

# NUMERICAL MODELING OF LOSS OF PRESTRESS IN CONCRETE BEAMS

Matheus de Godoy Tavares<sup>1</sup>, Éverton Souza Ramos<sup>1</sup>, Rogério Carrazedo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Dept. of Structural Engineering, University of São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400 – Parque Arnold Schmidt, 13566-590, São Paulo, Brazil  
matheust@usp.br, evertonramos@usp.br, rogcarrazedo@sc.usp.br*

**Abstract.** The correct estimation of prestressing losses has fundamental importance for preventing damage and improving the design of prestressed structures. In prestressed concrete beams the level of prestressing force initially applied is reduced instantly and over time. The progressive prestressing losses constitute an important part of the total loss and are related to shrinkage, creep of the concrete and the relaxation of the prestressed steel. Thereby, this work aims to develop a computational tool using the positional approach of the finite element method to evaluate the mechanical behavior of bonded prestressed concrete structures. The concrete matrix is represented by plate finite elements with cubic approximation, whereas, for reinforcement, one-dimensional finite elements are considered. The coupling between matrix and reinforcement is performed by means of the embedded technique, without adding degrees of freedom to the problem. The prestressing loss due to shrinkage and creep of the concrete are determined by the model B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT [1]). The loss by relaxation of prestressed steel is calculated using the model proposed by Model Code 10 (CEB-FIB [2]). The numerical applications performed demonstrated the accuracy of the developed model, evidencing its capacity in the analysis of prestressing loss in bonded prestressed concrete elements.

**Keywords:** FEM, prestressed concrete, prestress loss, shrinkage, creep.

## 1 Introdução

A protensão é um artifício que consiste em introduzir um estado prévio de tensões, de modo que melhore a resistência ou o comportamento de uma estrutura, sendo amplamente empregado em estruturas de concreto (PFEIL [3]). Em elementos de concreto protendido, o comportamento ao longo do tempo é de grande importância para seu dimensionamento, pois a perda de protensão durante a vida útil da estrutura é um fator de grande impacto nas condições de serviço e deformações da estrutura (TADROS; GHALI; DILGER [4]).

Alguns estudos mostram que as propriedades reológicas do concreto, como retração e fluência, e o relaxamento do aço protendido possuem grande contribuição na perda total de protensão (BAŽANT et al. [5], BURGOYNE; SCANTLEBURY [6]). De modo que, a incorreta estimativa de perda de protensão da estrutura pode levar ao dimensionamento ineficiente e à curvatura excessiva, quando a perda de protensão é superestimada, ou ao deslocamento excessivo e à fissuração da estrutura, quando a perda de protensão é subestimada.

Este artigo visa analisar a perda de protensão ao longo do tempo em estrutura de concreto com protensão aderente por meio da modelagem numérica. Para isso, a modelagem numérica é realizada por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional associado à técnica de embutimento para representar o concreto protendido. O modelo considera as perdas ao longo do tempo por retração, fluência e relaxação da armadura ativa. As deformações referentes aos fenômenos reológicos do concreto são determinadas pelo modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT [1]) e a relaxação da armadura pelo modelo proposto pelo Model Code 10 (CEB-FIB [2]).

## 2 Perdas progressivas de protensão

A perda protensão ocorre devido a diversas razões, que conduzem a uma diminuição da força de protensão inicialmente aplicada, essa perda pode ocorrer instantaneamente, conhecidas como perdas imediatas, ou ao longo do tempo, denominadas de perdas progressivas. Entre as imediatas, pode-se citar como principais: a perda por atrito nos cabos, perda por deformação da ancoragem e perda por deformação elástica do concreto. Entre as perdas progressivas, destaca-se a perda por retração do concreto, por fluência do concreto e por relaxação da armadura ativa (PFEIL [3]; CARVALHO [7]).

O gráfico da Fig. 1 mostra as perdas de força de protensão que ocorrem na armadura de pré-tração, ao longo do tempo de vida da peça. Nessa figura  $P_i$  é a força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração,  $P_a$  é a força na armadura de protensão, no instante imediatamente anterior à sua liberação das ancoragens externas,  $P_0$  é a força de protensão no instante em que a força de protensão é transferida para o concreto,  $P_t$  é o valor da protensão no tempo  $t$  e  $P_\infty$  é o valor da força de protensão após terem ocorrido todas as perdas.

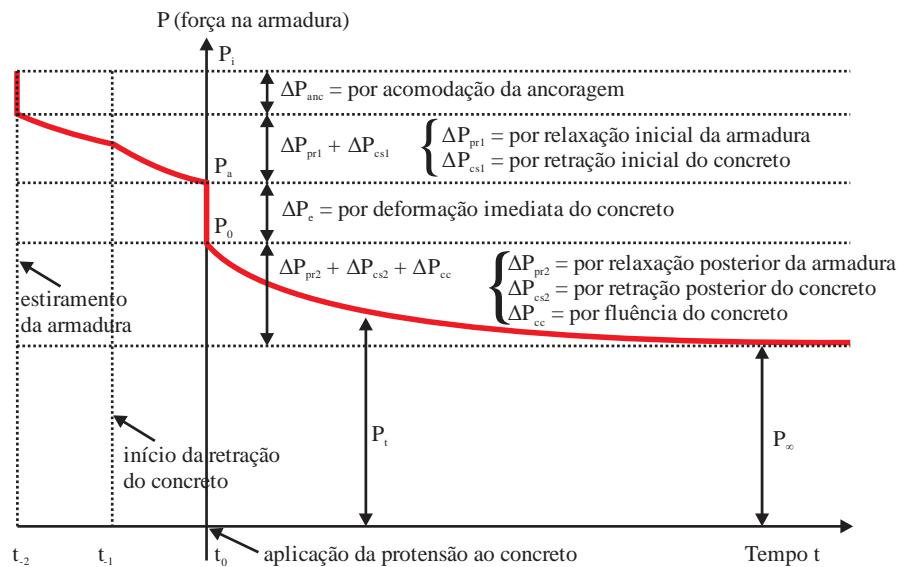


Figura 1. Diagrama força de protensão por tempo para elemento protendido (adaptado HANAI [8])

As perdas de protensão por retração do concreto estão relacionadas ao equilíbrio hidrotérmico entre o concreto e o meio, que resulta em seu encurtamento ao longo do tempo e, portanto, encurtamento do cabo protendido, gerando uma perda de tensão no mesmo. A intensidade da retração depende de diversas causas, tais como: traço do concreto, tipo de cimento e agregado, tempo de cura e de aplicação da protensão após cura, dimensões, forma da peça e condições do ambiente.

Já a deformação por fluência está relacionada ao concreto sob ações de longa duração. Esse fenômeno também acontece ao longo do tempo, intensificado em função do tempo de aplicação e da intensidade do carregamento, produzindo deformações reversíveis e irreversíveis nas regiões solicitadas. Essas deformações no concreto, geram o encurtamento do cabo de protensão, ocasionando perdas de protensão no mesmo.

A perda protensão por relaxação do aço é a perda gradual de tensão na armadura, que ocorre pelo estado de deformação constante sobre ela. Ou seja, quando a perda de tensão por relaxação acontece, a tensão necessária para manter a deformação total constante diminui em função do tempo (ZEREN, ZEREN [9]).

## 3 Formulação

### 3.1 Modelagem da retração e fluência

O modelo de retração e fluência usado nesse artigo é o B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT [1]), no modelo estão descritos matematicamente diversos fenômenos físicos que afetam a fluência e retração,

desenvolvido na Universidade de Northwestern. Sendo que o modelo apresenta melhorias em relação aos seus predecessores, possuindo aplicabilidade aos concretos modernos e sendo capaz de separar os tipos de fluência e retração.

O modelo considera como fatores de influencia a idade do concreto, idade do concreto quando submetido ao carregamento, quantidade e tipo de agregados, quantidade e tipo de cimento, resistência à compressão, condições de cura, umidade relativa, geometria do elemento estrutural, relação entre volume e superfície, e relação água/cimento, que foram revisados e calibrados com uma extensa base de dados de testes laboratoriais. A deformação total é dada pela Eq. (1):

$$\varepsilon(t) = J(t, t_c)\sigma + \varepsilon_{sh, total}(t, t_0) + \alpha\Delta T(t) \quad (1)$$

onde  $t$ ,  $t_0$  e  $t_c$  são, respectivamente, a idade do concreto, a idade a partir do início da secagem e a idade do carregamento,  $J(t, t_c)$  é a função de conformidade para fluência no concreto, na idade  $t$  causada por uma tensão uniaxial aplicada na idade  $t_c$ ,  $\varepsilon(t)$  e  $\varepsilon_{sh, total}(t, t_0)$  são, respectivamente, a deformação total e a deformação por retração total,  $\Delta T(t)$  é a variação de temperatura no tempo  $t$  e  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica. Maiores detalhes referentes à formulação do modelo B4 podem ser consultados em Wendner, Hubler e Bažant [1], onde estão expressos os valores tabelados dos parâmetros necessários à formulação.

### 3.2 Modelagem da perda por relaxação do aço de protensão

A perda por relaxação no aço protendido ocorre quando os cabos ou cordoalhas estão submetidos a um alongamento constante. Isto é, quando a armadura é estirada e mantida, surge uma tendência de diminuição da tensão aplicada. Neste trabalho adota-se o método do Model Code 10 (CEB-FIB [2]) para determinar a intensidade da relaxação do aço protendido, conforme descrito nas seguintes equações:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = \rho_t = \rho_{1000} (24t/1000)^k \quad (2)$$

$$k \approx \log(\rho_{1000} / \rho_{100}) \quad (3)$$

onde  $\Delta\sigma_{pr}$  é a perda de protensão por relaxação em  $t$  dias,  $\sigma_{pi}$  é a protensão inicial,  $\rho_t$  é a relaxação do aço protendido em  $t$  dias,  $\rho_{100}$  e  $\rho_{1000}$  são valores tabelados referentes a relaxação com 100 e 1000 horas, respectivamente. O parâmetro  $\rho_{1000}$  possui diferentes valores para as três classes de aço de protensão: fios e cordoalhas com relaxação normal (classe 1), fios e cordoalhas com baixa relaxação (classe 2) e barras (classe 3).

### 3.3 Modelagem de compósitos via MEFP

A fim de determinar o comportamento mecânico dos materiais compósitos, o modelo numérico desenvolvido utiliza o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), o qual emprega posições e vetores generalizados como parâmetros nodais ao invés dos deslocamentos e giros empregados no método convencional, associado a uma técnica de embutimento. A protensão é realizada com a inserção de uma deformação prévia nos elementos do reforço (armadura). As deformações por retração, fluência e relaxação da armadura são adicionadas aos seus respectivos elementos.

A matriz de concreto é representada por meio de elementos finitos triangulares bidimensionais com ordem cúbica e 10 nós. Para simulação das armaduras adota-se elemento lineares inseridos no domínio bidimensional. De forma sucinta, é apresentado o processo para obtenção da resposta mecânica via MEFP para o concreto protendido. O equilíbrio estático é obtido por meio do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e a consideração de forças conservativas. Para tal, faz-se o uso da energia potencial total, conforme a equação:

$$\Pi = \int_{V_0^m} u_e^m(\mathbf{E}_m) dV_0^m + \int_{V_0^r} u_e^r(\mathbf{E}_r) dV_0^r - \mathbf{F} \cdot \mathbf{Y} \quad (4)$$

onde  $u_e^m$  é a energia específica de deformação da matriz,  $u_e^r$  é a energia específica de deformação do reforço (armadura),  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças conservativas externas,  $\mathbf{Y}$  é o vetor de posição nodal,  $\mathbf{E}_m$  é a deformação

desenvolvida na matriz, ou seja, o tensor de Green-Lagrange calculado conforme a Eq. 5,  $\mathbf{E}_r$  é a deformação desenvolvida no reforço, calculada conforme a Eq. 6,  $V_0^r$  e  $dV_0^m$  são, respectivamente, os volumes iniciais do reforço e da matriz.

Do tensor de Green-Lagrange da matriz são subtraídas as deformações calculadas pelo modelo de retração e fluência, representadas pelos tensores  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{retração}}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{fluência}}$  que apenas influenciam nas direções principais. Essa adição é válida ao se trabalhar no regime e pequenas deformações. A protensão é implementada aplicando uma deformação inicial, representada por  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{protensão}}$  no elemento de reforço a ser protendido. A deformação por relaxação, representada por  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{relaxação}}$ , também é subtraída da deformação do elemento de reforço, conforme as equações a seguir:

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{retração}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{fluência}}) \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{L}_0^2} - \mathbf{1}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{protensão}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{relaxação}} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{L}_0$  são, respectivamente, o comprimento atual e inicial do elemento linear. O equilíbrio estático da estrutura ocorre quando a variação da energia potencial total é nula. Para a determinação do vetor posição é necessária a resolução do sistema não linear, conforme a equação:

$$\delta\Pi = \left( \int_{V_0^m} \mathbf{S}_m : \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^m + \int_{V_0^r} \mathbf{S}_r : \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^r - \mathbf{F} \right) \cdot \delta \mathbf{Y} = (\mathbf{F}_{\text{int}}^m + \mathbf{F}_{\text{int}}^r) - \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (7)$$

onde  $\mathbf{S}_m$  e  $\mathbf{S}_r$  são, respectivamente, os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie da matriz e do reforço,  $\mathbf{F}_{\text{int}}^m$  é o vetor de forças internas referente à matriz,  $\mathbf{F}_{\text{int}}^r$  é o vetor de forças internas referentes ao reforço e  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas aplicadas a matriz.

Para a solução do sistema não linear de equações é empregado o processo iterativo de Newton-Raphson. Expande-se a equação por série de Taylor e desconsidera-se os termos de ordem superior, dada por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{Y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{\mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{Y}_0) + \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{Y} = 0 \quad (8)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o vetor de desbalanceamento de forças,  $\mathbf{Y}_0$  é a posição tentativa, a qual é inicialmente adotada como posição inicial ( $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}$ ),  $\mathbf{X}$  é o vetor referente as posições nodais da configuração inicial do corpo,  $\Delta \mathbf{Y}$  é a correção do vetor de posição nodal e  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana ou matriz de rigidez tangente. Para forças externas conservativas,  $\mathbf{H}$  pode ser separada em duas matrizes, segundo a contribuição dos elementos da matriz dos elementos do reforço.

A solução do sistema não linear fornece uma correção da posição ( $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \Delta \mathbf{Y}$ ) e o procedimento é repetido até que  $(|\Delta \mathbf{Y}|/|\mathbf{X}|)$  seja menor que um determinado parâmetro de tolerância previamente adotado. Vale ressaltar que na técnica de embutimento empregada, as coordenadas do reforço são escritas em função das coordenadas da matriz. Maiores detalhes com relação a formulação podem ser consultados em Coda [10].

## 4 Problema proposto

Este exemplo visa demonstrar a potencialidade do código para análise de perda de protensão em situação em que existem armaduras passivas, ativas e carregamento externo. Para investigar as perdas de protensão ao longo do tempo, Guo et al. [11] realizou uma serie de ensaios experimentais em vigas com protensão aderente e não aderente, por cerca de um ano. Desse modo, a viga de concreto PC5 foi simulada numericamente e os resultados obtidos são comparados com os valores experimentais, essa viga foi construída com concreto C55, com resistência característica do concreto de 55 MPa, com seção transversal de 200 x 300 mm. O elemento estrutural foi biapoiado com comprimento total e o vão efetivo de 4400 mm e 4200 mm, respectivamente, conforme a Fig. 2.

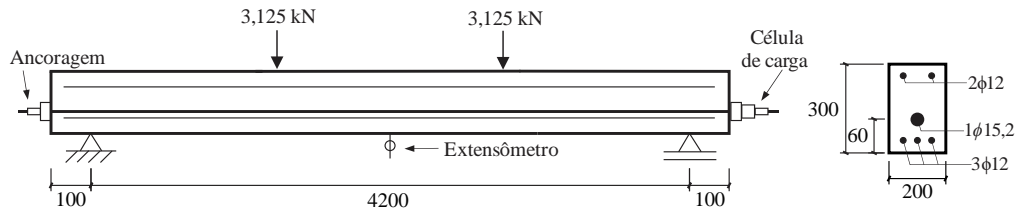


Figura 2. Detalhamento da viga PC5. Medidas indicadas em mm

A protensão foi realizada com cabo de aço de baixa relaxação, com valor característico da resistência de escoamento de 1860 MPa e área de 140 mm<sup>2</sup>. O aço HRB335 com diâmetro de 12 mm foi utilizado para reforços longitudinais. A viga PC5 foi inicialmente protendida com 108,7 kN, o que representa uma tensão de 760,1 MPa, a protensão foi realizada aos 30 dias após a confecção e foi aplicada em apenas uma das pontas da viga, por meio de uma célula de carga. Ademais, foi realizado o ensaio de quatro pontos, sob ação de 3,125 kN, conforme a Fig. 2. Devido à ausência de alguns parâmetros necessários para a simulação do concreto, estes foram estimados empregando as considerações de Bastos [12] e Mindess, Young e Darwin [13]. Na Tab. 1 observa-se resumidamente os dados relacionados ao concreto adotados no modelo numérico.

Com relação a discretização do modelo numérico, a matriz foi composta por 252 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 1216 nós e 2432 graus de liberdade. Para modelagem das armaduras utilizou-se 241 nós, resultando em 240 elementos de barra de treliça com aproximação linear. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz adotados foram, respectivamente,  $E_m = 37,80$  GPa e  $\nu = 0,20$ . Para o aço de protensão, o Módulo de Elasticidade adotado foi de  $E_f = 210$  GPa.

Tabela 1. Parâmetros do concreto da viga PC5

Parâmetro	Valor	Unidade
Razão agregado/cimento, a/c	4,60	-
Tipo de agregado adotado	Granito	-
Razão água/cimento, w/c	0,38	-
Razão volume/superfície	58,33	mm
Umidade relativa, RH	73	%
Consumo de cimento, c	513	Kg m <sup>-3</sup>
Resistência característica do concreto, $f_{ck}$	55	MPa
Temperatura média adotada	18	°C
Idade do carregamento	30	dias
Idade secagem	1	dias

## 5 Resultados

Os resultados encontrados numericamente foram comparados com os valores experimentais de Guo et al. [11] e foram apresentados nas Fig. 3, 4 e Tab. 2. A análise do erro entre as duas curvas foi realizada por meio de uma função erro, conforme a seguinte equação:

$$FO = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ 1 + ABS \left( \frac{M_1 - C_1}{M_1} \right) + \dots + ABS \left( \frac{M_n - C_n}{M_n} \right) \right] \right\} \quad (9)$$

onde  $n$  é o número de medições consideradas,  $i$  é a perda de protensão em um determinado instante de tempo,  $M_i$  é a perda de protensão experimental e  $C_i$  é a perda de protensão calculada pelo modelo. O perfeito ajuste entre dados é obtido quando  $FO = 1$ .

Tabela 2. Comparação dos valores de perda de protensão em MPa da viga PC5

Dias	Perdas instantâneas	Perdas diferidas
50	20,890	27,135
200	43,172	43,991
300	55,242	50,658
380	55,358	54,938

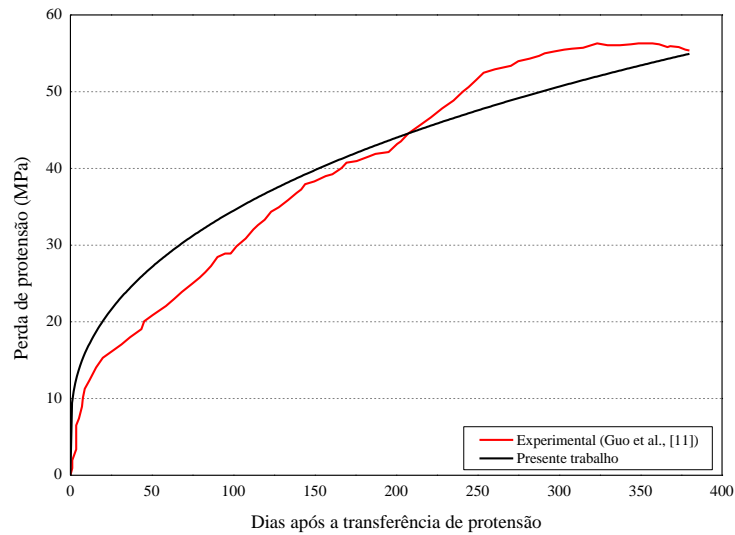


Figura 3. Variação na perda de protensão para viga PC5

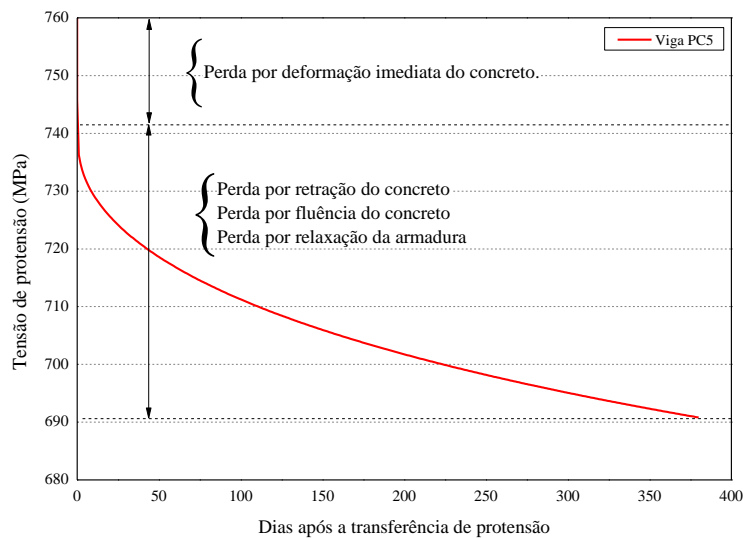


Figura 4. Diagrama da força de protensão por tempo para viga PC5

Ao analisar a curva de perda de protensão por dia dos resultados numéricos, pôde-se notar que, nos primeiros 50 dias, houve uma perda de aproximadamente metade da perda total encontrada durante todo o ensaio, com intensidade de 27,14 MPa. Entre os últimos 80 dias do ensaio, pôde-se aferir uma diferença de apenas 4,28 MPa. O erro encontrado entre as duas curvas, calculado pela função erro foi de 16,825 %. As discrepâncias observadas podem ser decorrentes de diferentes condições que o elemento esteve sujeito, como variação de umidade e temperatura, além de possíveis erros associados ao sistema de experimentação. No entanto, ainda assim os resultados se aproximam e demonstram relativa concordância. Caso providos parâmetros mais precisos, os resultados poderiam ser ainda mais próximos.

No diagrama de força de protensão por tempo para a viga em estudo foi destacado as etapas da perda de protensão que ocorreram ao longo da vida útil da peça. No instante de tempo 0 ocorreu a perda imediata por deformação do concreto, e a partir desse ponto, ocorreram as perdas diferidas, referente aos fenômenos de relaxação da armadura, retração e fluência do concreto. As perdas diferidas foram mais intensas nos primeiros dias

e atenuaram-se com o passar do tempo. A respeito das análises realizadas, pôde-se constatar que o modelo representou satisfatoriamente a perda de protensão inicial por deformação do concreto e as perdas diferidas.

## **6 Conclusões**

A partir dos modelos estudados, observou-se que a ferramenta numérica desenvolvida foi eficaz na análise da perda de protensão em estruturas de concreto com protensão aderente, em situações em que estavam presentes armaduras passivas e carregamento externo. Além disso, pôde-se notar que a perda de protensão apresentou maior intensidade nos primeiros dias após a transferência de protensão e estabilizou ao longo do tempo, o modelo foi capaz de representar esse fenômeno. Notou-se também que o modelo necessitava de diversos parâmetros com relação ao concreto e aço para a obtenção de bons resultados, e que em alguns casos esses dados eram de difícil aquisição. Por fim, verificou-se que o modelo desenvolvido apresentou uma alternativa viável e fundamentada para a simulação da perda de protensão em estruturas de concreto.

### **Reconhecimentos**

Os autores reconhecem o apoio financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq 133981/2018-5, CNPq 310564/2018-2 e CNPq 428762/2018-2) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Código de financiamento 001 e CAPES 88882.328884/2019-01.

### **Declaração de autoria**

Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído neste documento é propriedade (e autoria) dos autores.

## **Referências**

- [1] R. W. Wendner; M. H. Hubler; Z. P. Bažant. “Model B4: multi-decade creep and shrinkage prediction of traditional and modern concretes”. computational modelling of concrete structures - proceedings of euro-c 2014. 2. 679-684, 2014.
- [2] CEB-FIB - International Federation for Structural Concrete. Model Code 2010, vol. 1. CEB-FIP Bulletin no. 65. Federation Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland; 2012.
- [3] W. Pfeil. Concreto protendido vol. 1 - Introdução. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1984.
- [4] M. K. Tadros; A. Ghali; W. H. Dilger. Time-dependent prestress loss and deflection in prestressed concrete members. PCI Journal; 20(3):86-89, 1975.
- [5] Z. P. Bažant; Q. Yu; G. Li; G. J. Klein; V. Kristek. Excessive deflections of record-span prestressed box girder: lessons learned from the collapse of the Koror-Babeldaob Bridge in Palau, Concr. Int. 32 44-52, 2010.
- [6] C. Burgoyne; R. Scantlebury. Why did Palau bridge collapse? Struct. Eng. v. 84, p. 30-37, 2006.
- [7] R. C. Carvalho. Estruturas em concreto protendido: pré-tração, pós-tração, cálculo e detalhamento. São Paulo: PINI, 2017.
- [8] J. B. Hanai. Fundamentos do Concreto Protendido. São Carlos, Univ. de São Paulo – Dep. Eng. de Estruturas, 2005.
- [9] A. Zeren; M. Zeren. Stress relaxation properties of prestressed steel wires. J. Mater. Process. Technol. 141 (1), 86-92, 2003.
- [10] H. B. Coda. O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica. [S.l.]: São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 978-85-8023-068-0.
- [11] T. Guo; Z. Chen; S. Lu; R. Yao. Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams. Measurement. 122: 573-581, 2018.
- [12] P. S. S. Bastos. Análise experimental de dormentes de concreto protendido reforçados com fibras de aço. 270 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.
- [13] S. Mindess; J. F. Young; D. Darwin. Concrete. 2nd Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2003. 644 p.