

Numerical analysis of reinforced concrete structures considering coarse aggregates

Éverton S. Ramos¹, Rogério Carrazedo¹

¹*Departament of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo
Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP, Brazil
evertonramos@usp.br, rogcarrazedo@sc.usp.br*

Abstract. Reinforced concrete is the most used material in the civil construction sector, providing high resistance to mechanical stresses and contributing to the durability of structural systems. Its application allows the design of structural components with the various formats, motivating its use in the bold and functional architectural designs required by contemporary society. In order to predict the behavior of reinforced concrete structures according to the project stresses, the development of numerical tools is essential. The main objective of this study is to present a numerical approach for modeling reinforced concrete structures considering the presence of particulate inclusions (coarse aggregate). Geometric non-linearity is considered naturally by the positional formulation of the Finite Element Method (Positional FEM), while the physical non-linearity of concrete is considered using Mazar's damage criterion and of steel using an elastoplastic model. Two-dimensional triangular finite elements were used to model the cement matrix and coarse aggregates (particles), while one-dimensional finite elements were used for steel bars (fibers). The kinematic coupling between the domains is performed by the embedded technique, which allows the generation of independent meshes for the matrix and reinforcement. The computational formulation and implementation are validated using experimental and numerical results available in the literature. The results obtained demonstrate the robustness and applicability of the model developed.

Keywords: Embedded particles, Coarse aggregate, Reinforced concrete structures, Positional FEM.

1 Introdução

O concreto é um material largamente empregado no contexto da construção civil, que associado ao aço, confere elevada resistência mecânica aos elementos estruturais. A possibilidade de produzir elementos com diversos formatos e dimensões, e o fato de aliar um baixo custo de produção com a facilidade de execução são fatores que justificam sua vasta aplicação. Em decorrência destes aspectos, surge a necessidade do desenvolvimento de ferramentas computacionais capazes de prever seu comportamento mecânico frente às ações de projeto.

Uma das teorias apresentadas na literatura para a concepção de modelos destinados à materiais quase frágeis é a da mecânica do dano contínuo. Esta abordagem trata o material como um meio contínuo, em que as descontinuidades infinitesimais decorrentes da progressão da degradação mecânica são consideradas homogêneas em um dado elemento representativo de volume. Dentre os estudos precursores, destacam-se os trabalhos de Lemaitre e Dufailly [1] e Lemaitre [2], os quais revelam que a degradação material é melhor representada por meio da quantificação das densidades dos defeitos.

O desenvolvimento da mecânica do dano contínuo ocorreu a partir da necessidade de analisar e quantificar a degradação mecânica dos materiais em função das ações de natureza mecânica ou térmica. Os primeiros estudos relacionados à área foram conduzidos por Kachanov [3], aplicando variáveis de dano contínuo. Posteriormente, almejando incorporar a redução das propriedades mecânicas, decorrentes do estado de fissuração, nas variáveis de dano, Rabotnov [4] promoveu a continuidade dos avanços nesse campo de pesquisa. Contudo, a formulação da mecânica do dano contínuo foi descrita consistentemente, com base na termodinâmica dos processos irreversíveis, somente no trabalho de Lemaitre et al. [5].

Ainda na década de 80, um modelo baseado em deformações equivalentes foi proposto por Mazars [6]. Apesar de ser considerado um modelo simplificado, é bastante eficiente e aceito no meio científico. Neste modelo os processos mecânicos de degradação contínua do material são representados por meio de uma variável de dano escalar, determinada a partir de uma deformação equivalente definida pelas deformações de alongamento.

Com o avanço dos estudos relacionados à modelagem do concreto estrutural, as análises em multiescalas vêm ganhando destaque nos centros de pesquisas [7, 8]. De acordo com Rodrigues [9], o processo de degradação mecânica observada na macroescala é diretamente influenciado pelo comportamento da estrutura interna do concreto, verificada somente em mesoescala e microescala. Portanto, a avaliação do material pode ser realizada em três níveis de observação. Ao analisar o concreto em uma escala macroscópica, suas propriedades podem ser consideradas idênticas para distintas porções do material, a qual a maioria dos modelos clássicos assume, uma vez que é a escala em que os elementos estruturais são concebidos. No nível mesoscópico, abordado neste trabalho, a estrutura da partícula desempenha papel de relevância, em que a heterogeneidade do material motiva o aparecimento de concentrações de tensões. Por último, na escala microscópica, a estrutura interna da pasta de cimento endurecido passa a assumir uma função de maior significância [10].

Neste contexto, em uma abordagem em mesoescala, o concreto é composto por três fases distintas: o agregado graúdo, a matriz cimentícia com vazios distribuídos aleatoriamente e a Zona de Transição Interfacial (ZTI), entre a matriz e os agregados. Assim, o concreto é tratado como um material compósito, sendo constituído pela combinação inteligente de materiais com propriedades mecânicas distintas, com o intuito de obter propriedades superiores aos componentes originais [11]. Particularizando para o concreto armado, o aço objetiva atenuar a deficiência do concreto com relação à resistência aos esforços de tração, enquanto o concreto exerce a função de proteger fisicamente e quimicamente o aço da ação dos agentes agressivos do meio externo, desencadeadores do processo corrosivo. O fator econômico também contribui com a aplicabilidade de materiais compósitos, em que o reforço pode desempenhar o papel de preenchimento ou a matriz pode proporcionar a aderência e proteção aos reforços.

Na modelagem numérica de materiais compósitos três abordagens se destacam na literatura, sendo elas, as técnicas de homogeneização, discretização e embutimento. A técnica de homogeneização pressupõe a uniformização das propriedades mecânicas dos materiais, sendo comumente empregada na modelagem da matriz de concreto, em que os parâmetros elásticos da argamassa, do agregado graúdo e da zona de transição são homogeneizados. Na discretização, ambos os domínios (matriz e reforço) são discretizados, sendo o acoplamento cinemático realizado por correspondência nodal direta, resultando em uma limitação na geração da malha do reforço. Por último, na abordagem via técnica de embutimento, os parâmetros nodais do reforço são escritos em função dos parâmetros nodais da matriz. Tal metodologia permite a geração de malhas independentes, ou seja, sem requerer coincidência nodal. Além disso, apresenta como vantagem o fato de não acrescentar graus de liberdade ao sistema de equações.

No sentido de contribuir com os estudos concernentes à modelagem de estruturas de concreto armado, no presente trabalho o comportamento mecânico é modelado considerando a imersão das armaduras e dos agregados graúdos por uma técnica de embutimento. Destaca-se que a zona de transição interfacial e os vazios distribuídos na matriz cimentícia são desconsiderados neste estudo. A não linearidade geométrica é considerada empregando a abordagem posicional do Método dos Elementos Finitos (MEF). A não linearidade física do concreto é abordada via mecânica do dano contínuo e o comportamento das armaduras por meio de um modelo elastoplástico unidimensional.

2 Modelagem numérica de compósitos reforçados via técnica de embutimento

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho emprega a abordagem posicional do MEF, proposto por Bonet et al. [12] e, de forma independente, Coda e Greco [13]. Esta metodologia utiliza posições e vetores generalizados como parâmetros nodais ao invés dos deslocamentos e giros usualmente empregados na versão tradicional do MEF. Sua formulação engloba naturalmente os efeitos advindos da não linearidade geométrica a partir de uma descrição Lagrangiana total, em que o referencial adotado durante toda a análise corresponde à configuração indeformada do sólido. A fim de simular materiais compósitos, a incorporação do reforço no domínio é efetuada com o auxílio de uma técnica de embutimento. O equilíbrio é determinado por meio dos princípios energéticos, em que a minimização do funcional de energia mecânica é realizada em relação às posições da matriz, do seguinte modo:

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\hat{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} \right) \cdot \delta\vec{Y} = 0, \quad (1)$$

sendo \tilde{U} , \hat{U} e \bar{U} as energias internas de deformação da matriz cimentícia, do agregado graúdo e da armadura, respectivamente, \mathbb{P} a energia potencial das forças externas e \vec{Y} o vetor das posições. Dada a arbitrariedade de $\delta\vec{Y}$, a eq. (1) é reescrita como:

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\hat{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} = \vec{F}^{int} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} = \vec{0}, \quad (2)$$

com \vec{F}^{int} , \vec{F}^{int} e \vec{F}^{int} representando as forças internas da matriz cimentícia, do agregado graúdo e da armadura, respectivamente, e \vec{F}^{ext} corresponde às forças externas.

Por se tratar de uma análise geometricamente exata, emprega-se a medida de deformação objetiva de Green, e com isso a eq. (2) descreve um sistema de equações não lineares em relação às posições, cuja solução é determinada pelo método de Newton-Raphson. Desse modo, efetuando uma expansão em série de Taylor e desconsiderando os termos de ordem quadrática ou superior, escreve-se:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = - \left(\vec{F}^{int} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} \right), \quad (3)$$

na qual o vetor $\Delta \vec{Y}$ representa a correção das posições e \mathbf{H} é a Hessiana ou matriz de rigidez tangente da estrutura, em que para forças externas conservativas, se resume na segunda derivada da energia de deformação em relação às posições, dada por:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}}. \quad (4)$$

Dessa forma, a configuração de equilíbrio é encontrada a partir de um conjunto de posições tentativas, as quais são inicialmente tomadas como sendo as posições iniciais ($\vec{Y}^t = \vec{X}$). A solução tentativa é melhorada por meio do vetor de correção, fazendo $\vec{Y}^{t+1} = \vec{Y}^t + \Delta \vec{Y}$, originando uma nova iteração. Este processo é repetido até ocorrer a convergência dos resultados, a qual é satisfeita quando $\|\Delta \vec{Y}\| / \|\vec{X}\|$ for menor que uma determinada tolerância previamente estabelecida.

Maiores detalhes referentes à formulação posicional do método dos elementos finitos podem ser consultados em Coda [14]. Também recomenda-se os textos de Paccola et al. [15] e Paccola e Coda [16] com relação à descrição da modelagem de sólidos reforçados com fibras e partículas, respectivamente.

3 Não linearidade física

A não linearidade física do concreto é considerada por meio dos conceitos da teoria da mecânica do dano contínuo, a qual é fundamentada nos princípios da mecânica do contínuo e da termodinâmica dos processos irreversíveis. Assim, a evolução do processo de degradação mecânica do concreto é atribuída à progressão da microfissuração ocasionada pelas tensões de tração, tendo em vista a baixa resistência do concreto a tais solicitações.

Neste trabalho é implementado o modelo de dano escalar proposto por Mazars [6]. Apesar de ser considerado um modelo simplificado, o mesmo é bastante difundido e aceito no meio científico, representando de forma adequada os processos mecânicos de degradação contínua do material. Desse modo, o modelo admite as seguintes hipóteses simplificadoras:

- As deformações permanentes provindas de uma possível situação de descarregamento são totalmente desprezadas;
- O dano ocorre somente por deformações que provocam alongamentos, ou seja, é necessário a existência de ao menos uma deformação positiva no tensor de deformações principais;
- O modelo de dano penaliza a rigidez do material igualmente em todas as direções, caracterizando-o como um modelo de dano isotrópico. Logo, a degradação material é representada por uma variável escalar de dano D .

A variável de dano pode assumir qualquer valor real no intervalo fechado de 0 a 1, em que $D = 0$ representa o estado de integridade material, enquanto que $D = 1$ corresponde à degradação total do elemento representativo de volume. A evolução da danificação ocorre sempre que for excedida uma dada deformação. Devido ao fato do critério de danificação ser escrito em termos de deformação, a aplicação de modelos de dano permite a determinação do trecho referente ao amolecimento (*softening*).

Desse modo, o modelo de dano de Mazars é caracterizado por assumir uma variável destinada a mensurar o estado de alongamento em um determinado ponto do contínuo. Tal variável é denominada de deformação equivalente (ε_{eq}) e corresponde à norma euclidiana das deformações de alongamento do tensor de deformações principais, sendo expressa do seguinte modo:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{(\varepsilon_1)_+^2 + (\varepsilon_2)_+^2 + (\varepsilon_3)_+^2}, \quad (5)$$

em que as variáveis $(\varepsilon_i)_+$ referem-se às componentes positivas do tensor de deformações principais.

A partir da deformação equivalente escreve-se o critério de danificação material como:

$$f(\varepsilon_{eq}, D) = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{lim}(D) > 0. \quad (6)$$

O parâmetro ε_{lim} representa a máxima deformação do histórico de deformações durante a fase de carregamento, denominada de deformação limite. No início da análise, tal deformação assume o valor da deformação associada à máxima tensão de tração do concreto (ε_{d0}).

A lei de evolução é escrita em termos das taxas de variação das deformações, conforme expresso nas eqs. (7) e (8), que são equivalentes às condições de complementariedade e consistência estabelecidas na teoria da plasticidade, ou seja, $D \cdot f = 0$ e $\dot{D} \cdot \dot{f} = 0$.

$$\dot{D} = 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \text{ e} \quad (7)$$

$$\dot{D} = F(\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq+}) \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0. \quad (8)$$

Na eq. (8) $F(\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq+})$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente, definida em função de parâmetros intrínsecos ao modelo de dano. Particularizando para os casos de tração e compressão uniaxiais, considerando uma sollicitação monotonicamente crescente, pode-se escrever de maneira explícita as variáveis de dano D_T e D_C da seguinte maneira:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}} \text{ e} \quad (9)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}}, \quad (10)$$

nas quais A_T , A_C , B_T e B_C correspondem aos parâmetros internos do modelo de dano. As variáveis D_T e D_C são definidas para os casos de carregamentos monoaxiais, no entanto é possível estender a aplicação para o caso multiaxial por meio de uma combinação linear entre seus valores, dando origem a uma única variável de dano, expressa como:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C, \quad (11)$$

em que os coeficientes α_T e α_C são calculados conforme proposto por Perego [17], sendo escritos como:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ti})_+}{\varepsilon_V^+} \text{ e } \alpha_C = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ci})_+}{\varepsilon_V^+}, \quad (12)$$

com ε_V^+ indicando a deformação volumétrica de alongamento, dada por:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i (\varepsilon_{Ti})_+ + \sum_i (\varepsilon_{Ci})_+. \quad (13)$$

O valor da variável de dano pode ser aplicado diretamente no tensor constitutivo elástico inicial do material (C), objetivando penalizar uniformemente as propriedades elásticas. Assim, as tensões efetivas são determinadas como:

$$\sigma = (1 - D) C : \varepsilon. \quad (14)$$

A danificação material foi considerada tanto na matriz cimentícia quanto nas inclusões referentes aos agregados graúdos.

O comportamento mecânico não linear físico das armaduras foi considerado a partir de um modelo elastoplástico unidimensional com encruamento isótropo linear positivo, sendo o critério de plastificação dado por:

$$f = \sigma_s - (f_y + K\alpha) < 0, \quad (15)$$

em que σ_s representa a tensão na armadura, f_y corresponde à tensão de escoamento do aço, K refere-se ao módulo plástico de encruamento e α é uma medida de deformação plástica equivalente. Desse modo, a partir do critério de plastificação definido pela função f o incremento de tensão normal na armadura é exprimido como:

$$d\sigma_s = \mathbb{E}_s d\varepsilon \text{ se } f \leq 0 \text{ e} \quad (16)$$

$$d\sigma_s = \mathbb{E}'_s d\varepsilon \text{ se } f > 0, \quad (17)$$

sendo \mathbb{E}_s o módulo de Young do aço, \mathbb{E}'_s é o módulo de Young do aço na fase de encruamento, em que para comportamento elastoplástico perfeito $\mathbb{E}'_s = 0$ e para o caso isótropo linear positivo $\mathbb{E}'_s = (\mathbb{E}_s K) / (\mathbb{E}_s + K)$.

4 Exemplo numérico

Objetivando validar a implementação do modelo desenvolvido, os próximos parágrafos destinam-se à apresentação de um exemplo numérico. A aplicação numérica visa demonstrar a viabilidade da técnica empregada na incorporação da fase particulada para a simulação dos agregados graúdos dispersos na matriz cimentícia.

O presente exemplo consiste em uma viga biapoíada com carga aplicada no centro do vão, ensaiada experimentalmente por Mazars [6]. O esquema estático e as propriedades geométricas são revelados na Fig. 1. A fim de verificar a consistência da metodologia adotada para a incorporação dos agregados graúdos, duas análises foram conduzidas. Na primeira considera-se somente a matriz de concreto e as armaduras, com as seguintes propriedades físicas: $\mathbb{E}_c = 3000 \text{ kN/cm}^2$, $\mathbb{E}_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$, $\nu_c = 0.20$, $\nu_s = 0.00$, $\varepsilon_{d0} = 1.15 \times 10^{-4}$, $A_C = 1.40$, $B_C = 1850$, $A_T = 0.80$ e $B_T = 20000$. Em uma segunda análise considera-se a matriz cimentícia com a imersão dos agregados graúdos e da armadura. Nesta última análise adotou-se $\varepsilon_{d0} = 7.63 \times 10^{-5}$ e $\mathbb{E}_m = 1990.21 \text{ kN/cm}^2$ para a matriz cimentícia e $\varepsilon_{d0} = 3.81 \times 10^{-4}$ e $E_a = 9951.05 \text{ kN/cm}^2$ para o agregado graúdo. Tais módulos de Young foram obtidos por meio de experimentações numéricas visando encontrar os módulos de elasticidade equivalentes, fixando uma proporção de $\mathbb{E}_m/\mathbb{E}_a = 0.20$. Ambas as análises foram conduzidas realizando controle de deslocamentos, mediante a aplicação de 100 passos incrementais de $\delta = -0.011 \text{ mm}$, com o intuito de se obter a trajetória de equilíbrio.

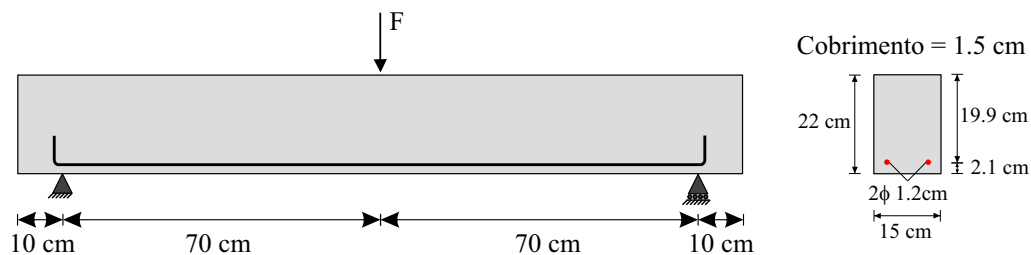


Figura 1. Propriedades geométricas do elemento estrutural

Para a discretização do domínio aproveitou-se da condição de simetria, e optou-se por uma malha estruturada composta por 3520 elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica, resultando em 16147 nós. Devido a técnica de embutimento adotada, o número de graus de liberdade do problema refere-se somente à matriz, totalizando 32294. A armadura foi discretizada por 240 elementos finitos de treliça. Para a inclusão dos elementos particulados adotou-se uma taxa volumétrica de 30% em relação à matriz cimentícia. Desse modo, foram gerados 528 agregados graúdo aleatoriamente, discretizados por 8 elementos finitos triangulares com ordem de aproximação quadrática cada. Assumiu-se agregados quadrados com 1.0 cm de lado, a fim de facilitar a geração automática da distribuição dos elementos. As dimensões adotadas resultam em uma dimensão máxima equivalente à 1.414 cm (medido diagonalmente), em que sua escolha é justificada para representar a brita 2, cujas dimensões variam entre 0.95 cm e 1.90 cm. Assim, a fase particulada composta pelos agregados graúdos foi discretizada por 4224 elementos finitos, totalizando 13200 nós. A Fig. 2 apresenta as malhas de elementos finitos e o detalhamento da discretização do agregado graúdo.

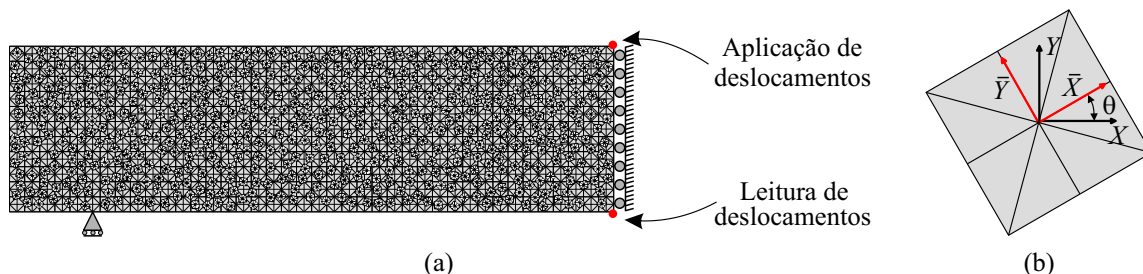


Figura 2. Discretizações adotadas: (a) viga e (b) agregado graúdo

Os resultados obtidos são comparados na Fig. 3 com os aferidos experimentalmente por Mazars [6] e numericamente por Santos [18], o qual utilizou elementos planos triangulares com aproximação linear para o concreto e elementos de treliça para a armadura, acoplados cinematicamente por coincidência nodal.

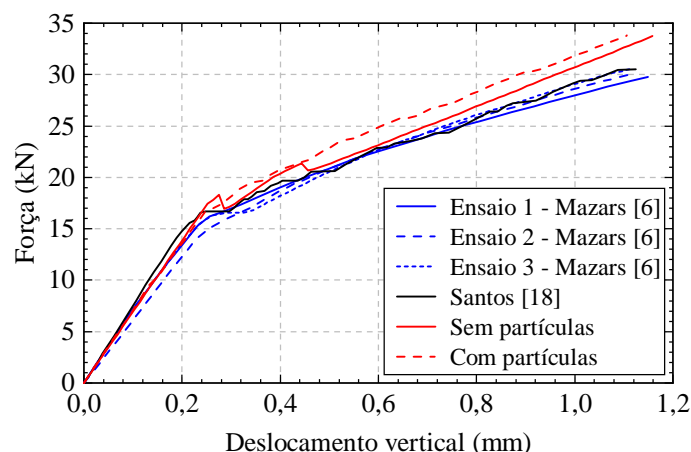


Figura 3. Deslocamentos verticais em função da força concentrada no meio do vão da viga

Nota-se que considerando as inclusões a viga apresentou níveis de cargas superiores à viga homogênea. Este fato é atribuído ao enrijecimento local proporcionado pelos elementos particulados, o qual promove o espalhamento da danificação material para as regiões vizinhas. Para visualizar tal comportamento o estado de danificação da viga para os deslocamentos equivalentes de $\delta = -0.55$ mm e $\delta = 1.10$ mm são revelados na Fig. 4.

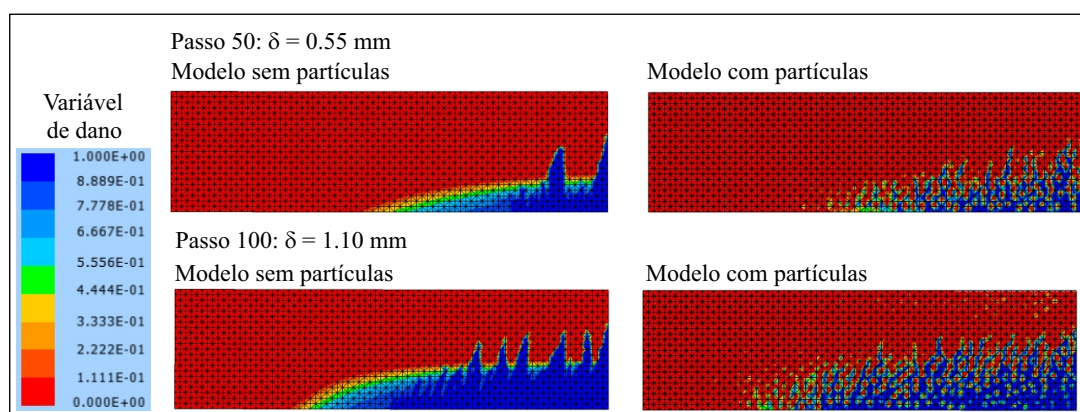


Figura 4. Mapeamento da variável de dano para as análises sem e com as inclusões

Diante dos resultados expostos, inicialmente verifica-se a adequada representação do elemento estrutural por meio do modelo de dano de Mazars. Além disso, aproveitando-se das vantagens da técnica de acoplamento utilizada, constata-se a boa representatividade da inclusão dos agregados graúdos, sendo capaz de considerar satisfatoriamente a presença de suas fases distintas.

5 Conclusões

Neste trabalho apresenta-se uma abordagem numérica para a análise de estruturas de concreto armado considerando os agregados graúdos. A técnica de embutimento empregada mostrou-se uma ferramenta poderosa na simulação das diferentes fases constituintes do concreto. O emprego de malhas independentes confere versatilidade e eficiência na geração das malhas dos reforços, especialmente dos agregados graúdos. Os resultados apontaram um aumento da força última na presença da fase particulada. Tal comportamento pode ser justificado pelo enrijecimento local promovido pelas partículas.

Por meio da variável de dano escalar do modelo de Mazars é possível verificar as zonas preferenciais de fissuração. O modelo aponta a formação de novas frentes de degradação no entorno dos agregados, indicando a ocorrência de possíveis fissuras na interface entre o agregado graúdo e a matriz cimentícia.

Portanto, devido às vantagens da técnica de embutimento, o modelo mostrou-se adequado para a simulação do comportamento mecânico do concreto considerando os agregados graúdos e a armadura imersas na matriz cimentícia. Por fim, os resultados evidenciaram a aplicabilidade e a potencialidade do modelo desenvolvido na simulação de estruturas de concreto armado.

Agradecimentos. Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo nº 140996/2020-6, pelo fomento oferecido à pesquisa.

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são as únicas pessoas responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte do presente artigo é de propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para serem incluídos aqui.

Referências

- [1] Lemaitre, J. & Dufailly, J., 1987. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 28, n. 5-6, pp. 643–661.
- [2] Lemaitre, J., 1992. *A course on Damage Mechanics*. Springer Science & Business Media, Berlin.
- [3] Kachanov, L. M., 1958. On the time to failure under creep conditions, *izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk*, vol. 8, n. 26-31, pp. 8.
- [4] Rabotnov, Y. N., 1969. *Creep problems in structural members*. North-Holland, Amsterdam.
- [5] Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., & Germain, P., 1985. *Mécanique des matériaux solides*, volume 2. Dunod Paris.
- [6] Mazars, J., 1984. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD thesis, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris.
- [7] Unger, J. F. & Eckardt, S., 2011. Multiscale modeling of concrete. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 18, n. 3, pp. 341.
- [8] Nguyen, V. P., Lloberas-Valls, O., Stroeven, M., & Sluys, L. J., 2011. Homogenization-based multiscale crack modelling: from micro-diffusive damage to macro-cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n. 9-12, pp. 1220–1236.
- [9] Rodrigues, E. A., 2015. *Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto*. PhD thesis, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola de Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [10] Van Mier, J. G. M., 1997. *Fracture processes of concrete: assessment of material parameters for fracture models*. CRC Press.
- [11] Schaffer, J. P., Saxena, A., Antolovich, S. D., Sanders Jr., T. H., & Warner, S. B., 1999. *The Science and Design of Engineering Materials*. McGraw-Hill, 2 edition.
- [12] Bonet, J., Wood, R., Mahaney, J., & Heywood, P., 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n. 5, pp. 579–595.
- [13] Coda, H. B. & Greco, M., 2004. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 33-35, pp. 3541–3557.
- [14] Coda, H. B., 2018. *O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica*. São Carlos: EESC/USP.
- [15] Paccola, R. R., Piedade Neto, D., & Coda, H. B., 2015. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. *Composite Structures*, vol. 133, pp. 343–357.
- [16] Paccola, R. R. & Coda, H. B., 2016. A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids. *Composite Structures*, vol. 141, pp. 282–291.
- [17] Perego, M., 1989. *Damage of brittle materials: Constitutive models, analysis by finite element method and applications*. PhD thesis.
- [18] Santos, S. B. S., 2015. *Aplicação de um modelo de dano isotrópico escalar na análise de estruturas de concreto armado*. Master's thesis, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.