante a análise.

## 2 Modelo de degradação elástica para análise fisicamente não linear cíclica

Modelos de degradação elástica baseiam-se no monitoramento da degradação do módulo de elasticidade do material a partir do operador secante. No caso de modelos de fissuração distribuída para concreto, pode-se adotar as direções principais de deformação como o sistema local das trincas. Penna [3] apresenta a formulação geral para modelos de degradação elástica, contemplando o modelo de fissuração distribuída proposto por Pitangueira [4]. Nesse modelo, assume-se que a matriz constitutiva secante é definida no sistema local da trinca, que, para Estado Plano de Tensão (EPT), é dada por:

$$[{}^s\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{D}_{11} & {}^s\mathbf{D}_{12} & {}^s\mathbf{D}_{13} \\ {}^s\mathbf{D}_{21} & {}^s\mathbf{D}_{22} & {}^s\mathbf{D}_{23} \\ {}^s\mathbf{D}_{31} & {}^s\mathbf{D}_{32} & {}^s\mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{E_n E_t}{E_0^2} \nu^2} \begin{bmatrix} E_n & \frac{\nu E_n E_t}{E_0} & 0 \\ \frac{\nu E_n E_t}{E_0} & E_t & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{1}{1 - \frac{E_n E_t}{E_0^2} \nu^2} \right) G_{nt} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

sendo  $E_0$  o módulo elástico,  $E_n$  e  $E_t$  os módulos degradados,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $n$  e  $t$  as direções principais de ortotropia, correspondendo ao sistema local da trinca, e  $G_{nt}$  o módulo de cisalhamento.

A formulação de Penna [3] foi realizada para representar análises monotônicas. Para as análises cíclicas faz-se necessário estender esse modelo, reestabelecendo as leis constitutivas e o cálculo dos trechos de descarga/recarga. Visando a análise não linear cíclica, Pereira [5] apresentou uma formulação baseada na definição do módulo secante generalizado, representado por  $E_{SG}$ , integrando ao modelo de Penna [3] leis tensão-deformação cíclicas para os regimes de descarregamento/recarregamento. Dessa forma, quando a estrutura é submetida a um ciclo de carga, os módulos  $E_n$  e  $E_t$  são substituídos na matriz secante pelo  $E_{SG}$ . A utilização desse parâmetro restringe-se a descrição do laço de histerese e não afeta o valor da variável histórica associada a degradação do meio.

### 2.1 Lei tensão-deformação cíclica com ponto focal fixo

Fundamentado no trabalho analítico de Lee et al. [1], foi elaborado um procedimento computacional para simular trechos lineares de descarga/recarga segundo um ponto focal fixo (Fig. 1(a)). Definiu-se uma trajetória linear com extremidades no ponto de descarga ( $\varepsilon_d, \sigma_d$ ) e no ponto focal ( $\varepsilon_f, \sigma_f$ ). Determina-se, então, o módulo linear ( $E_L$ ), que é a inclinação dessa reta:

$$E_L = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{(\sigma_d - \sigma_f)}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f)} = \frac{(\sigma_d - \sigma_f')}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f')}. \quad (2)$$

O parâmetro  $E_{SG}$ , dado pela razão entre a tensão corrente ( $\sigma'$ ) e a deformação corrente ( $\varepsilon'$ ), Eq. (3), é necessário ao cálculo do operador secante em regime de descarga/recarga, que representa a relação total adotada na obtenção do estado de tensão. A tensão corrente é a tensão de descarregamento,  $\sigma_d$ , reduzida de uma variação de tensão,  $\Delta\sigma$ , que a partir da Eq. (2) conduz à Eq. (4).

$$E_{SG} = \frac{\sigma'}{\varepsilon'}, \quad (3) \quad \sigma' = \sigma_d - \frac{(\sigma_d - \sigma_f)}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f)}(\varepsilon_d - \varepsilon'). \quad (4)$$

Ressalta-se que o módulo secante generalizado não tem relação com a degradação do material, que está vinculada à variável histórica do modelo, sendo essa variável, neste caso, o maior valor da deformação observada na análise, representado por  $\varepsilon_d$ , conforme ilustrado na Fig. 1, nos pontos de descarga.

Quanto a definição do ponto focal, adotou-se a recomendação de Kwon [6], que estabelece que o foco para a curva de compressão é a resistência à tração do concreto ( $\varepsilon_t, f_t$ ), enquanto para a curva de tração o ponto focal é a resistência à compressão do concreto ( $\varepsilon_c, f_c$ ).

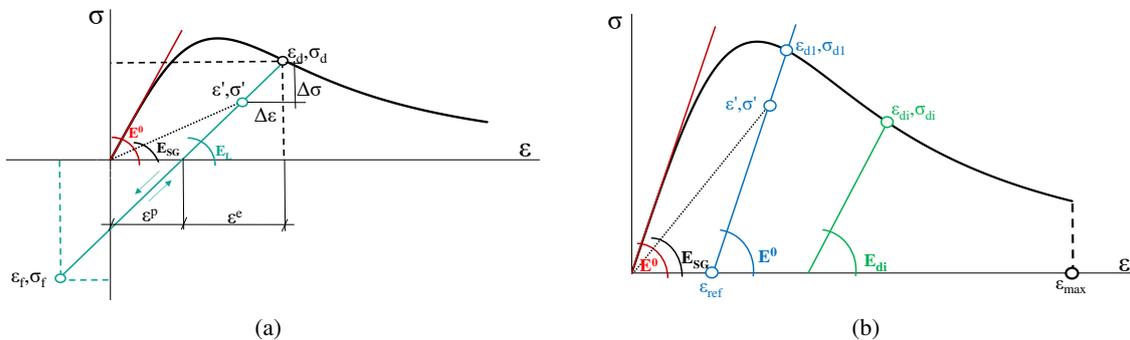


Figura 1. Leis tensão-deformação com ponto focal fixo e ponto focal móvel.

## 2.2 Proposta de lei tensão-deformação cíclica com ponto focal móvel

Apesar da curva tensão-deformação descrita anteriormente representar um avanço em relação à formulação secante, abrangendo a deterioração da rigidez e as deformações permanentes, a fixação do ponto focal restringe a reprodução dos laços de carga. Em busca de flexibilizar a representação dos ciclos e baseando-se nos múltiplos pontos focais definidos por Yankelevsky e Reinhardt [2], propõe-se aqui uma lei tensão-deformação com ponto focal móvel como ilustrado na Fig. 1(b).

Essa abordagem determina a degradação do módulo de elasticidade a partir de uma proporção entre a deformação no ponto de início da descarga do ciclo  $i$  ( $\varepsilon_{di}$ ) e uma deformação limite ( $\varepsilon_{max}$ ). A  $\varepsilon_{max}$  é adotada inicialmente como a máxima deformação do ensaio experimental que se pretende modelar, podendo ser ajustada segundo extrapolação desse valor para uma melhor representação. No primeiro ponto de descarga, toma-se a inclinação da reta definida pelo módulo elástico do material íntegro,  $E^0$ , e seu ponto de interseção com o eixo das deformações é admitido como ponto focal de referência ( $\varepsilon_{ref}$ ). Para os ciclos subsequentes, é estimada uma percentagem de degradação,  $P_{di}$ , dada pela relação linear:

$$P_{di} = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{di}}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{ref}}, \quad (5)$$

de forma que o módulo de elasticidade degradado seja definido para cada ciclo de carga  $i$ , sendo obtido pela multiplicação da percentagem de degradação pelo módulo de elasticidade do material íntegro.

A degradação do módulo elástico de descarregamento não pode conduzir o material a deformações permanentes inferiores às observadas anteriormente. Assim, caso a formulação elaborada vá de encontro à essa definição, duas estratégias de correção podem ser adotadas. A primeira estratégia (Fig. 2(a)), ao identificar uma deformação permanente menor que a anterior, fixa a deformação permanente do ciclo corrente como idêntica a do ciclo prévio, enquanto a segunda estratégia fixa a degradação do módulo de

elasticidade como a mesma do laço de histerese precedente (Fig. 2(b)). Esses procedimentos garantem a irreversibilidade da deformação permanente do material, conforme as trajetórias tracejadas da Fig. 2.

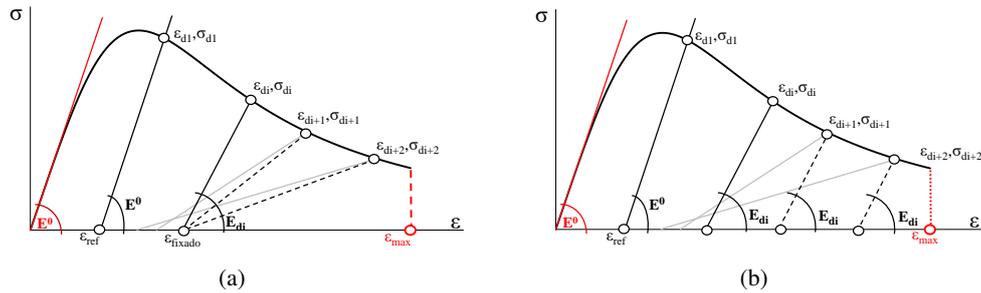


Figura 2. Estratégias de correção dos ciclos.

### 3 Simulações numéricas

O modelo constitutivo e a formulação das leis tensão-deformação cíclicas foram implementadas no sistema computacional Interactive Structural Analysis Environment (INSANE), desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Para validar a formulação implementada, foram simulados ensaios de tração e compressão diretas (Fig. 3), os quais foram confrontados com resultados experimentais disponíveis na literatura. As análises utilizaram o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson, com método de controle direto de deslocamentos e equilíbrio tangente.

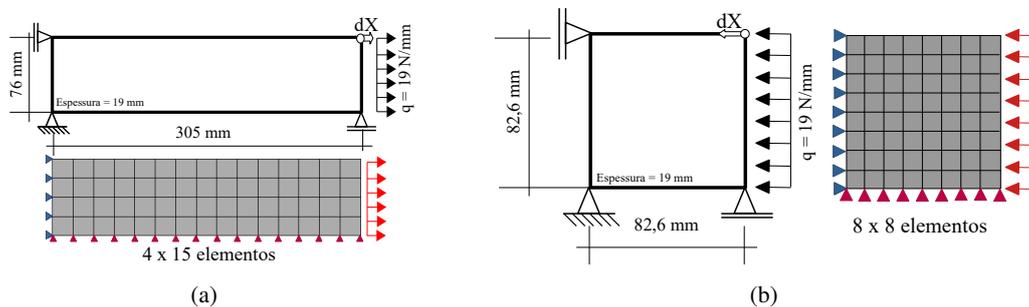


Figura 3. Modelos estruturais para simulação dos ensaio de tração e compressão cíclicas.

#### 3.1 Simulação numérica do ensaio de tração direta

Gopalaratnam e Shah [7] realizaram ensaios em corpos de prova de concreto simples, com geometria prismática, submetidos à tração cíclica. Foram utilizadas amostras de dimensões  $305 \times 76 \times 19$  mm, concreto com resistência à tração de  $f_t = 3,53$  MPa, deformação limite do regime elástico na tração igual a  $\varepsilon_t = 1,18 \times 10^{-4}$  e energia de fratura de  $G_f = 0,0564$  N/mm. Visando a análise numérica, adotou-se uma malha com 60 elementos finitos quadrilaterais de 4 nós (Fig. 3(a)). Admitiu-se incremento de deslocamento de  $5,0 \times 10^{-8}$  m e os ciclos foram introduzidos pela identificação de limites de carga.

As leis tensão-deformação definidas para a envoltória monotônica foram as leis de Boone et al. [8] para tração e Carreira e Chu [9] para compressão. Estimou-se o coeficiente de Poisson como  $\nu = 0,18$ , a resistência do concreto à compressão como  $f_c = 40,4$  MPa e a deformação limite associada como  $\varepsilon_c = 0,002$ . O coeficiente de retenção ao cisalhamento foi admitido como  $\beta_r = 0,05$  e as variáveis de dano foram limitadas ao valor de 0,92. O comprimento característico adotado foi de  $h = 166$  mm. Já nos trechos de descarregamento/re carregamento, admitiu-se a lei linear formulada neste trabalho.

Tem-se ilustrado na Fig. 4(a) o resultado obtido com a formulação linear com foco fixo, cuja implementação foi realizada segundo a proposta de Lee et al. [1]. Nesse caso, o foco foi estabelecido como

o ponto de resistência à compressão do concreto ( $\varepsilon_c, f_c$ ). Observa-se que os dois primeiros ciclos foram bastante coerentes com o ensaio, tanto em termos do ponto de início da descarga, quando na determinação da deformação permanente. Entretanto, apesar dos três últimos ciclos terem início em pontos em conformidade com a curva experimental, as inclinações dos laços não corresponderam às observadas no ensaio, superestimando as deformações residuais.

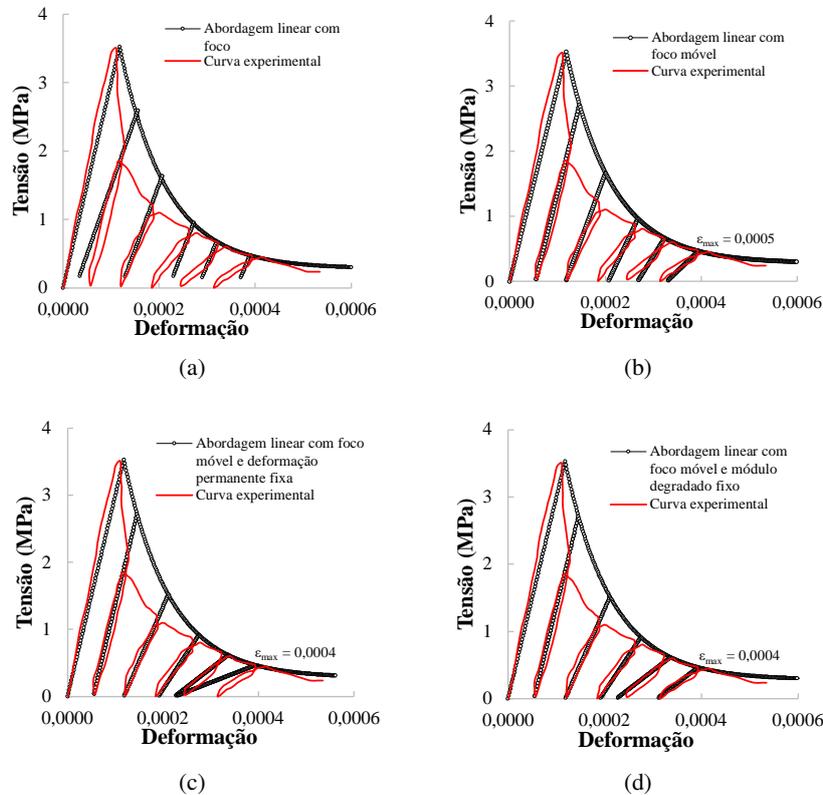


Figura 4. Curvas tensão-deformação de tração: diferentes formas de representação dos ciclos de carga.

Em busca de uma melhor representatividade do comportamento observado no ensaio, foram realizadas novas simulações, adotando-se a proposta de ponto focal móvel. Na primeira simulação (Fig. 4(b)), definiu-se o parâmetro de deformação limite como  $\varepsilon_{max} = 0,0005$ , com referência à deformação máxima do ensaio e não houve necessidade de utilizar estratégias de correção. A curva resultante apresenta melhorias significativas na representação da deformação permanente, quanto comparada à curva representada na Fig. 4(a). Entretanto, as inclinações dos ciclos ainda mostraram certa defasagem da curva experimental, o que conduziu a novas simulações, com ajuste da deformação limite. Tomando  $\varepsilon_{max} = 0,0004$  e a estratégia de fixação da deformação permanente, foi obtida a curva tensão-deformação da Fig. 4(c). Com exceção do último ciclo, todos os demais convergiram com os resultados experimentais, indicando a inadequação da estratégia de correção adotada. Tendo isso em vista, foi feita uma nova simulação, mantendo  $\varepsilon_{max} = 0,0004$  e alterando a estratégia para fixação do módulo degradado, cujo resultado é indicado na Fig. 4(d). Essa última curva apresentou excepcional concordância com os resultados experimentais, mostrando que a utilização do ponto focal móvel levou a um aperfeiçoamento dos resultados numéricos em relação às demais formulações.

### 3.2 Simulação numérica do ensaio de compressão direta

Para avaliar a resposta do material à compressão cíclica, a análise numérica partiu dos experimentos de Karsan e Jirsa [10]. A simulação adotou malha de 64 elementos quadrilaterais de 4 nós (Fig. 3(b)). O incremento de deslocamento adotado foi de  $-2,0 \times 10^{-7}$  m e a introdução dos ciclos partiu da identificação de limites de carga. Os parâmetros fornecidos do ensaio foram: módulo de elasticidade  $E = 31700$

MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,18$ , energia de fratura  $G_f = 0,04$  N/mm, resistência do concreto à compressão  $f_c = 27,6$  MPa e comprimento característico  $h = 82,6$  mm. Os demais parâmetros necessários às leis de tração de Boone et al. [8] e de compressão de Carreira e Chu [9] foram estimados, assumindo os valores: resistência do concreto à tração  $f_t = 2,76$  MPa, deformação limite associada à resistência do concreto à compressão  $\varepsilon_c = 0,0016$  e fator de retenção ao cisalhamento  $\beta_r = 0,05$ .

A primeira simulação, indicada na Fig. 5(a), adotou a implementação com foco fixo, dado pela resistência do concreto à tração ( $\varepsilon_t, f_t$ ). O que é possível concluir ao analisar o resultado numérico é que o ponto focal adotado encontra-se tão próximo da origem que os trechos de descarga/recarga foram muito similares aos observados quando se adota descarregamento baseado na formulação secante, falhando na representação das deformações permanentes. Para a melhor representação da resposta do material à compressão, conforme o experimento, partiu-se para simulações que consideram o ponto focal móvel.

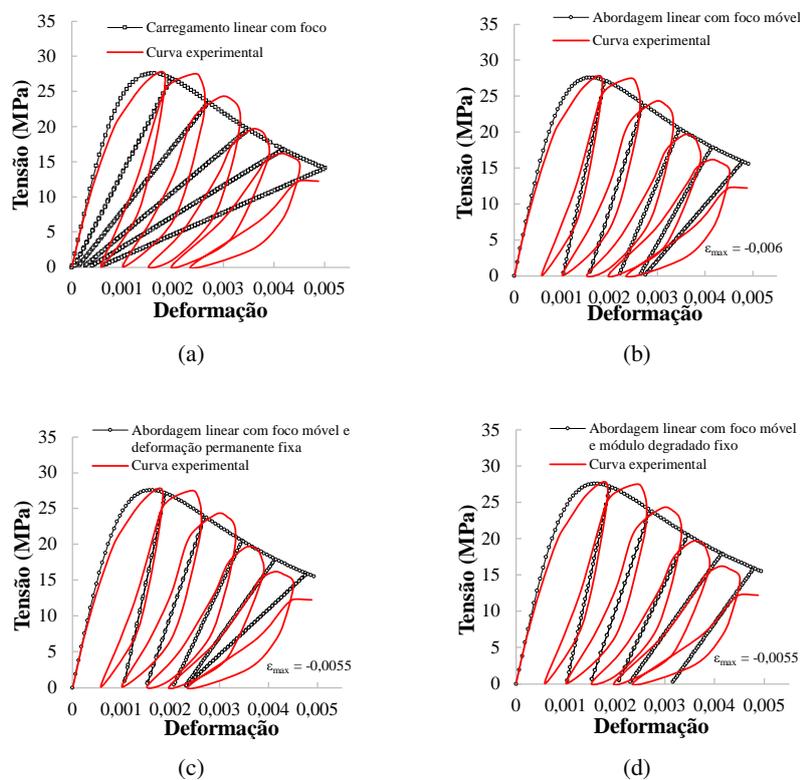


Figura 5. Curvas tensão-deformação de compressão: diferentes formas de representação dos ciclos de carga.

Admitindo uma deformação limite de  $\varepsilon_{max} = 0,006$ , foi obtida a curva numérica da Fig. 5(b). Com esse valor de deformação não houve necessidade de adotar estratégias de correção. O resultado foi significativamente melhor que o apresentado na Fig. 5(a), embora as deformações permanentes tenham apresentado decalagem em relação às experimentais. Fez-se então uma redução da deformação limite para  $\varepsilon_{max} = 0,0055$ . Na simulação apresentada pela Fig. 5(c) adotou-se a estratégia de fixação da deformação permanente, enquanto na Fig. 5(d) optou-se pela estratégia de fixação do módulo degradado. Os resultados foram próximos ao obtido com a  $\varepsilon_{max} = 0,006$ , com exceção do último ciclo. A alteração da deformação limite, nesse caso, não conduziu a melhorias na reprodução da curva experimental e, dentre os resultados obtidos, o indicado na Fig. 5(b) foi o que mais se aproximou do ensaio. Observa-se nos resultados experimentais ciclos com não linearidade muito acentuada, que, para melhor aproximação, devem ser reproduzidos por leis cíclicas não lineares, as quais não são abordadas neste trabalho.

## 4 Considerações finais

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de lei tensão-deformação cíclica baseada em ponto focal móvel e no operador secante generalizado para regimes de descarga/recarga, adotada em um modelo de degradação elástica que representa a fissuração distribuída do concreto. Simulações numéricas de tração e compressão diretas mostraram que essa lei conduz a significativas melhorias na reprodução de resultados experimentais, uma vez que é capaz de indicar tanto a degradação da rigidez quanto as deformações permanentes. As limitações na representação dos laços de histerese associadas à definição de um polo fixo foram superadas ao se adotar o ponto focal móvel. Os resultados numéricos validaram a implementação realizada e comprovaram a capacidade dessa formulação em reproduzir o complexo comportamento do concreto submetido a cargas cíclicas. Por fim, na continuidade dos estudos, serão adotados ciclos de carga e descarga não lineares para melhor representação dos laços de histerese mecânica observados experimentalmente.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da agência de pesquisa brasileira CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ - grant nº 311663/2017-6).

## Referências

- [1] Lee, Y.-H., Willam, K., e Kang, H.-D., 1995. Experimental observations of concrete behavior under uniaxial compression. In *Proceedings FRAMCOS-2*, pp. 397–414.
- [2] Yankelevsky, D. Z. e Reinhardt, H. W., 1987. Focal point model for uniaxial cyclic behavior of concrete. In *Computational Mechanics of Concrete Structures, Advances and Applications*, pp. 99–106, Delft. IABSE Colloquium.
- [3] Penna, S. S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [4] Pitangueira, R. L. S., 1998. *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*. Tese (Doutorado), PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [5] Pereira, L. R. S., 2020. *Formulação de modelos de dano tensorial para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos e cíclicos*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [6] Kwon, M., 2000. *Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members*. Tese (Doutorado), University of Colorado, Boulder, USA.
- [7] Gopalaratnam, V. e Shah, S., 1985. Softening response of plain concret in direct tension. *ACI Journal*, vol. 82, pp. 310–323.
- [8] Boone, T., Wawrzynek, P. A., e Ingraffea, A. R., 1986. Simulation of the fracture process at rock with application to hydrofracturing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, vol. 23, n. 3, pp. 255–265.
- [9] Carreira, D. J. e Chu, K.-H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 82 (6), pp. 797–804.
- [10] Karsan, I. D. e Jirsa, S. O., 1969. Behavior of concrete under compressive loadings. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 95, pp. 2543–2563.