

# Mesoscale analysis of crack propagation in reinforced concrete via positional FEM using interface elements

Wellington H. Vieira<sup>1</sup>, Rodrigo R. Paccola<sup>1</sup>, Humberto B. Coda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>São Carlos School of Engineering, University of São Paulo  
Av Trabalhador São Carlense, 400, 13560-590 São Carlos, SP, Brazil  
wvieira@usp.br, rpaccola@sc.usp.br, hbcoda@sc.usp.br

## Abstract.

This work presents an alternative of mesoscale analysis of propagation of cracks in conventional reinforced concrete structures. The equilibrium of the structure was achieved through the position-based formulation of the Finite Element Method (FEM), which is naturally non-linear geometric. For mesoscale representation, the concrete was considered a heterogeneous material composed of the matrix (mortar), the coarse aggregate and the interfacial transition zone (ITZ). The rebar was represented by truss elements without adding degrees of freedom to the problem. To represent the beginning and propagation of cracks, interface elements were created between the matrix elements and between matrix and aggregate. The results obtained were compared with an experimental work from the literature, for the crack path and for the load-displacement curve. It was possible to show results close to the real ones, without using overly complex techniques.

**Keywords:** Crack Propagation, Reinforced Concrete, Mesoscale, Finite Element Method

## 1 Introdução

A resistência mecânica do concreto à tração é bem menor que à compressão, logo para o melhor aproveitamento da capacidade de resistência à compressão deve ser reforçado nas regiões tracionadas, se destacando o concreto armado. Nesse tipo de estrutura a fissuração do concreto é o principal mecanismo de deterioração, podendo causar desconforto visual ao usuário, reduzir a vida útil ou levar ao colapso. A fissuração vista na macroescala é explicada pela heterogeneidade do material vista na mesoescala, representada pela matriz, os agregados graúdos e a zona de transição interfacial (ZTI), que é o elo mais fraco e onde se inicia a degradação. Nessa escala é possível relacionar a heterogeneidade do material com a geometria da fissura, dando a ela significado físico [1], permitindo obter respostas complexas como localização das fissuras nos trechos menos resistentes, os efeitos do tamanho da peça na resistência e a natureza estocástica do fenômeno, mesmo com o uso de modelos constitutivos simples para cada componente do material [2].

Os primeiros trabalhos numéricos para análise de fissuras em concreto armado são os de Ngo e Scordelis [3] que propuseram um modelo de fissura discreta e de Rashid [4] através de um modelo de fissura distribuída. Os modelos que vieram após esses, usam uma dessas estratégias combinadas com conceitos da mecânica da fratura, da teoria da plasticidade ou da mecânica do dano contínuo para representar a fissuração. Na modelagem em mesoescala as estratégias são divididas quanto a forma de representar o domínio, se destacando o uso de modelos discretos e o uso dos elementos contínuos com o Método dos Elementos Finitos (MEF). No primeiro caso se destaca o *Lattice Model*, bastante explorado em concreto simples e usado recentemente por Aydin et al. [5] para representar o concreto armado considerando uma matriz homogênea, o aço e a interface entre os dois. Usando o MEF vem se destacando os modelos que representam as fissuras usando elementos de interface. Para elementos de espessura nula combinados com modelos coesivos contribuíram López et al. [1], e usando elementos de interface de alta relação de aspecto com degradação explicada por um modelo de dano à tração, contribuíram Rodrigues et al. [6]. Ambos representaram o material de forma heterogênea porém restritos a estruturas de concretos simples.

Para a simulação de estruturas de concreto armado os principais pontos a se preocupar são a representação adequada da armadura e a sua ligação com a matriz. A ligação pode ser rígida ou utilizar um modelo que permite representar o deslocamento relativo entre a armadura e o concreto. O segundo tipo leva a resultados mais próximos dos reais, mas o primeiro em casos em que a falha não ocorre por escorregamento da armadura também pode

ser eficiente. Estudos com as duas estratégias podem ser encontrados em Bitencourt et al. [7]. Usando o MEF, a armadura pode ser representada detalhando toda sua geometria, por elementos unidimensionais ou de forma implícita usados conceitos de homogeneização. O primeiro caso possui custo computacional alto, sendo pouco usado, e o terceiro é adequado para representação de estruturas com armadura distribuída em todo o domínio e com aderência perfeita. Casos gerais podem ser bem representados pelo uso de elementos unidimensionais representados por barras discretas ou inseridas dentro dos elementos. No primeiro caso contribuem diretamente na matriz de rigidez do problema, mas o inconveniente é que a malha do concreto se torna dependente da posição da armadura. No segundo caso as barras contribuem para a rigidez dos elementos em que estão inseridas, e em casos de aderência perfeita não acrescentam graus de liberdade ao problema. É a opção mais interessante para uso com o MEF pois os elementos da armadura não dependem da malha de concreto [7].

Quando o concreto armado fatura podem ser observados deslocamentos ou giros que fazem com que o equilíbrio da configuração atual do corpo não seja aproximadamente igual à configuração inicial. Nessas condições, para obtenção de resultados próximos dos reais, a simulação deve considerar a não linearidade geométrica (NLG) do problema. Modelando cantoneiras de concreto armado submetidas a momentos negativos e positivos, Rabczuk et al. [8] observaram giros importantes e concluíram que é fundamental o uso de NLG nesse tipo de problema.

Nesse trabalho é proposta uma estratégia para análise da fissuração de estruturas de concreto armado que considera a heterogeneidade do material em mesoescala e a NLG do problema. Tendo por objetivo a busca por curvas força-deslocamento e padrões de fissuras próximos aos experimentais. O equilíbrio da estrutura foi alcançado através da formulação baseada em posições do Método dos Elementos Finitos (MEF), que é naturalmente não linear geométrica. As armaduras são representadas com aderência perfeita à matriz por elementos de treliça que não acrescentam graus de liberdade ao problema. A propagação de fissura ocorre através de elementos de interface de alta relação de aspecto apresentados em Manzoli et al. [9], posicionados entre elementos de matriz e entre elementos de matriz e agregado com degradação explicada por um modelo de dano compatível. Por fim a estratégia implementada é aplicada ao ensaio de uma viga em flexão para validar os resultados e verificar sua robustez.

## 2 Modelo mesoescala proposto para o concreto

Na mesoescala o concreto foi representado pela argamassa, a ZTI e os agregados graúdos. Para obter a malha adequada foram inicialmente geradas as geometrias dos agregados graúdos, e criada uma malha regular de elementos triangulares com propriedades mecânicas de agregado e argamassa. A ZTI e as interfaces entre os elementos de argamassa foram obtidas fragmentando a malha gerada. Não foram representadas interfaces para propagação de fissura dentro dos agregados pois em concreto convencional geralmente esses elementos são mais resistentes e permanecem intactos, de modo que apenas acrescentariam graus de liberdade desnecessários.

### 2.1 Modelagem do agregado graúdo

Para distribuição dos agregados em mesoescala, foram gerados aleatoriamente usando a estratégia apresentada em Wriggers e Mofattah [10] e usada em Rodrigues et al. [6]. O código desenvolvido é capaz de gerar agregados com a forma de polígonos regulares com diferentes números de lados. Para a definição da dimensão de cada agregado, é utilizada curva de Fuller e Thompson [11].

### 2.2 Técnica de fragmentação de malha

Para a criação dos elementos de interface, é utilizada a técnica de fragmentação de malha apresentada em Manzoli et al. [9], dividida em 3 passos principais. O Passo 1 consiste na geração da malha regular para toda a amostra. O Passo 2 consiste em reduzir as dimensões de todos os elementos deixando um espaço vazio entre eles para o posicionamento dos elementos de interface. Por fim, no Passo 3 são inseridos os elementos de interface nesses espaços. Nesse trabalho a estratégia para reduzir a dimensão dos elementos depende da posição deles. Primeiramente define-se um ponto de referência que deve permanecer fixo. Para elementos centrais esse ponto é no baricentro do triângulo. Para elementos em que um dos lados é uma borda, esse ponto é o ponto médio do segmento que define esse lado. Caso dois lados sejam borda, o ponto adotado é o vértice comum entre eles. Essa estratégia garante a manutenção o contorno externo da geometria após a fragmentação. A intensidade da redução dos elementos é obtida alterando o comprimento dos segmentos que ligam o ponto de referência aos vértices.

Os elementos de interface são elementos de alta relação de aspecto. Manzoli et al. [9] mostraram que quando a menor altura desses triângulos se aproxima de zero, eles são adequados para representar descontinuidades. Isso ocorre pois o comportamento observado é o mesmo da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)

apresentada em Oliver et al. [12], logo podem ser aplicados para a resolução dos mesmos tipos de problemas. Entre eles o surgimento e caminharmento de fissuras. Neste trabalho a altura dos elementos de interface são da ordem de pelo menos 10 vezes menor que o maior lado.

### 3 MEF posicional

O Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) é uma versão naturalmente não linear geométrica do MEF em que as incógnitas são as coordenadas dos nós dos elementos ao invés dos deslocamentos usados no método clássico. Iniciou nos trabalhos de Bonet et al. [13], que usaram posições como incógnitas e Coda e Greco [14] que idealizaram o método e aplicaram a elementos de pórtico plano.

O MEFP é deduzido com base no princípio da estacionariedade da energia mecânica, considerando a variação de posições. Esse princípio estabelece que na situação de equilíbrio do corpo a primeira variação da energia mecânica é nula. Esse trabalho é restrito a problemas estáticos, de modo que a energia mecânica é composta pelas parcelas da energia potencial das forças externas e energia de deformação. A primeira variação posicional dessas parcelas representam respectivamente os vetores de forças externas e internas. O vetor de forças internas não é obtido de uma relação linear entre a matriz de rigidez e as posições nodais, então é utilizado o método de Newton-Raphson para a solução iterativa do problema. Nele é necessário conhecer previamente a posição inicial e atual do corpo, onde esse última é conhecida por tentativa. Para uso da técnica é necessário calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente para cada tentativa. Esses termos são obtidos integrando derivadas da energia específica de deformação, e dependem do modelo constitutivo e do tipo de elemento utilizado.

Os elementos utilizados neste trabalho são sólidos  $2D$  e treliças de aproximação linear. A forma de calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente destes elementos é detalhada em Coda [15]. O modelo constitutivo utilizado foi o de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), cuja energia específica de deformação é dada por

$$\Psi(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathfrak{C}_{kl ij} E_{ij}, \quad (1)$$

onde  $E$  é a deformação de Green e  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo elástico. Esse modelo é adequado para descrever o comportamento de materiais que apresentam grandes deslocamentos e deformações moderadas.

#### 3.1 Acoplamento cinemático fibra-matriz

A estratégia utilizada permite a representação de fibras com aderência perfeita sem acréscimo de graus de liberdade ao problema e sem necessidade de coincidência de nós dos elementos da matriz e das fibras. O conceito foi apresentado em Vanalli et al. [16], e sua formulação não linear geométrica e a forma de implementação numérica em Sampaio et al. [17].

A técnica consiste em representar as posições nodais dos elementos das fibras usando as funções de forma dos elementos da matriz. Para isso é necessário determinar as coordenadas adimensionais dos nós dos elementos das fibras dentro dos elementos da matriz aos quais estão sobrepostos na configuração inicial. As coordenadas adimensionais não são conhecidas, mas podem ser determinadas para cada nó resolvendo um sistema de equações não linear de forma iterativa usando o método de Newton-Raphson, que apresenta respostas acuradas e convergência rápida. Uma vez determinadas essas coordenadas, todas as informações nodais dos elementos das fibras são escritas em função das coordenadas dos nós da matriz. As deduções apresentadas em Sampaio et al. [17] permitem concluir que a força interna e a matriz de rigidez tangente das fibras podem ser calculadas em função de seus próprios nós e depois disso distribuídas pelos nós dos elementos da matriz ponderadas pelas funções de forma aplicadas ao ponto adimensional de cada nó da fibra. Com isso o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente globais são obtidos somando os valores obtidos para os elementos da matriz com os das fibras assim distribuídos. Conhecendo esses termos o problema pode ser resolvido.

### 4 Modelo de dano à tração

A degradação é explicada por um modelo de dano à tração utilizado por Manzoli et al. [9], mas como o concreto apresenta o processo de falha governado por esforços dessa natureza, esse modelo leva a bons resultados. O critério para existência de dano  $\phi$  é dado por

$$\phi = \sigma_{nn} - q(r) \leq 0, \quad (2)$$

onde  $\sigma_{nn}$  é a tensão de Cauchy normal à base maior do elemento de interface,  $q$  e  $r$  são variáveis internas do tipo tensão e deformação respectivamente. A função  $q(r)$  é a lei de amolecimento (*softening*). Dividindo todos os

termos de  $\phi$  por  $(1 - d)$ , o critério de dano para a tensão efetiva é dado por

$$\bar{\phi} = \bar{\sigma}_{nn} - r \leq 0, \quad (3)$$

onde se fez  $(r = q/(1 - d))$  para controle do domínio elástico no espaço das deformações efetivas. Isolando  $d$ , a variável de dano é dada por

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r}. \quad (4)$$

Na evoluções do dano, nas condições de carregamento e descarregamento deve-se respeitar as relações de Kuhn–Tucker dadas por

$$\bar{\phi} \leq 0, \dot{r} \geq 0 \text{ e } \dot{r}\bar{\phi} = 0, \quad (5)$$

onde  $\dot{r}$  é a taxa de variação de  $r$  ao longo do tempo. Para garantir a condição de consistência

$$\dot{r}\bar{\phi} = 0 \text{ se } \bar{\phi} = 0. \quad (6)$$

Dessas condições, chega-se que para um pseudo-tempo  $t$  associado ao processo de carregamento, a variável  $r$  é sempre dada pelo maior valor entre  $\bar{\sigma}_{nn}$  até aquele momento e o valor inicial do processo  $r_0$  dado pela resistência à tração  $f_t$  do material. Podendo ser escrita como

$$r = \max(\bar{\sigma}_{nn}(s), r_0) \mid s \in [0, t]. \quad (7)$$

Para representar o amolecimento escolheu-se a mesma lei exponencial já utilizada com sucesso por Rodrigues et al. [6] para concreto em mesoescala. É dada por

$$q(r) = f_t \exp\left(\frac{f_t^2}{G_f \mathbb{E}} h(1 - r/f_t)\right), \quad (8)$$

onde  $h$  é a menor altura do elemento de interface,  $G_f$  é a energia de fratura para o modo I, e  $\mathbb{E}$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

O algoritmo para implementação de dano é adaptado da versão utilizada por Manzoli et al. [9] e trata-se do algoritmo de integração implícito-explícito (IMPL-EX) desenvolvido em Oliver et al. [18]. A diferença para o algoritmo de referência é o uso do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green ao invés do tensor de tensões de Cauchy e a deformação de engenharia.

## 5 Exemplo numérico

### 5.1 Ensaio de flexão em quatro pontos

Os resultados obtidos com o código desenvolvido foram comparados com os experimentais de Álvares [19] em ensaios de flexão em quatro pontos de vigas armadas com três diferentes quantidades de aço. Na Fig. 1 (a) é mostrada a configuração do ensaio. Como a viga e o carregamento são simétricos, buscando a economia de tempo computacional, as simulações realizadas consideraram apenas a metade da estrutura, como apresentada na Fig. 1 (b), que destaca as condições de contorno usadas e as dimensões em *mm* da amostra. As seções transversais de cada modelo analisado, chamados viga pouco armada, normalmente armada e super armada são apresentadas respectivamente na Fig. 1 (c), (d) e (e), onde a única diferença entre elas é a quantidade de armadura longitudinal positiva. As análises realizadas consideraram o estado plano de tensão e utilizaram controle de deslocamento.

O estudo experimental possui informações de propriedades mecânicas apenas do material concreto e não foi medido o valor da energia de fratura  $G_f$ . Então para realizar a simulação do material em mesoescala foram feitas algumas simplificações. Inicialmente buscou-se estimar o valor de  $G_f$  do concreto experimentado. Para isso a viga foi representada em macroescala e variou-se o valor de  $G_f$  em diferentes análises numéricas mantendo constante as demais propriedades até a obtenção, para um mesmo valor de  $G_f$ , de curvas próximas das experimentais para os três casos analisados. Nessas análises o concreto foi representado com módulo de elasticidade  $\mathbb{E} = 29200MPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$  e os elementos de interface com  $\mathbb{E} = 29200MPa$ ,  $\nu = 0.00$  e resistência a tração do concreto de  $f_t = 2.04MPa$ . O aço foi representado com comportamento elástico perfeito e  $\mathbb{E} = 196000MPa$ . Foram criados 34888 elementos triangulares de 3 nós sendo 26086 para representar as interfaces. O aço foi representado por elementos de treliça de aproximação linear posicionados no centro de gravidade de cada barra que representa, com uso de elementos de 13*mm* de comprimento para representar toda a armadura. Para as vigas pouco armada, normalmente armada e super armada foram utilizados respectivamente 400, 500 e 600 elementos. Essas informações sobre o aço se mantiveram em todos os estudos realizados nesse trabalho.

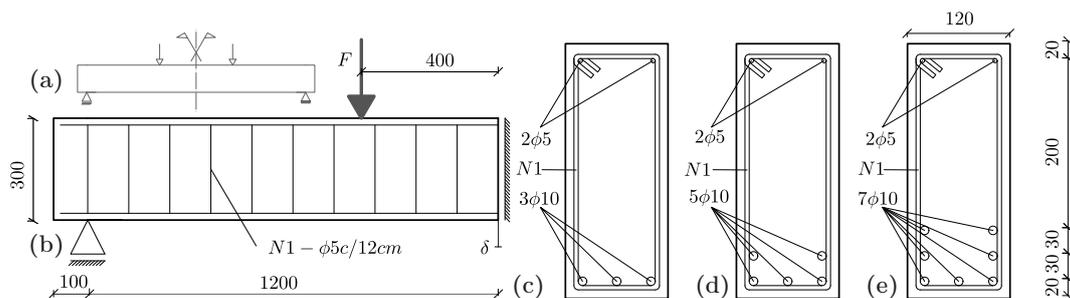


Figura 1. Geometrias e condições de contorno dos ensaios

Na Fig. 2 (a), (b) e (c) foi usado o valor de  $G_f = 0.10 MPa/mm$  para a macroescala. Esse valor está na faixa esperada para o concreto, como pode ser visto em Bitencourt et al. [7] e Sciegaj et al. [20], e é possível ver que foram obtidos bons resultados, por isso esse foi o valor adotado. As curvas experimentais possuem duas mudanças de inclinação, a primeira representa o início da degradação do concreto e a segunda a plastificação do aço. Como o modelo constitutivo utilizado para o aço não considera plastificação, além deste segundo ponto a curva numérica não é adequada e não faz sentido estender a análise. Essas curvas relacionam a força vertical de reação  $F$  no ponto em que se aplica o deslocamento com o deslocamento  $\delta$  observado na borda inferior no ponto central da viga.

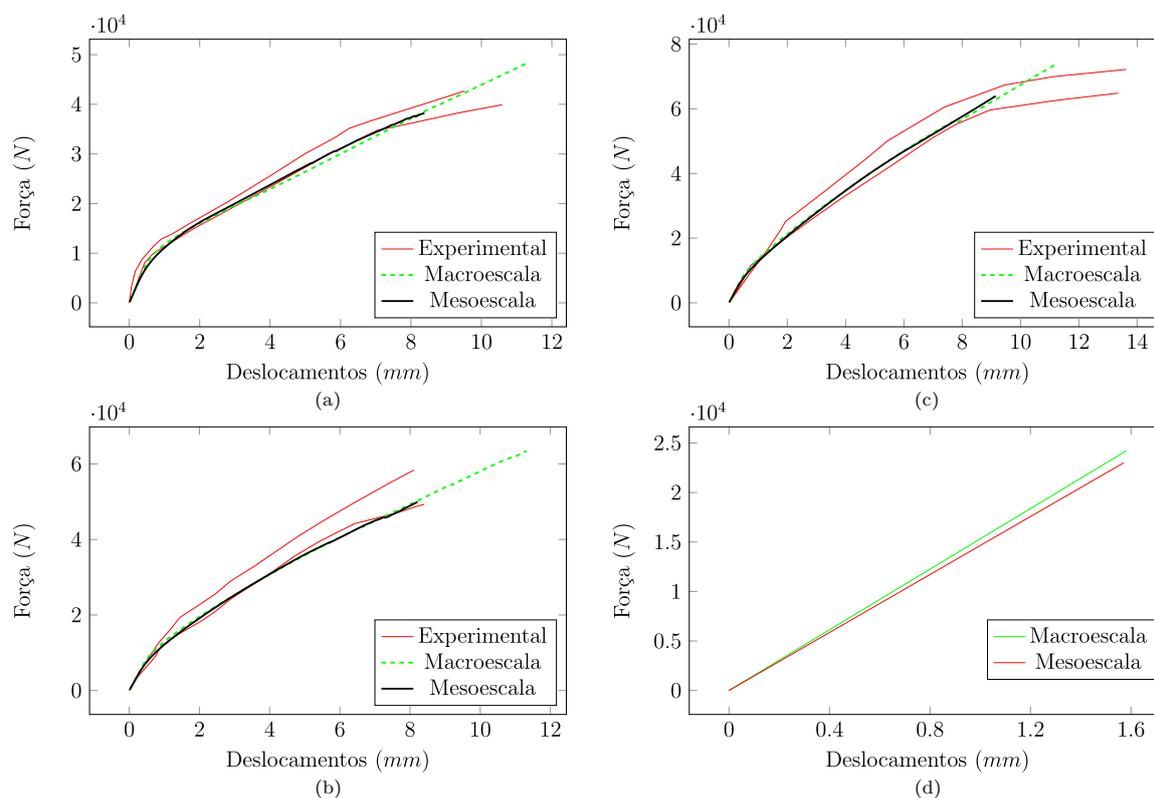


Figura 2. Gráficos Força-deslocamento obtidos para viga pouco armada (a), normalmente armada (b), super armada (c) e diferença de resultados entre escalas (d)

Para a representação do concreto em mesoescala a estrutura heterogênea foi obtida considerando que 40% do volume da amostra é composta por agregados graúdos, gerados usando a curva de Fuller com  $n = 0.50$ ,  $d_{max} = 19mm$  e  $d_{min} = 4.80mm$ , divididos em quatro intervalos definidos pelas peneiras da série normal e intermediária. Foram gerados agregados em forma de polígonos regulares com 5, 6, 7 e 8 lados. Para a determinação das propriedades mecânicas e de fratura de cada componente, iniciou-se adotando que o agregado usado é granito e possui  $E = 55300 MPa$  e  $\nu = 0.16$ , valores determinados por Lee et al. [21]. Com esses valores e os do concreto anteriormente descritos, tais propriedades para a argamassa foram obtidas usando a regra das misturas para

40% em volume de agregado através do modelo em paralelo de Counto [22], resultando em  $E = 19150MPa$  e  $\nu = 0.23$ . Para os elementos de interface foram adotados o mesmo módulo de elasticidade da argamassa e coeficiente de Poisson nulo. De acordo com Zimbelmann [23] a resistência da ZTI é da ordem da metade da resistência da argamassa. Por isso os parâmetros  $f_t$  e  $G_f$  das interfaces matriz-matriz e da ZTI foram adotados com uma relação 2 : 1. Para a determinação dos seus valores considerou-se que 40% das interfaces tem propriedade de ZTI, e que a média de cada um desses parâmetros resulta nos dados do concreto em macroescala, que são  $f_t = 2.04MPa$  e  $G_f = 0.10MPa/mm$ . Dessa forma para a ZTI se obteve  $f_t = 1.28MPa$  e  $G_f = 0.06MPa/mm$  e para a interface matriz-matriz  $f_t = 2.55MPa$  e  $G_f = 0.13MPa/mm$ . Foram criados 301754 elementos triangulares de 3 nós sendo 200612 para representar as interfaces.

Também são apresentados na Fig. 2 (a), (b) e (c), os resultados obtidos para a estrutura em mesoescala. É possível ver que em todos os casos a curva obtida se aproximou dos resultados experimentais e dos obtidos em simulação na macroescala. O que sugere que a técnica numérica usada conseguiu representar adequadamente o fenômeno e as estratégias utilizadas para obtenção de parâmetros são razoáveis. As simplificações nos parâmetros fizeram com que a rigidez dos modelos em cada escala estudada fossem diferentes. Para estimar esta diferença na Fig. 2 (d) é possível ver as forças resultantes obtidas para cada uma delas no mesmo exemplo já estudado, porém mantendo o comportamento dos materiais elástico e sem uso de armadura. Para um mesmo deslocamento a diferença de resultados obtidos para a força resultante foi da ordem de 5%, que é um valor baixo.

A Fig. 3 apresenta o padrão das aberturas de fissuras obtidas para um mesmo deslocamento prescrito para os casos analisados na macroescala e mesoescala. Nas duas escalas as aberturas são múltiplas e se tornam mais difusas com a aumento da área de aço, como destacado por Álvares [19]. Na representação em mesoescala as

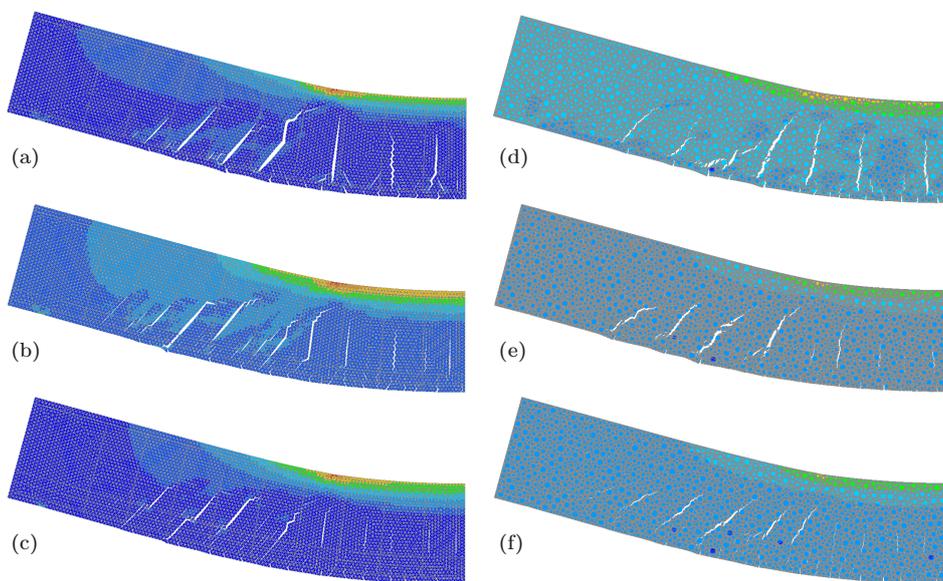


Figura 3. Padrões de fissuras obtidos para viga pouco armada (a), normalmente armada (b) e super armada (c) em macroescala e para viga pouco armada (d), normalmente armada (e) e super armada (f) em mesoescala

fissuras apresentam um comportamento com menor influência da malha e a heterogeneidade do concreto fez com que apresentassem padrões mais próximos dos reais.

## 6 Conclusões

Nesse trabalho foram unidas uma estratégia de análise de concreto em mesoescala com uma de representação de fibras sem aumento de graus de liberdade para simular concreto armado. Essa união mostrou-se eficiente na determinação de curvas força-deslocamento e na obtenção do padrão de fissuras. Os resultados foram obtidos em apenas uma estrutura e com parâmetros aproximados, sendo importante uma investigação mais ampla para melhor compreensão do método. Entretanto os resultados obtidos são positivos.

**Agradecimentos.** Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

## Referências

- [1] López, C. M., Carol, I., & Aguado, A., 2008. Meso-structural study of concrete fracture using interface elements . I : numerical model and tensile behavior. *Materials and Structures*, vol. 41, pp. 583–599.
- [2] Unger, J. F. & Eckardt, S., 2011. Multiscale Modeling of Concrete. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 18, n. 3, pp. 341.
- [3] Ngo, D. & Scordelis, A. C., 1967. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *ACI Journal*, vol. 64, n. 3, pp. 152–163.
- [4] Rashid, Y. R., 1968. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear engineering and design*, vol. 7, pp. 334–344.
- [5] Aydin, B. B., Tuncay, K., & Binici, B., 2019. Simulation of Reinforced Concrete Member Response Using Lattice Model. *Journal of Structural Engineering*, vol. 145, n. 9, pp. 1–17.
- [6] Rodrigues, E. A., Manzoli, O. L., Bitencourt Jr., L. A., & Bittencourt, T. N., 2016. 2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94-95, pp. 112–124.
- [7] Bitencourt, L. A. G., Manzoli, O. L., Trindade, Y. T., Rodrigues, E. A., & Dias-da costa, D., 2018. Modeling reinforced concrete structures using coupling finite elements for discrete representation of reinforcements. *Finite Elements in Analysis & Design*, vol. 149, pp. 32–44.
- [8] Rabczuk, T., Zi, G., Bordas, S., & Nguyen-Xuan, H., 2008. A geometrically non-linear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, pp. 4740–4758.
- [9] Manzoli, O. L., Maedo, M. A., Bitencourt, L. A., & Rodrigues, E. A., 2016. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 153, pp. 151–170.
- [10] Wriggers, P. & Moftah, S., 2006. Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, n. 7, pp. 623–636.
- [11] Fuller, W. & Thompson, S., 1907. The laws of proportioning concrete. *Asian J. Civil Eng. Transp.*
- [12] Oliver, J., Cervera, M., & Manzoli, O., 1999. Strong discontinuities and continuum plasticity models : the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, pp. 319–351.
- [13] Bonet, J., Wood, R. D., Mahaney, J., & Heywood, P., 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n. 5-7, pp. 579–595.
- [14] Coda, H. & Greco, M., 2004. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 33-35, pp. 3541–3557.
- [15] Coda, H. B., 2018. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos Posicionais: Sólidos e Estruturas-Não Linearidade Geométrica e Dinâmica*. EESC-USP, São Carlos.
- [16] Vanalli, L., Paccola, R. R., & Coda, H. B., 2008. A simple way to introduce fibers into FEM models. *Commun. Numer. Meth. Engng*, vol. 24, pp. 585–603.
- [17] Sampaio, M. S., Paccola, R. R., & Coda, H. B., 2013. Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 66, pp. 12–25.
- [18] Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S., & Linero, D. L., 2006. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 7093–7114.
- [19] Álvares, M. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos. Master's thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- [20] Sciegaj, A., Larsson, F., Lundgren, K., Nilenius, F., & Runesson, K., 2019. A multiscale model for reinforced concrete with macroscopic variation of reinforcement slip. *Computational Mechanics*, vol. 63, n. 2, pp. 139–158.
- [21] Lee, K. M., Buyukozturk, O., & Oumera, A., 1993. Fracture analysis of mortar-aggregate interfaces in concrete. *J. Eng. Mech.*, vol. 118, n. 10, pp. 2031–2046.
- [22] Counto, U. J., 1964. The effect of the elastic modulus of the aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete. *Magazine of Concrete Research*, vol. 16, n. 48, pp. 129–138.
- [23] Zimbelmann, R., 1985. A contribution to the problem of cement-aggregate bond. *Cement and concrete research*, vol. 15, pp. 801–808.