

Aplicação dos Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Protendido

Jordana F. Vieira¹, Raul D. Durand Fáfán¹

¹*Dept. of Civil Engineering, University of Brasília*

Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília/DF, Brasil

jordanaferreirav@gmail.com, raul.durand@gmail.com

Abstract. This article deals with the application of the semi-embedded method in prestressed concrete beams in modeling based on the Finite Element Method. In the case of prestressed concrete structures, their computational representation must consider the heterogeneity of the materials that constitute the structure and the way these materials interact. Thus, the objective of this paper is to present the formulation of the semi-embedded method used as an alternative for the numerical simulation of prestressed concrete beams and apply the formulation in a simply supported beam with available experimental data. In the semi-embedded method, unlike the other methods, the reinforcement is discretized into bar elements and thus, the boundary conditions can be applied to each bar node, allowing a more realistic approach. Three analysis for different concrete models were performed using the Mazars model, Drucker-Prager model, and the Damage model. In the comparison, it is noted that the numerical results are fairly agree with the experimental data, thus concluding that it is possible to represent prestressing in concrete beams using the semi-embedded method.

Keywords: Semi-embedded method, computational modeling, prestressed concrete structures, finite element method.

1 Introdução

Ao longo dos anos, modelos numéricos são desenvolvidos para representar o comportamento mecânico não linear de diferentes tipos de estruturas. Os métodos computacionais começaram a ser utilizados com frequência devido aos grandes benefícios oferecidos na solução de modelos matemáticos. Com o estudo numérico, em uma análise preliminar, é possível visualizar o sistema e fazer diferentes interpretações gráficas do comportamento da estrutura. Aliado ao avanço da tecnologia, softwares específicos de análise estrutural estão cada vez mais difundidos, facilitando o estudo numérico do comportamento de diferentes estruturas. Com isso, modelos mais refinados de cálculo podem ser implementados com a finalidade de visualizar numericamente a realidade das estruturas a serem edificadas. Considerando o concreto protendido e armado como materiais de estudo, entre os métodos utilizados para estudar o comportamento mecânico deste tipo de estrutura, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais empregados, devido a versatilidade apresentada para modelar geometrias complexas, materiais heterogêneos e não lineares.

Durand [1] propôs o método semi-embutido, desenvolvido a partir da combinação dos métodos discreto e embutido, com a consideração da interface entre os materiais e do contato. Nele, é permitido que os elementos da armadura transpassem livremente os elementos que representam o concreto, admitindo agora, conhecer as características do comportamento mecânico das barras de aço, independentemente do concreto. A aplicação inicial

deste método foi dada para analisar reforços em solos, e nos últimos anos, diversas pesquisas foram desenvolvidas utilizando o método semi-embutido aplicado as estruturas de concreto armado. Nos trabalhos de Del Rio [2], Rosales [3], Silva [4], Faria [5] e Rosero [6] aplicou-se o método em estruturas de concreto armado considerando diferentes hipóteses de simulação. Como resultado dessas pesquisas, o programa de elementos finitos Amaru foi desenvolvido, em linguagem de programação Julia ®, e vem sendo aprimorado através das pesquisas realizadas para a implementação do método em diferentes tipos de estrutura.

Como se trata de um método que permite simular a interface entre o aço e o concreto nas estruturas de concreto armado, como continuidade de Durand [1], o presente trabalho pretende aplicar o método no comportamento de estruturas de concreto protendido via MEF, utilizando o programa Amaru, desenvolvido em Julia. Para tanto, realizou-se primeiramente uma revisão da literatura, com o intuito de levantar os trabalhos mais relevantes que englobam temas associados a esta pesquisa. Por conseguinte, apresentou-se o princípio geral da formulação do método semi-embutido, indicando os principais pontos e o que se apresenta de vantagem em relação aos outros métodos já consolidados. Em um último momento, nas análises numéricas, aplicou-se o modelo semi-embutido para uma viga de concreto protendido, modelada experimentalmente por Tao e Du [7].

2 Breve histórico

Em 1989, Martins [8] propôs um método computacional, implementando no programa CARPE, para calcular vigas isostáticas com protensão mista. Este método considera a contribuição do concreto tracionado na rigidez das peças ("tension stiffening") inclusive quando há variação de aderência entre o aço e o concreto. Sequenciando os estudos de Martins [8], Désir [9] implementa a proposta de um modelo hiperestático de vigas com protensão externa. König & Qian [10] implementaram um modelo em elementos finitos para a análise estrutural estática e dinâmica de vigas armadas e protendidas, considerando a não-linearidade do material, efeitos de cisalhamento e a resistência do concreto entre fissuras sucessivas. Outro modelo numérico presente nas literaturas é o NAPCCB, proposto por Kodur & Campbell [11], o qual é baseado em uma formulação utilizando um modelo de elemento finito macroscópico, com o intuito de analisar vigas de concreto armado, parcial ou totalmente protendidas. Posteriormente, Rabczuk & Eibl [12] utilizaram elementos finitos para simular a ruptura de vigas protendidas, onde o problema é tratado linearmente pelo método de Garlekin.

Lou e Xiang [13] apresentaram uma modelagem numérica do comportamento à flexão de vigas contínuas de concreto com protensão externa, incluindo características de carga-deflexão, aumento de tensão nos fios externos, redistribuição de momento, momentos secundários e o efeito do tempo a longo prazo na análise não linear. O concreto foi modelado a partir de uma adaptação do modelo apresentado em Hognestad [14] e o aço da protensão por um modelo proposto por Menegotto e Pinto [15]. Posteriormente, os autores Lou et al. [16] também aplicaram sua formulação numérica para vigas com protensão interna não aderente, com a consideração de um modelo finito de pórtico plano e a partir da discretização do cabo em trechos retos, em cada elemento de concreto. Lou et al. [17] também publicaram sua formulação numérica para vigas protendidas com tendões de FRP, para pilares de concreto protendido (LOU et al. [18]) e vigas de compósito de aço protendido externamente (LOU et al. [19]).

Yapar et al [20] desenvolveu um modelo não linear de elementos finitos para vigas de concreto protendido. O processo de modelagem refletiu fielmente todas as condições de carregamento, começando com a operação do pré-tensionamento do fio, a transferência de tensão e o carregamento subsequente até a falha. O esquema proposto foi modelado pelo software Abaqus. Xu e Sun [21] analisaram numericamente elementos finitos não lineares de vigas de concreto armado reforçadas com aço protendido, simulando o procedimento completo de falha da viga de concreto armado reforçada com aço protendido através do Método dos Elementos Finitos não lineares tridimensionais. Para a modelagem dos materiais, este trabalho utilizou o modelo de plasticidade para simular os vergalhões de aço, para a aderência entre tensão e deformação do aço protendido e o concreto, utilizou-se um modelo elástico linear e para as propriedades plásticas, dotou-se da curva de Ramberg-Osgood. O modelo de dano elastoplástico fornecido pelo Abaqus foi usado para simular o concreto, que assumiu que o material concreto, apresenta principalmente trincas à tração, fratura por compressão e danos quando submetidos a elevados carregamentos.

Além disso, Thoma [22] utilizou a análise de elementos finitos não lineares para realizar análises numéricas de placas e vigas em escala real, direta e indiretamente testados experimentalmente. A análise numérica foi feita a partir de uma implementação no ANSYS Mechanical APDL para uma viga submetida à flexão, uma viga de concreto armado diretamente apoiada, uma viga de concreto protendido diretamente suportada e uma viga de concreto protendido indiretamente suportada. Neste trabalho, as análises de vigas de concreto protendido são realizadas a partir de modelos de elementos finitos considerando a geometria do cabo de protensão modelado como um polígono aberto e consistindo de membros contínuos. As forças de ancoragem e o atrito devido à protensão são aplicados como cargas externas. A relação tensão-deformação do aço de protensão inclui o efeito de enrijecimento de tensão e os cabos só podem transferir forças de tração. Por fim, definiu-se o modelo de corda de tensão para modelar a tensão de aderência entre o aço de protensão e o concreto.

Moreira [23] propôs um modelo que considera que a tensão no cabo de protensão é constante ao longo do comprimento, ou seja, não há atrito entre a bainha plástica e o aço de protensão. O cabo de protensão neste trabalho foi modelado como um elemento de treliça, sendo as coordenadas dos elementos de treliça associadas ao elemento de pórtico plano. A viga de concreto armado é modelada por elementos de estrutura plana não linear com base na teoria do Euler-Bernoulli-Navier e na abordagem Lagrangeana total.

Diante da cronologia dos trabalhos publicados recentemente sobre modelagem numérica de vigas de concreto protendido, nota-se que o presente trabalho apresenta a proposta de utilizar novos modelos constitutivos para os elementos finitos. Com isso, o trabalho se insere num relevante tema para a área em questão, mostrando a grande motivação deste estudo.

3 Método Semi-Embutido

Assim como nas estruturas de concreto armado, as estruturas de concreto protendido são compostas por materiais de diferentes propriedades. Conforme apresenta Baetu & Ciongradi [24], três modelos capazes de simular a interface entre o aço e o concreto através do método dos elementos finitos são destacados. São eles o modelo distribuído, o modelo discreto e o embutido (Figure 1). No modelo distribuído, de acordo com Ožbolt & Sharma [40], o aço é representado como uma faixa contínua ao longo do elemento de concreto com eixos de orientação da estrutura. Sendo assim, a relação constitutiva é dada como um modelo homogêneo aço-concreto, não deixando de obter um perfeito vínculo entre os dois materiais. Para o modelo discreto, segundo Hartl [25], as armaduras são posicionadas sobre as arestas dos elementos finitos que representam a matriz de concreto. Neste método, o posicionamento da armadura depende previamente da malha de elementos finitos e a cada configuração da armadura, um novo modelo de malha deve ser gerado para que os nós continuem coincidentes com os nós dos elementos.

No modelo embutido as barras da armadura são incorporadas nos elementos sólidos de modo que os deslocamentos entre os dois elementos são compartilhados. Diferentemente do modelo discreto, o posicionamento das armaduras independe da malha inicial, não necessitando modificar a malha para a inserção do aço. Para Yamaguchi & Ohta [26], a formulação é vantajosa em estruturas de concreto onde a armadura possui distribuição complexa.

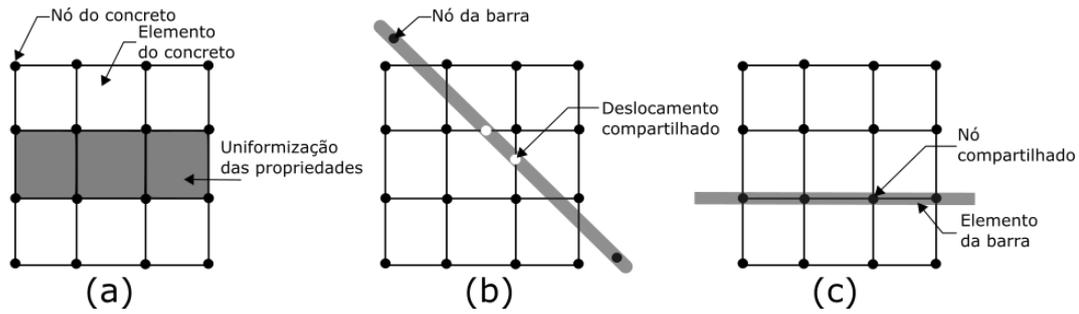


Figura 1. Representação dos modelos constitutivos para modelar a interface entre aço e concreto. 1(a) Modelo distribuído, 1(b) Modelo embutido, 1(c) Modelo discreto

Os modelos apresentados são vistos como os principais modelos para representar a interface entre o concreto e o aço através do Método dos Elementos Finitos. Com o intuito de aprimorar a representação da aderência entre o aço e o concreto, Durand [1] propôs o método semi-embutido baseado nos métodos discreto e embutido. No método semi-embutido, as condições de contorno podem ser aplicadas diretamente nas inclusões e a armadura é discretizada em elementos de barra. No processo de discretização, são gerados elementos de interface, os quais conectam a malha (concreto) aos elementos de barra (armadura). Os elementos de interface não necessariamente possuem seus nós coincidentes com os nós do sólido e a partir da variação das propriedades de rigidez destes elementos, diversos níveis de aderência entre o aço e o concreto podem ser simulados.

O elemento finito de barra obtido após a discretização da armadura é independente do elemento finito do concreto e com isso é possível aplicar as condições de contorno em cada nó, resultando posteriormente na obtenção de campos de tensões e deformações nas barras e ao longo do contato.

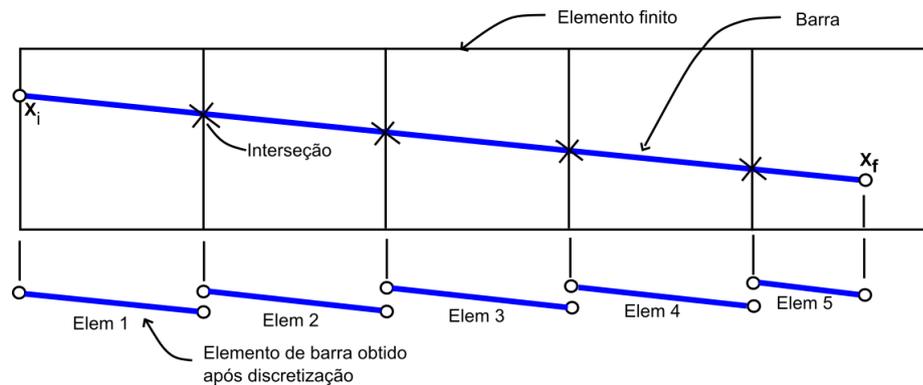


Figura 2. Elemento Finito de concreto protendido

A formulação para modelar a interface foi apresentada por Durand [1] como “modelagem pontual da interface”. Posteriormente, como resposta do aperfeiçoamento da modelagem anteriormente proposta, Durand & Farias [27] define a “modelagem de interface contínua”, trazendo uma simulação mais realista que a anterior. Para a modelagem pontual de interface, os elementos de junta são constituídos por um conjunto de molas colocadas nos nós da barra. Na modelagem de interface contínua, as molas foram substituídas por um elemento especial de junta única. O elemento especial de junta única conecta o elemento de barra ao elemento atravessado correspondente sem adicionar nós extras ao sistema. Neste caso, estes elementos representam todos os pontos de contato na interface e sua rigidez é determinada pela integração usando a quadratura de Gauss. Através da Figura 10 pode-se observar a forma dos elementos de junta especial.

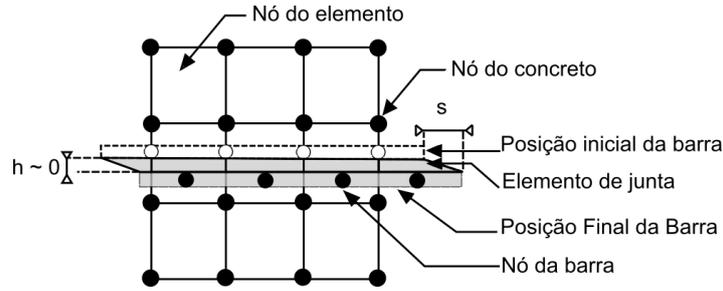


Figure 3. Representação do modelo semi-embutido

Na Figura 3, os deslocamentos possíveis ao longo da região de contato são representados pela área sombreada. Os pontos nodais pretos são aqueles que se conectam aos elementos sólidos e os brancos são nós que se conectam aos elementos de barra. Os nós brancos são pontos de controle e sua posição é fixa dentro do elemento atravessado e nestes, calcula-se os deslocamentos por interpolação dos nós conectados ao elemento sólido.

Considerando os deslocamentos dos nós dos elementos sólidos e de barra como $\mathbf{u} = [\mathbf{u}^s + \mathbf{u}^b]^T$ onde, \mathbf{u}^s são os deslocamentos dos nós dos elementos sólidos e \mathbf{u}^b os deslocamentos dos nós de barra (flutuantes da interface), calcula-se os deslocamentos relativos entre os elementos barra e sólido a partir da matriz de transformação \mathbf{B} , como segue:

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

Onde \mathbf{B} é a matriz que transforma os deslocamentos nodais do elemento de interface em deslocamentos relativos ao longo da região de contato e pode ser encontrada a partir do deslocamento relativo expressado por:

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{R}[\mathbf{N} \quad -\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Os deslocamentos \mathbf{u}^* e \mathbf{u}^b são deslocamentos de nós fictícios e flutuantes da interface, respectivamente, \mathbf{R} é a matriz de cossenos diretores para a região de contato da barra e \mathbf{N} a matriz que contém as funções de interpolação da interface, definida por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

O termo \mathbf{u}^* pode ser calculado por meio da interpolação dos deslocamentos nodais do elemento sólido atravessado \mathbf{u}^s , dada relação:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{M}\mathbf{u}^s \quad (4)$$

A Eq. (2) pode ser reescrita por:

$$\begin{Bmatrix} u_{x1}^* \\ u_{y1}^* \\ u_{z1}^* \\ u_{x2}^* \\ u_{y2}^* \\ \vdots \\ u_{xn}^* \\ u_{yn}^* \\ u_{zn}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & 0 & 0 & M_{2,1} & 0 & \vdots & M_{m,1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,1} & 0 & 0 & M_{2,1} & \vdots & 0 & M_{m,1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{1,1} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & M_{m,1} \\ M_{1,2} & 0 & 0 & M_{2,2} & 0 & \vdots & M_{m,2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,2} & 0 & 0 & M_{2,2} & \vdots & 0 & M_{m,2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ M_{1,n} & 0 & 0 & M_{2,n} & 0 & \vdots & M_{m,n} & 0 & 0 \\ 0 & M_{1,n} & 0 & 0 & M_{2,n} & \vdots & 0 & M_{m,n} & 0 \\ 0 & 0 & M_{1,n} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & M_{m,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \vdots \\ u_{xn} \\ u_{yn} \\ u_{zn} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

4 Análise Numérica

Ao definir um novo modelo para simular uma determinada estrutura computacionalmente, é necessário definir métodos capazes de validar e calibrar o estudo realizado. Neste presente artigo, utilizou-se os resultados obtidos experimentalmente por Tao e Du [7] para a comparação e validação do método proposto na simulação de vigas protendidas.

Conforme visualizado na Figura 4, a viga A1 possui protensão interna com 4,20m de vão e 0,28 m de altura. A viga é bi apoiada e fletida em quatro pontos.

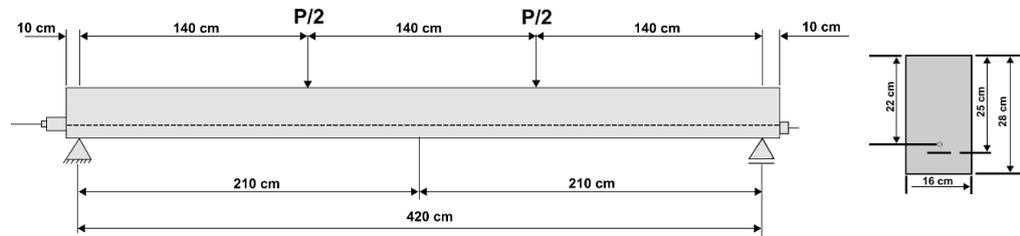


Figura 4. Viga Protendida de Tao e Du [7]

Na solução computacional feita com o Amaru, considerou-se o elemento finito tridimensional hexaédrico com 8 nós para os elementos de concreto. Para a barra, utilizou-se elementos de barra linear para a modelagem. A malha tridimensional utilizada possui 2004 nós e 1392 elementos.

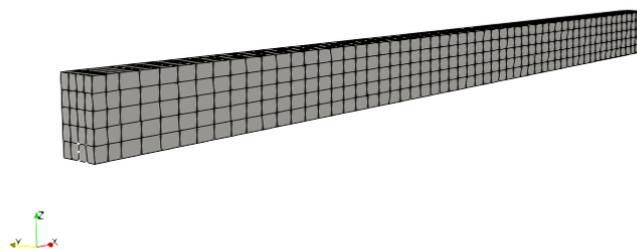


Figura 5. Discretização da viga a ser modelada

Como se trata de uma viga bi-apoiada, as condições de contorno impostas nos apoios restringe os deslocamentos em x e em z para o apoio 1, e em y para o apoio 2. Nas extremidades, a barra foi considerada engastada na face da viga, inibindo os deslocamentos em qualquer direção. A análise foi realizada em dois estágios, um correspondente a aplicação da protensão e um a aplicação de carga. A aplicação de protensão foi realizada estabelecendo o valor da protensão como tensão inicial nos pontos de integração dos elementos de barra. Posteriormente foram calculadas as forças internas correspondentes e aplicadas no

sistema com sinal contrário. No estágio de aplicação de carga, foram aplicados deslocamentos impostos nos pontos indicados na Figura 4 até atingir a fratura da viga.

Quanto à resistência do concreto à compressão (f'_c), tensão de escoamento (f'_y), a área da armadura de protensão (A_{ps}), a área da armadura passiva (A_s) e a tensão inicial aplicada na barra da armadura ativa (σ_{pe}), estes foram obtidos através de ensaios realizados por Tao e Du (1985) e estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades da viga

Viga	f'_c (MPa)	f'_y (MPa)	A_{ps} (mm ²)	A_s (mm ²)	σ_{pe} (MPa)
A1	30.6	267	0.588	1.57	960

Quanto aos modelos constitutivos dos materiais, para o aço da armadura passiva foi adotado o modelo elastoplástico perfeito, com endurecimento linear, e tensão de escoamento (f'_y) já definido na Tabela 1. O módulo de elasticidade longitudinal adotado foi igual a 210 GPa. Para o aço da armadura ativa, considerou-se a tensão de escoamento (f_y) igual a 1460 MPa e o módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa, conforme apresenta em Tao e Du [7].

Para modelar o concreto analisou-se três modelos constitutivos, comparando os resultados entre eles. Em um primeiro momento, utilizou-se o modelo de dano de Mazars considerando os parâmetros $A_t = 0,90$, $B_t = 5000$, $A_c = 1,0$, $B_c = 1500$ e $\varepsilon_{ps} = 1 \cdot 10^{-4}$. Modelou-se também usando o modelo de Drucker Prager, onde tem-se o valor das constantes: $\rho = 2,63$, $\alpha = 0,4312$ e $\kappa = 3771,2$. E por último o modelo constitutivo do dano, com a resistência do concreto à tração, $f_t = 3,5 \cdot 10^3$, a energia de fratura $G_f = 73 \cdot 10^{-3}$ e a deformação $\varepsilon_{psc} = -0,002$.

As curvas deslocamento (m) x força (kN) foram obtidas e apresentadas na Figura 5. Nota-se que cada modelo obtido apresentou uma curva diferente, fato este justificado pela caracterização individual de cada modelo.

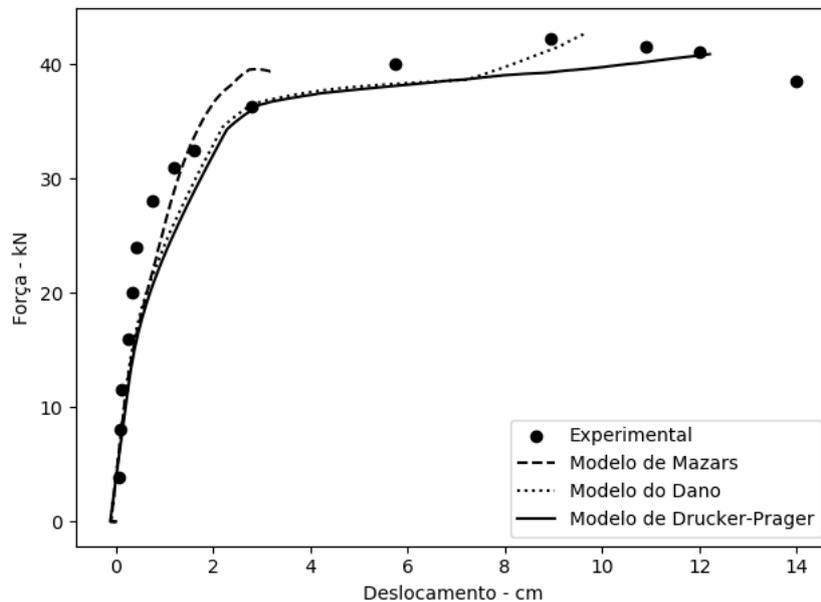


Figura 5. Curva força *versus* deslocamento da análise experimental obtida

Considerando o modelo de Mazars, é possível identificar que o concreto rompeu antes do início da plastificação. Segundo Pituba e Lacerda [28], as deformações plásticas e residuais evidenciadas experimentalmente no concreto não são consideradas no modelo de dano, pois o processo de dissipação de energia é decorrente somente do processo de danificação. Logo, o modelo pode apresentar pouca precisão para vigas com baixa taxa de armadura, confirmando o resultado obtido para a viga em estudo.

Para o modelo de Drucker-Prager, Souza Neto et al. [29], aborda a associação ao critério de plastificação definido por uma lei de aproximação de Mohr-Coulomb. No geral, mesmo obtendo uma curva aproximada do experimento, é um modelo que não possui um bom comportamento para o concreto, pois tende a não representar o rompimento à compressão. E, para o modelo constitutivo do dano, que se apresentou uma aproximação para a curva experimental, este pode ser considerado como a melhor representação da curva para os três modelos analisados, pois em sua formulação leva-se em questão as deformações residuais e a eventual plastificação das armaduras.

5 Conclusões

O presente artigo apresentou uma breve revisão dos trabalhos já publicados que analisaram vigas de concreto protendido, com o intuito de contextualizar o tema. Em um segundo momento, buscou-se detalhar a formulação do método semi-embutido aplicando na análise de vigas de concreto com protensão aderente, modelando as barras independente da modelagem do concreto.

Neste, comprovou-se que o método apresentou eficiência na modelagem de vigas de concreto protendido, devido às proximidades dos resultados obtidos com os dados experimentais e com a comparação às propriedades específicas de cada modelo do concreto utilizado. A aplicação do método semi-embutido para vigas de concreto protendido permite que a barra protendida seja modelada independente da malha do concreto, sendo uma característica bem conveniente enquanto a geração de malha.

Por fim, conclui-se que os resultados obtidos podem tornar-se ainda mais eficientes a partir de análises futuras quanto à estudos sobre critérios de convergência da malha de elementos finitos e uma calibração dos parâmetros considerados, uma vez que as divergências ainda encontradas podem dar-se devido às incertezas em alguns parâmetros não determinados experimentalmente. Para tanto, é possível obter resultados satisfatórios na simulação de vigas de concreto com protensão a partir da utilização de novos métodos, o que contribui para a inserção de novas metodologias que representam estruturas protendidas com comportamento não-linear.

Agradecimentos

Os autores deste trabalho agradecem a CNPq pelo apoio financeiro ao longo desta pesquisa.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Durand, R. (2008). Three-dimensional analysis of geotechnical structures submitted to reinforcement and drainage. Doctoral thesis. University of Brasília, Brasília - DF, 153 p.
- [2] Del Rio, JD; Application of the Semi-Embedded Finite Element Method in the Simulation of Reinforced Concrete Beams. Master Thesis, Publication E.DM-006A / 15, Department of Civil and Environmental Engineering. University of Brasília. Brasília, DF, 100p.
- [3] Rosales, YM (2016). “Numerical - experimental analysis of the steel-concrete adhesion behavior”. Diss. Master's degree. University of Brasília, p. 115
- [4] Silva, F.H.B.T. (2017). Numerical Analysis of Concrete Mode I and Mixed Mode Fracture Using Joint Element. Master Thesis in Structures and Construction, Publication E.DM-08A / 17, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Brasília, Brasília, DF, 106p.

- [5] Faria, T. (2017). Numerical Study on Steel Fiber Reinforced Concrete Using the Finite Element Method and Constitutive Models. Masters dissertation. University of Brasilia - PECC.
- [6] Pantoja R, B.G. (2018). Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Structures via Finite elements. Master Thesis in Structures and Construction, Publication E.DM - 01A / 18, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Brasilia, Brasilia, DF, 167p.
- [7] Tao X, Du G. (1985). *Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams*. PCI 1985;30(6):72–91.
- [8] Martins, PCR & Regis, PA (1998) - Mixed prestressing in Hyperstatic Beams - Proceedings of the 13 th FIP Congress Amsterdam.
- [9] Désir, JM (1993) Nonlinear analysis of the behavior until rupture of external prestressed concrete beams. Doctoral Thesis, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.
- [10] Kônig, G. & Qian, L. (1993) - FEMAS: A Structural Non-Linear Analysis Program. Workshop on Behavior of External Prestressing in Structures, Saint- Rémy - Iès - Chevreuse, France.
- [11] Kodur, VK R & Campbell, TI (1993) - A Computer Program for the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Continuous Beams. Workshop on Behavior of External Prestressing in Structures, Saint- Rémy - Iès - Chevreuse, France.
- [12] Rabczuk, T & Eibl, J. (2004) Numerical Analyzes of Prestressed Concrete Beams using a Coupled Element Free Garlekin / Finite Element Approach, International Journal of Solids and Structures, V.41, pp. 1061-1080.
- [13] Lou T, Xiang Y. (2006) Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. Eng Struct ;28(14):1919–26. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.03.020>.
- [14] Hognestad, E. N. W. Hanson, and D. McHenry. Concrete Distribution in Ultimate Strength Design. ACI Journal 52 (December, 1955): 455-479
- [15] Menegotto M, Pinto PE. (1973). Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. In: Preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads, vol. 13 of IABSE, 1973. p. 15–22.
- [16] Lou T, Lopes S, Lopes A. (2013) Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. Comp Struct 2013; 119: 166 -76. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.12.014>.
- [17] Lou T, Lopes S, Lopes A. (2015). A comparative study of continuous beams prestressed with bonded frp and steel tendons. Compos Struct 2015; 124: 100 –10. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.009>.
- [18] Lou T, Lopes S, Lopes A. (2016) Numerical modeling of externally prestressed steel-concrete composite beams. J Constr Steel Res 2016; 121: 229 –36. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.02.008>.
- [19] Lou T, Xiang Y. (2010) Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. Struct Eng Mech 2010; 35 (5): 631–43.
- [20] Yapar, O., Basu, P., & Nordendale, N. (2015). Accurate finite element modeling of pretensioned prestressed concrete beams. Engineering Structures, 101, 163-178.
- [21] Xu, Jie & Sun, Xiaobo. (2018). Nonlinear finite element parametric analysis of prestressed steel reinforced concrete beams. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 439, 042050. [10.1088/1757-899X/439/4/042050](https://doi.org/10.1088/1757-899X/439/4/042050).
- [22] Thoma, K. (2018). Finite element analysis of experimentally tested RC and PC beams using the cracked membrane model. Engineering Structures, Vol. 167, pp. 592-607. ISSN 0141-0296. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.04.010>.

- [23] Moreira, L. S. (2016). Nonlinear analysis via finite elements of concrete beams with non-sticking strain. 2016. 135 f. Dissertation (Master in Civil Engineering: Structures and Civil Construction) - Technology Center, Federal University of Ceará, Fortaleza.
- [24] Baetu , S., Ciongradi , I. (2011). Nonlinear analytical models of the reinforced concrete structural walls.
- [25] Hartl , H., “Development of a continuum-mechanics-based tool for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to soil-structure interaction problems,” PhD Thesis, Graz University of Technology, Graz, Austria, 250 p, 2002.
- [26] Yamaguchi, E., & Ohta , T. (1993). Accurate and Efficient Method for Analysis of Reinforced Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering* . v. 119, pp. 2017-2035. doi: 10.1061 / (ASCE) 0733-9445 (1993) 119: 7 (2017).
- [27] Durand , R., & Farias, M. (2012). Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement. Sao Paulo: World Congress on Computational Mechanics.
- [28] Pituba, J. J. C. e Lacerda, M. M. S. (2012). Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures Sobre o emprego de modelos simplificados de dano. 5(1):26–37.
- [29] de Souza Neto, E., Peric, D., e Owen, D. R. J. (2008). *Computational Methods for Plasticity*, volume 55.