

Computational model for crack simulation in concrete beams using interface elements

Eduarda M. Ferreira¹, Flávio S. Barbosa¹, George O. Ainsworth Junior¹

¹Graduation Program in Civil Engineering, Federal University of Juiz de Fora University Campus, Engineering College, 36036-330, Juiz de Fora, Brasil
eduarda.marques@engenharia.ufjf.br
flavio.barbosa@engenharia.ufjf.br
george.ainsworth@engenharia.ufjf.br

Abstract. The study of damage in concrete structures plays an essential role in evaluating its useful life and integrity, preventing disasters, and defining the need for maintenance or reinforcement in the structure. Among the common pathologies that occur in reinforced concrete structural elements, there is cracking. Despite being unavoidable due to the concrete's low tensile strength compared to its compressive strength, it is essential to know the behavior of the material before and after cracking starts, investigate its causes, limiting the level of crack opening to guarantee a good performance of the structure. Therefore, the present work aims to study cracked concrete beams modeled as a plane stress state, submitted to different loading and boundary conditions situations. A computational crack model was developed based on the Finite Element Method with conventional quadrilateral isoparametric elements and interface elements with five springs extracted from the literature. These interface elements allow the simulation of cracking opening in regions where the tensile stresses are higher than the concrete strength. The constitutive model for the interface element depends on a penalty parameter empirically inserted to simulate the reduction of material stiffness when subjected to tensile stresses. To avoid shear-locking, reduced integration was adopted together with techniques for controlling the hourglass modes in such under-integrated elements. This model has been implemented using the software MATLAB and the results were validated by comparing with the ones of other authors, showing good agreement.

Keywords: Finite Element Analysis, Interface Elements, Crack Simulation

1 Introdução

As estruturas de concreto exigem modelos constitutivos elaborados para seu estudo. De fato, por se tratar de um material heterogêneo com comportamento fisicamente não linear, modelos analíticos para o concreto se tornam muitas vezes ineficazes ou de difícil parametrização. Nesse contexto, o emprego de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, possibilitou uma modelagem do comportamento mecânico do concreto de forma mais realista, ampliando as possibilidades de estudo.

Nos últimos anos, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos buscando estudar e produzir modelos para a simulação do dano em concreto, em especial, o processo de fissuração. Menin et al. [1] descreve três modelos utilizados para representar as fissuras: discreta, distribuída e incorporada.

Nas simulações de fissuração discreta, somente é considerada a estrutura íntegra, sendo necessária redefinição da malha quando ocorre a formação de fissuras. Nesse contexto, destaca-se o trabalho de Ngo and Scordelis [2] onde as fissuras são inseridas na malha de acordo com padrões empíricos.

Nos modelos de fissuração distribuída, o processo de fissuração provoca mudanças nas equações constitutivas dos elementos da malha. Hillerborg et al. [3] e Bazant [4] são trabalhos pioneiros que estudam a diminuição da rigidez e, por consequência, a mudança nos parâmetros do material na região da fissuração.

Por fim, nos modelos de fissura incorporada, descontinuidades são inseridas nos elementos finitos da malha. Este modelo foi empregado em trabalhos recentes como Manzoli [5] que propõe um elemento finito de três nós com descontinuidade incorporada, o que proporciona um deslocamento relativo de um nó do elemento em relação aos demais.

Tzamtzis [6] aponta que, quando é necessária uma representação das descontinuidades, como é o caso das fis-

suras, a abordagem que fornece uma modelagem mais adequada é a por elementos finitos. Nesse caso, o resultado é obtido a partir da associação de elementos contínuos com elementos de ligação ou elementos de interface.

O primeiro trabalho que registra a inserção de elementos de interface na malha de elementos finitos da estrutura é o de Goodman et al. [7]. Os autores percebem como esses elementos influenciam na distribuição de tensões, deslocamentos e padrões de falha a partir de um estudo em blocos de rochas.

Hoje em dia, os elementos de interface são importantes ferramentas na representação de descontinuidades geométricas e problemas de contato. As aplicações são amplas, abrangendo processo de fissuração, interação solo-estrutura, evolução de dano em estruturas e pavimentos, previsão do comportamento de dois corpos em contato.

Um fenômeno que pode ocorrer ao se trabalhar com elementos finitos é o chamado "travamento de força cortante" (do inglês *Shear Locking*). Bower [8] define que o travamento acontece quando os elementos apresentam uma rigidez que não condiz com a realidade física do problema. Dentre as razões para a ocorrência deste fenômeno estão, por exemplo, o mal condicionamento das equações do problema e o fato das funções de interpolação dos elementos não serem capazes de reproduzir suas deformações.

Alguns artifícios podem ser empregados para se eliminar ou reduzir o fenômeno do travamento de força cortante, como o uso de malhas mais densas e de funções de interpolação que consigam aproximar de maneira mais precisa as deformações do elemento. Albuquerque [9] realiza um estudo para análise de esforços em pontes e, para tornar os elementos menos susceptível ao travamento, testa o emprego de duas ferramentas: a integração reduzida, utilizando um número menor de pontos de Gauss para obter a parcela de cisalhamento da matriz de rigidez e a adoção de modelos com campos assumidos de deformações de força cortante (CADFC). O autor consegue bons resultados com o uso destes artifícios.

No presente trabalho foram implementados elementos isoparamétricos quadrilaterais com quatro nós associados a elementos de interface IE5, proposto por Coutinho et al. [10]. Para obtenção da matriz de rigidez da estrutura foi realizada integração numérica de Gauss, podendo ser completa ou reduzida, dependendo da constatação do efeito de travamento da força cortante nos elementos. A análise baseada no Métodos dos Elementos Finitos foi implementada no software MatLab, programa que possui uma linguagem própria, derivada do C/C++ e alto desempenho da análise numérica.

A fim de avaliar o comportamento do modelo adotado neste trabalho e validar a sua implementação computacional foram reproduzidos dois exemplos de Penna [11], nos quais o autor compara resultados do seu modelo de dano segundo uma estrutura teórica unificada com resultados experimentais e de outros modelos presentes na literatura. Apresentam-se nesse artigo os resultados iniciais obtidos.

2 Metodologia

No modelo computacional adotado para a análise de estruturas de concreto foi utilizado o Método dos Elementos Finitos com elementos contínuos bidimensionais associados a elementos de interface IE5, propostos por Coutinho et al. [10]. Além disso, é empregado o artifício da integração reduzida em elementos selecionados a fim de contornar o problema de travamento de força cortante.

2.1 Elemento de Interface

O elemento de interface adotado para representação gráfica e simulação das fissuras na malha de elementos finitos foi o IE5 (do inglês, *Interface Element with five springs*), proposto por Coutinho et al. [10]. Este elemento é obtido a partir da adição de uma mola vertical no centro do elemento de interface apresentado por Herrmann [12], aqui denominado LRH, e que já possui quatro molas conectando suas faces superior e inferior. Um esquema da composição do elemento IE5 pode ser visualizado na "Fig. 1".

A matriz de rigidez do elemento IE5 é resultado da soma das matrizes de rigidez dos dois elementos com os quais ele é formado e é dada em termos dos coeficientes de rigidez das molas nele presentes. Para garantir consistência dos deslocamentos obtidos com o elemento IE5 e os elementos IE1 e LRH é necessário que os coeficientes $C1 = D_{11}L_{\text{médio}}/2$, $C2 = D_{22}L_{\text{médio}}/6$ e $C1 = 4C2$. Nas expressões, $L_{\text{médio}}$ refere-se à média aritmética simples entre as medidas L_1 e L_2 mostrados na "Fig. 1" e D_{11} e D_{22} são valores da matriz constitutiva do elemento de interface que é apresentada na eq. (1).

$$D = \begin{bmatrix} G/h & 0 \\ 0 & E/h \end{bmatrix} \quad (1)$$

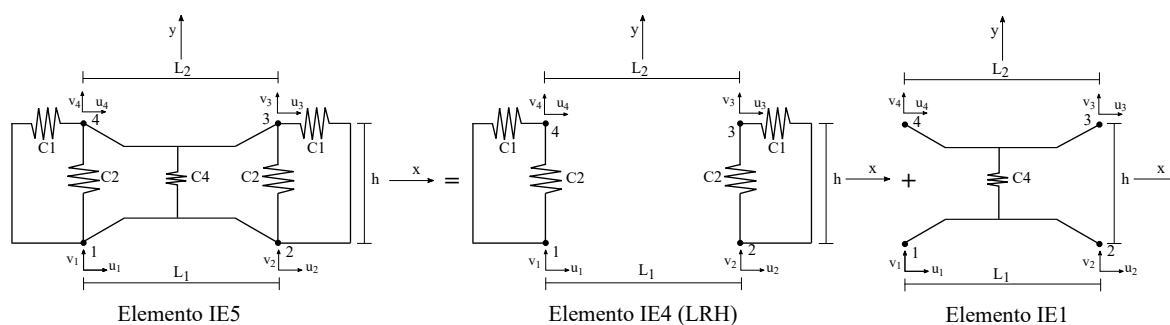


Figura 1. Composição do elemento IE5 (adaptado de Coutinho et al. [10])

No presente trabalho, o valor de h é considerado como sendo dado pela eq. (2).

$$h = \frac{L_{\text{médio}}}{\lambda} \quad (2)$$

onde λ é um fator de penalidade que deve variar de acordo com a tensão no elemento de interface. Para valores elevados de λ , tem-se valores baixos de h e, conseqüentemente, os termos da matriz constitutiva D e da matriz de rigidez K do elemento são elevados. O oposto ocorre quando são considerados valores baixos para o parâmetro λ .

Diante do exposto, adotou-se uma variação empírica de λ de acordo com valores médios e característicos de resistência à tração para concretos de classe até C50, definidos pela norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 - Projetos de Estrutura de Concreto - Procedimento. Tais valores são dados por $f_{ct,m} = 0.3f_{ck}^{2/3}$, $f_{ctk,inf} = 0.7f_{ct,m}$ e $f_{ctk,sup} = 1.3f_{ct,m}$.

A partir da comparação da tensão normal no elemento de interface com estes valores é definido o valor apropriado para λ , conforme definido na “Tabela 1”. Todos os elementos de interface são inicializados com o maior λ , simulando uma estrutura íntegra. A partir do incremento de cargas e desenvolvimento das tensões, é avaliado em que intervalo estas se enquadram e atribuído o respectivo valor ao parâmetro de penalidade.

Tabela 1. Padrão de variação do parâmetro λ

Tensão normal σ_y no elemento de interface (MPa)	Valor de λ
≤ 0	10^6
> 0 e $\leq f_{ctk,inf}$	10^6
$> f_{ctk,inf}$ e $\leq f_{ct,m}$	10^4
$> f_{ct,m}$ e $\leq f_{ctk,sup}$	10^2
$> f_{ctk,sup}$	1

Cabe ressaltar que as fórmulas para o cálculo das tensões foram deduzidas por Coutinho et al. [10] e são apresentadas na eq. (3) e eq. (4). O eixo xy refere-se ao eixo local apresentado na “Fig. 1”. A componente de tensão normal σ_x é considerada nula e as tensões são assumidas constantes ao longo do elemento.

$$\sigma_y = \frac{1}{L_{\text{médio}}} \left(C2 + \frac{C4}{4} \right) (v_3 + v_4 - v_1 - v_2) \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{L_{\text{médio}}} C1 (u_3 + u_4 - u_1 - u_2) \quad (4)$$

onde $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3$ e v_4 são os deslocamentos nodais do elemento de interface, conforme apresentado na “Fig. 1”.

2.2 Integração Reduzida com controle de hourglass

Em elementos em que foram identificados deslocamentos menores que os esperados, seja pela resolução exata do problema, seja pela comparação com valores presentes na literatura, fez-se o uso do recurso da integração reduzida com controle dos modos de hourglass. O emprego de uma malha mais refinada pode ser eficiente para reduzir essa inconsistência, porém o tempo computacional de análise aumenta consideravelmente.

As equações empregadas para controle dos modos espúrios de energia nula ou modos de hourglass são baseadas na teoria apresentada por Bower [8].

O elemento quadrilateral com quatro nós possui apenas uma modo de hourglass, cujo vetor base é dado pela eq. (5). Este vetor especifica os deslocamentos do i -ésimo nó no modo de hourglass.

$$\Gamma^i = (+1, -1, +1, -1) \quad (5)$$

Já o vetor de forma de hourglass é calculado a partir das derivadas das funções de forma N do elemento em relação às coordenadas globais. O cálculo pode ser resumido pela eq. (6).

$$\gamma^i = \Gamma^i - \frac{\partial N^i(\xi = 0)}{\partial x_j} \sum_{b=1}^4 \Gamma^b x_j^b \quad (6)$$

Cada termo da matriz de rigidez do elemento, calculado a partir da integração reduzida, será somado com uma parcela de rigidez artificial para controle do modo de hourglass dada pela eq. (7).

$$K_{hourglass} = 0.01G \frac{\partial N^i}{\partial x_j} \frac{\partial N^i}{\partial x_j} V_e \gamma^i \gamma^b \quad (7)$$

onde V_e refere-se ao volume do elemento e G é o seu módulo de elasticidade transversal, definido a partir do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν .

2.3 Incrementos de carga

Para que fosse possível um maior controle do nível de tensões e deformações dos elementos e assim determinar, por exemplo, o valor do parâmetro λ no caso dos elementos de interface foi adotado um processo incremental de carga. Nessa estratégia o carregamento total F é dividido em n incrementos iguais de carga ΔF . Aqui adotou-se incrementos de 5% para cada passo de carga, ou seja, $n = 20$.

Para o primeiro passo de carga ΔF a estrutura é considerada sã, são utilizados os parâmetros materiais originais do problema e a rigidez de todos os elementos é calculada a partir de integração numérica completa. Ao fim deste passo, as coordenadas (x, y) de cada nó da malha são atualizadas para sua nova posição deformada. O nível de tensão em cada elemento de interface é verificado e é adotado o valor de λ adequado para o próximo passo de carga.

A partir deste segundo passo de carga e em todos os subsequentes, antes da aplicação da carga é analisado se a carga total até o momento (dada por $n\Delta F$) atingiu um limite preestabelecido, se o limite foi atingido os elementos selecionados passarão a ter suas rigidezes calculadas por integração reduzida. Essa verificação pode ser feita, também, considerando um limite de tensão no elemento a partir do qual é ativada a integração reduzida no cálculo da sua matriz de rigidez. Para o caso da análise pelo valor da carga, os elementos submetidos a integração reduzida serão aqueles localizados na região de maior concentração de tensões.

A análise segue verificando para cada passo de carga os valores de λ condizente com as tensões nos elementos de interface e atualizando as coordenadas de todos os nós através da sua soma com os deslocamentos nodais de cada iteração. Sendo assim, será aplicada sobre a estrutura, n vezes uma carga de módulo ΔF , sempre considerando a malha deformada do passo de carga anterior.

3 Validação dos Resultados

O modelo descrito anteriormente foi validado a partir da sua comparação com resultados obtidos por outros trabalhos na análise de duas estruturas de concreto, uma viga e um painel em "L".

3.1 Viga de concreto submetida a flexão em três pontos

O primeiro exemplo trata de uma viga de concreto biapoiada submetida a uma carregamento concentrado P em seu eixo de simetria vertical, onde esta possui uma descontinuidade geométrica. Nesta região é esperada uma concentração de tensões e deformações. A malha é formada por elementos quadrados de quatro nós e dimensão inicial (0.01 x 0.01) m. Os elementos localizados na região central da viga foram selecionados para terem suas rigidezes calculadas por integração reduzida para cargas superiores a 585N. Os elementos de interface foram inseridos exatamente sob o ponto de aplicação da carga, fazendo com que a carga P tivesse que ser aplicada em dois nós com módulo igual a $P/2$. Os detalhes da geometria e da malha podem ser observados na “Fig. 2”.

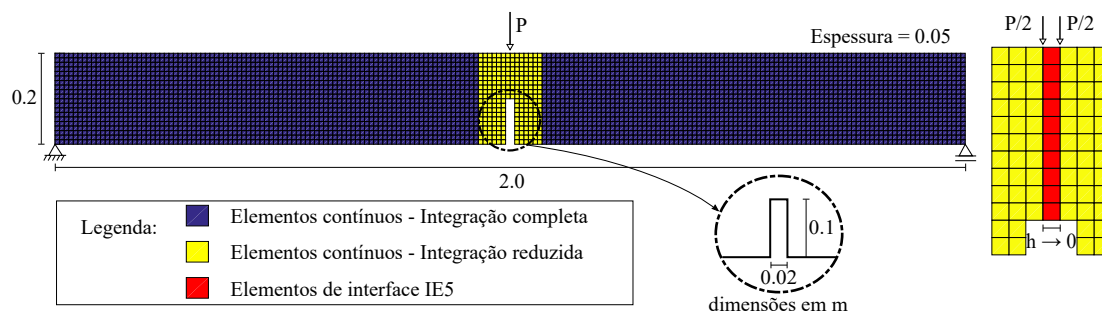


Figura 2. Geometria e malha da viga submetida a flexão em três pontos

As propriedades do concreto adotadas para a análise são: módulo de elasticidades $E = 30000MPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$ e resistência do concreto à compressão $f_{ck} = 30MPa$.

Uma visualização da abertura de fissura quando a viga é submetida a uma carga $P = 800N$ é mostrada na “Fig. 3”. Nesta é possível perceber que os dois elementos de interface mais próximos do vão central começam a dar sinais de abertura, ainda que pequenos.

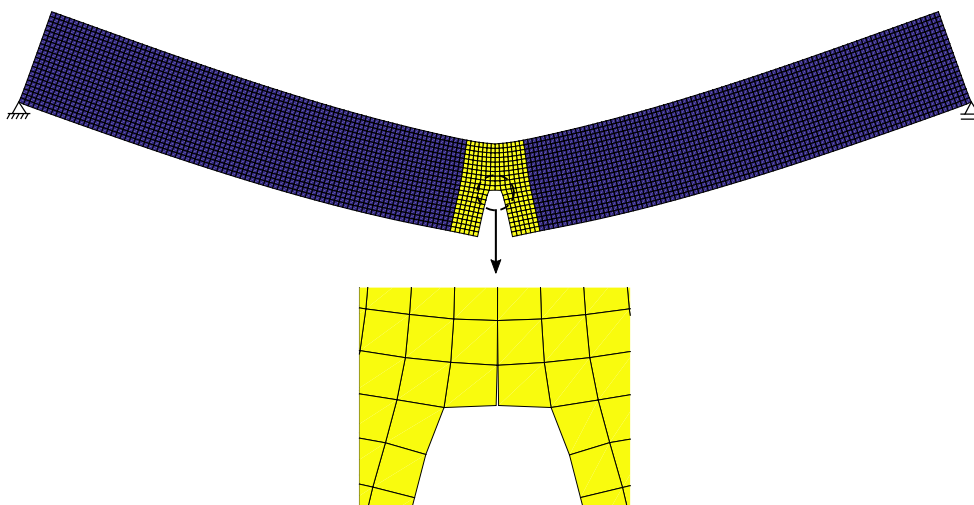


Figura 3. Malha deformada com detalhe do início de fissuração (deslocamentos ampliados em 1000x)

3.2 Painel em ”L” submetido a carregamento distribuído

O segundo exemplo a ser analisado trata de um painel de concreto em forma de ”L” engastado em sua base. A estrutura é submetida a um carregamento distribuído vertical q ao longo de sua extremidade esquerda. Para a análise foram utilizados elementos quadriláteros de quatro nós e dimensão inicial igual a (0.025 x 0.025) m. Na junção angular do painel foram inseridos elementos de interface, uma vez que espera-se que o processo de fissuração se desenvolva nesta região. Também ao longo desta área foram selecionados os elementos que terão suas rigidezes obtidas a partir de integração reduzida quando o carregamento total equivalente atingir 3200N.

Detalhes da geometria e da malha e dos elementos são apresentados na “Fig. 4”.

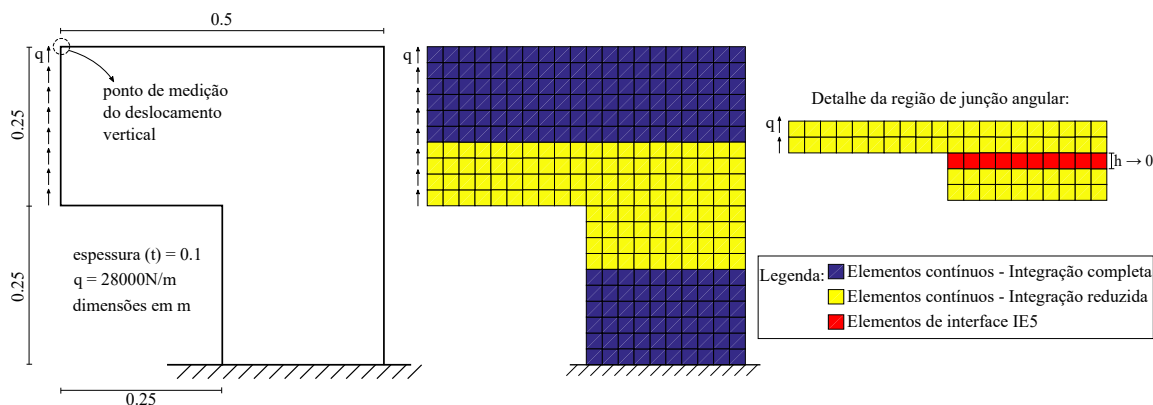


Figura 4. Geometria e malha do painel em "L"

As propriedades do concreto adotadas para a análise são: módulo de elasticidades $E = 25850 MPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.18$ e resistência do concreto à compressão $f_{ck} = 31 MPa$.

3.3 Comparação dos resultados

Para fins de comparação será analisado o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga, no caso da viga, e o deslocamento vertical do ponto indicado na “Fig. 4”, no caso do painel em "L". Ambos serão comparados com modelos de fissuração distribuída com leis tensão-deformação propostas por Carreira and Chu [13] e Carreira and Chu [14] e Boone and Ingraffea [15] combinado com o comportamento à compressão de Carreira and Chu [13], todos implementados por Penna [11] de acordo com sua proposta de estrutura teórica unificada. Os resultados encontrados para a viga de concreto também serão comparados com resultados experimentais obtidos por Petersson [16] e com um modelo de fissuração distribuída que segue uma lei bilinear de tensão-deformação. Já os valores obtidos para o painel em "L" também serão contrastados com resultados experimentais e numéricos encontrados por Winkler et al. [17].

Um esquema com o resumo destas comparações é dado na “Fig. 5”. Pode-se constatar uma boa concordância entre os resultados obtidos para ambas as estruturas durante o regime linear. O regime pós-crítico não foi simulado no presente trabalho.

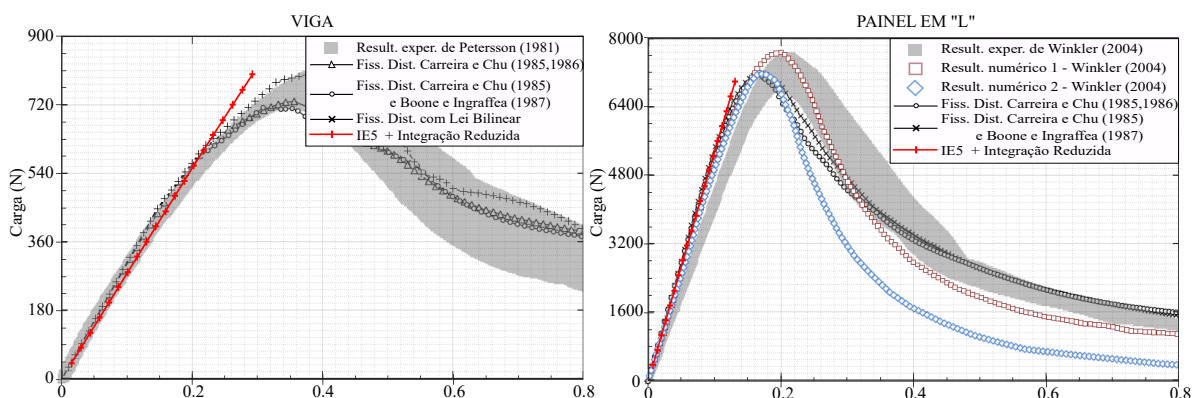


Figura 5. Comparação dos resultados durante o regime linear

4 Conclusões

Os resultados obtidos com o modelo proposto estão de acordo com padrões encontrados na literatura e consegue apresentar, de maneira gráfica, o processo de fissuração em estruturas no regime linear. Com maior desenvolvi-

mento, o estudo pode se tornar uma ferramenta eficiente na simulação de início e desenvolvimento de fissuras e na análise do comportamento mecânico de estruturas fissuradas. Para tanto, um algoritmo de resolução do problema não linear com controle de deslocamentos será implementado ao modelo visando descrever o comportamento das estruturas quando surgem fissuras mais significativas.

Agradecimentos. Os autores agradecem aos órgãos CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, PROCAD 88881.068530/2014-0), FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, projeto PPM-00106-17), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, projeto 311576/2018-4-PQ) e UFJF (Universidade Federal de Juiz de Fora, bolsa PBPG - ID705).

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Menin, R. C. G., Trautwein, L. M., & Bittencourt, T. N., 2009. Modelos de fissuração distribuída em vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, vol. 2, pp. 166–200.
- [2] Ngo, D. & Scordelis, A. C., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *American Concrete Institute Journal*, vol. 67, pp. 152–163.
- [3] Hillerborg, A., Modéer, M., & Peterson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- [4] Bazant, Z. P., 1976. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 102, pp. 331–344.
- [5] Manzoli, O. L., 2011. Prediction of crack propagation via local constitutive models with a scheme to track the discontinuity path. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 27(3), pp. 180–188.
- [6] Tzamtzis, A. D., 2003. Finite element modeling of cracks and joints in discontinuous structural systems. *16th ASCE Engineering Mechanics Conference Proceedings*, vol. , pp. .
- [7] Goodman, R. E., Taylor, R. L., & Brekke, T. L., 1968. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, vol. 94, pp. 637–659.
- [8] Bower, A. F., 2009. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press.
- [9] Albuquerque, A. A. A., 2014. *Implementação de elementos finitos de barra e placa para a análise de esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos - Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, Brasil.
- [10] Coutinho, A. L. G. A., Martins, M. A. D., Sydenstricker, R. M., Alves, J. L. D., & Landau, L., 2003. Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. *Computers and Geotechnics*, vol. 30, pp. 347–374.
- [11] Penna, S. S., 2011. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagens de estruturas de concreto*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia de Estruturas, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, Brasil.
- [12] Herrmann, L. R., 1978. Finite element analysis of contact problems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 104, pp. 1043–1057.
- [13] Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82 (6), pp. 797–804.
- [14] Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1986. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *American Concrete Institute Journal*, vol. 83 (1), pp. 21–28.
- [15] Boone, T. & Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the fracture process at rock interfaces. *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, vol. , pp. 519–531.
- [16] Petersson, P. E., 1981. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. 28 TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- [17] Winkler, B., Hofstetter, G., & Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.