

Modelagem numérica do processo de formação e propagação de fissuras em CRFA utilizando uma abordagem de aproximação contínua

Bruno T. de Vasconcelos¹, Luís A. G. Bitencourt Jr.²

*Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Almeida Prado, travessa 2, 271, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo, Brasil
bruno_vasconcelos@usp.br¹, luis.bitencourt@usp.br²*

Resumo. Este trabalho propõe um modelo numérico para simular o processo de formação e propagação de fissuras em Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA). A Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) é aplicada utilizando um enriquecimento elementar (*E-FEM*), cujo comportamento na região descontínua é descrito por um modelo de dano à tração para simular o processo de falha na matriz de concreto. As fibras de aço são representadas por elementos finitos unidimensionais com dois nós (elementos de treliça), e comportamento descrito por um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional. As fibras de aço e o concreto são discretizados inicialmente em malhas de elementos finitos independentes. Em seguida, elementos finitos de acoplamento (EFA) são inseridos para descrever as interações entre eles empregando um modelo constitutivo de dano contínuo apropriado. Os exemplos numéricos demonstram que a metodologia proposta é promissora e consegue descrever apropriadamente o processo de formação e propagação de fissuras em CRFA.

Palavras-chave: CRFA, descontinuidade forte, elemento finito de acoplamento

1 Introdução

O concreto é um material que apresenta comportamento frágil quando submetido a esforços de tração, com uma baixa capacidade de deformação. Estudos têm demonstrado que esses incôvenientes podem ser superados através da adição de fibras de aço descontínuas ao concreto.

De acordo com Bentur e Mindess [1], o Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) é caracterizado por apresentar considerável aumento na ductilidade e tenacidade das matrizes cimentícias. Dessa forma, o compósito consegue um acréscimo na capacidade de transferir tensões entre fissuras, proporcionando padrões de fissuras distribuídas, antes da ruptura do material. Para representar esses padrões de fissuração no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), é comum a utilização de abordagens que utilizam modelos de fissura discreta [2–4] ou modelos de fissura distribuída [5, 6].

Os modelos discretos, em geral, não são recomendados para problemas que apresentam um grande número de fissuras, devido principalmente a necessidade de utilização de uma malha refinada que permita uma representação adequada do caminho de propagação das fissuras, uma vez que estas se propagam somente pelas arestas dos elementos. Uma alternativa tem sido utilizar modelos de readaptação de malhas, o que demanda um custo computacional que deve ser considerado pelo analista.

Os modelos distribuídos de fissura são interessantes para representar fissuras distribuídas, porém esses modelos apresentam em sua essência, forte dependência da malha de elementos finitos quando buscam a representação de microfissuras, uma vez que estas são modeladas por meio da localização de deformações, dissipando a energia de fratura na largura de um elemento finito. Embora alguns estudos tenham desenvolvido técnicas de regularização da energia de fratura [7–12], reduzindo a dependência desses modelos com relação ao tamanho dos elementos, os modelos de fissura distribuída ainda possuem forte sensibilidade com a orientação da malha, podendo apresentar o fenômeno de travamento de tensões [6, 13].

Neste trabalho é proposto um modelo numérico para simulação de falha em CRFA utilizando uma abordagem de Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) e uma representação discreta e explícita das fibras de aço [14]. O comportamento no interior da descontinuidade é descrito por um modelo de dano contínuo à tração.

2 Descrição do modelo proposto para CRFA

2.1 Representação da matriz de concreto

Para a representação numérica da descontinuidade forte via MEF é utilizado um elemento finito triangular de três nós de domínio Ω_e com descontinuidade incorporada, conforme ilustra a Figura 1. Nesta figura, destaca-se o comprimento característico l_e , e a banda de localização de deformações S_e , com uma largura de banda igual a k . A linha de descontinuidade divide o elemento em duas partes, induzindo um salto no campo de deslocamentos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$, separando o nó isolado **1** dos nós **2** e **3**.

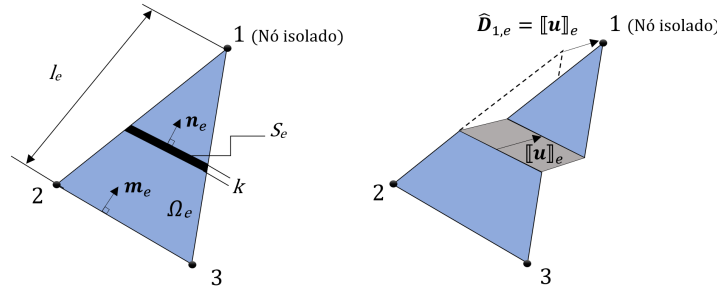


Figura 1. Elemento triangular com três nós e descontinuidade incorporada.

O salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$ provoca um deslocamento relativo no nó isolado, que pode ser identificado na Figura 1 por $\hat{\mathbf{D}}_{1,e} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$. Os nós 2 e 3, apresentam respectivamente, deslocamentos $\hat{\mathbf{D}}_{2,e} = 0$ e $\hat{\mathbf{D}}_{3,e} = 0$ devido ao salto no campo de deslocamentos.

Dessa forma, sendo o vetor unitário, $\mathbf{n}_e = [n_x \ n_y]^T$, perpendicular à banda de localização S_e , e o vetor unitário, $\mathbf{m}_e = [m_x \ m_y]^T$, perpendicular à aresta do elemento que se opõe ao nó isolado, a aproximação das deformações devido ao salto no campo de deslocamentos podem ser escritas de acordo com a seguinte equação:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{1,e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_x \\ \llbracket u \rrbracket_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \quad (1)$$

O correspondente campo de tensões na região contínua pode ser escrito por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega,e} = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}_{h,e} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) \quad (2)$$

onde \mathbf{D}_e agrupa os vetores de deslocamentos nodais totais dos nós ($\mathbf{D}_{1,e}$, $\mathbf{D}_{2,e}$, $\mathbf{D}_{3,e}$) e $\boldsymbol{\Sigma}^\Omega$ representa o modelo constitutivo isotrópico elástico linear empregado neste trabalho para a região contínua.

Dentro do conceito da ACDF, o campo de deformações totais dentro da superfície de descontinuidade, $\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e}$, pode ser definido de acordo com a equação 3, onde ele representa a soma das deformações contínuas presentes no elemento finito, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}$, com as deformações induzidas pela descontinuidade, dadas por $\frac{N_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} + \frac{N_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e + \frac{N_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \quad (3)$$

onde N_e é a matriz composta pelas componentes do vetor \mathbf{n}_e , sendo ela responsável por transformar as componentes de tensão na superfície de descontinuidade, referidas a um sistema ortogonal (x, y) , para um vetor $\boldsymbol{\sigma}_{S,e}$, atuante na linha de descontinuidade. Para problemas 2D, a matriz N_e , é definida como:

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, o campo de tensões na região de localização de deformações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{S,e} = \boldsymbol{\Sigma}^S (\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^S \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e + \frac{N_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) \quad (5)$$

sendo Σ^S a relação constitutiva na região de localização.

Acoplamento entre o campo de tensões contínuas e a interface descontínua: esquema de solução

A introdução do salto $[[\mathbf{u}]]_e$ na formulação de elementos com fissuras incorporadas, corresponde ao acréscimo de um grau de liberdade adicional ao problema de equilíbrio. Dessa forma, para garantir a consistência estática, deve ser respeitado o equilíbrio entre as tensões na banda de localização de deformações, $\sigma_{S,e}$, e as tensões nas regiões contínuas no entorno, $\sigma_{\Omega,e}$, de acordo com as seguintes equações:

$$N_e^T (\sigma_{S,e} - \sigma_{\Omega,e}) = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{R}([[u]]_e) = N_e^T \Sigma^S \left(B_e D_e - \frac{M_e}{l_e} [[u]]_e + \frac{N_e}{k} [[u]]_e \right) - N_e^T \Sigma^\Omega \left(B_e D_e - \frac{M_e}{l_e} [[u]]_e \right) = 0 \quad (7)$$

O salto de deslocamentos $[[\mathbf{u}]]_e$ no elemento, pode ser obtido através da solução da equação 7 por meio do método iterativo de Newton-Raphson, o qual aproxima o vetor salto de deslocamentos, $[[\mathbf{u}]]_e$, a cada passo de carga, utilizando a resposta do passo anterior. Assim, o equilíbrio pode ser resolvido por meio da solução da equação 8:

$$[[u]]_e^{i+1} = [[u]]_e^i - \left[\frac{\partial \mathbf{R}([[u]]_e^i)}{\partial [[u]]_e^i} \right]^{-1} \mathbf{R}([[u]]_e^i) \quad (8)$$

Por fim, as forças nodais internas f_e^{int} e a matriz de rigidez K_e do elemento, as quais devem ser utilizadas para o cálculo dos deslocamentos atualizados na próxima iteração $D_e^{n,i+1}$, são calculadas respectivamente pelas equações 9 e 10:

$$f_e^{int} = B_e^T E^m \left(B_e D_e - \frac{M_e}{l_e} [[u]]_e \right) A_e = B_e^T \sigma_\Omega A_e \quad (9)$$

$$K_e = \left[B_e^T E^m B_e - \frac{1}{l_e} B_e^T E^m M_e \left(E^{m,tg} + N_e^T E^m \frac{M_e}{l_e} \right)^{-1} N_e^T E^m B_e \right] A_e \quad (10)$$

onde, A_e é a área do elemento finito, E^m é a matriz constitutiva elástica linear, e $E^{m,tg}$ é a matriz constitutiva tangente discreta na interface da banda de localizações.

Relação constitutiva Σ^S utilizada na representação da banda de localização

A escolha do modelo constitutivo deve estar de acordo com as características reais do material, não havendo dentro do contexto da ACDF restrições específicas sobre um tipo ou uma família de modelos constitutivos a serem utilizados. Qualquer modelo constitutivo capaz de representar a perda de rigidez (*softening*) do material pode ser escolhido. Neste trabalho optou-se por trabalhar com um modelo de dano contínuo à tração regularizado. Os principais ingredientes do modelo são:

- Variável interna limite de dano:

$$r^{m+} = \max_{SE(-\infty,t)} (r_0^{m+}, \bar{\sigma}^{m+}), \quad r^{m+} |_{t=0} = r_0^{m+} = f^t \quad (11)$$

- Lei de evolução da variável de dano:

$$q^{m+} = r_0^{m+} e^{\left(A^+ \left(1 - \frac{r^{m+}}{r_0^{m+}} \right) \right)} \quad (12)$$

- Módulo de abrandamento regularizado:

$$A^+ = k \bar{A}^+, \quad \bar{A}^+ = \frac{f^{t2}}{E^m G_f^m} \quad (13)$$

- Variável escalar de dano positiva:

$$d^+ = 1 - \frac{q^{m+}(r^{m+})}{r^{m+}} \quad (14)$$

- Critério de degradação:

$$F(\bar{\sigma}^{m+}) = \bar{\sigma}^{m+}(\epsilon^m) - r_0^{m+} \leq 0, \quad \bar{\sigma}^{m+}(\epsilon^m) = \|\bar{\sigma}^{m+}\| \quad (15)$$

- Equação constitutiva:

$$\sigma^m = (1 - d^+) \bar{\sigma}^{m+} + \bar{\sigma}^{m-}, \quad \bar{\sigma}^m = E^m : \epsilon^m \quad (16)$$

- Condições de carga e descarga:

$$\dot{d}^+ \geq 0, F(\bar{\sigma}^{m+}) \leq 0, \dot{d}^+ \cdot F(\bar{\sigma}^{m+}) = 0 \quad (17)$$

Nas equações acima, r_0^{m+} é a variável interna de dano inicial, definida no modelo utilizado como sendo igual à tensão de pico de tração, f^t . A matriz E^m trata-se da matriz de constantes elásticas da matriz de concreto, ϵ^m é o vetor de deformações totais e $\bar{\sigma}^m$ é o vetor de tensões efetivas na matriz de concreto, que pode ser separado em uma parte positiva $\bar{\sigma}^{m+}$ e outra negativa $\bar{\sigma}^{m-}$, para a aplicação da variável de dano apenas na parte positiva e obtenção do vetor das tensões nominais σ^m .

2.2 Representação das fibras de aço

Neste estudo, as fibras de aço são representadas por elementos finitos unidimensionais, que permitem somente deformações axiais, e cujo comportamento é descrito por um modelo constitutivo elastoplástico [15, 16].

2.3 Interação fibra/matriz (EFA) - modelo de bond-slip (perda de aderência)

A interação fibra/matriz é descrita empregando elementos finitos de acoplamento Bitencourt Jr. et al. [17], e um modelo constitutivo de dano contínuo, conforme proposto por Bitencourt Jr. et al. [14], e resumido a seguir:

- Relação constitutiva:

$$\tau = (1 - d) \bar{\tau} \quad (18)$$

- Tensão de cisalhamento efetiva:

$$\bar{\tau} = k \llbracket u_n \rrbracket \quad (19)$$

- Critério de dano:

$$\bar{\phi} = \|\bar{\tau}\| - r \leq 0 \quad (20)$$

- Lei de evolução da variável interna:

$$r = \max |\bar{\tau}| \quad (21)$$

- Evolução da variável de dano:

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (22)$$

onde k é a constante de rigidez elástica na direção do eixo do reforço, $d \in [0, 1]$ é a variável escalar de dano e r é a variável interna de deformação. A função $q(r)$ representa a lei de endurecimento/abrandamento do modelo constitutivo, e pode ser ajustada para qualquer lei de aderência que seja apropriada, $\tau(s)$, assumindo que $q(r) = \tau(r/k)$. A lei de aderência utilizada baseia-se nos estudos de Cunha [18], sendo descrita por:

$$q(r) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{r/k}{s_1} \right)^\alpha & \text{para } r/k \leq s_1 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_{bf})(r/k - s_1)}{s_2 - s_1} & \text{para } s_1 \leq r/k \leq s_2 \\ \tau_{bf} & \text{para } r/k > s_2 \end{cases} \quad (23)$$

3 Resultados e discussões

3.1 Ensaio de tração direta

Neste exemplo é simulado um ensaio de tração direta em um corpo de prova com entalhe (Figura 2), considerando dois casos: concreto simples e reforçado com fibras de aço com um teor em volume de fibras de 0,5%. Na discretização em elementos finitos foram empregados 1282 elementos de treliça com dois nós, 2362 elementos triangulares com três nós e 1788 elementos triangulares de acoplamento com quatro nós.

Foram adotados para o concreto as seguintes propriedades mecânicas: resistência à compressão $f^c = 20MPa$, resistência à tração $f^t = 1.72MPa$, módulo de elasticidade $E^m = 18GPa$, coeficiente de Poisson $\nu^m = 0.20$, energia de fratura $G_f^m = 0.1N/mm$. Foi adotado uma largura da banda de localização $k = 1mm$.

Foram empregadas fibras com as seguintes propriedades geométricas: comprimento de $l^f = 50mm$ e diâmetro de $d^f = 1.05mm$; e propriedades mecânicas: módulo de elasticidade $E^f = 210GPa$ e tensão de escoamento de $\sigma_y^f = 520MPa$.

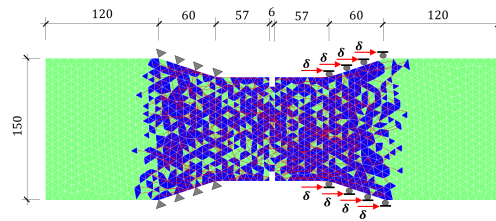


Figura 2. Malha de elementos finitos empregada para o ensaio de tração direta do CRFA (dimensões em mm).

O acoplamento entre as malhas inicialmente independentes da matriz de concreto e das fibras de aço são realizadas por meio de elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós. Para o procedimento de acoplamento foram adotados os seguintes parâmetros: $\tau_{max} = 9.0MPa$, $\tau_f = 1.5MPa$, $\alpha = 0.4$, $s_1 = 0.01mm$, $s_2 = 3.5mm$ e $k = 10^3MPa$.

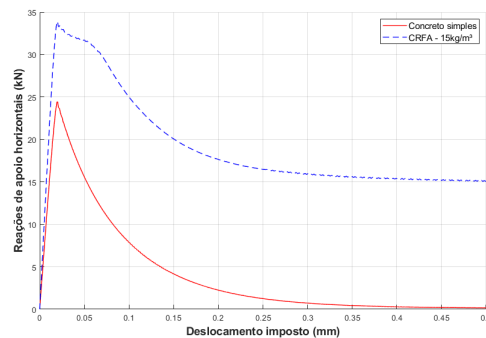


Figura 3. Reações de apoio horizontais x deslocamento imposto (δ) - Comparação entre a respostas para o concreto simples e CRFA.

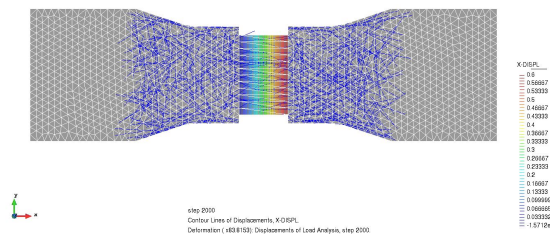


Figura 4. Localização da fratura na viga submetida ao ensaio de tração direta.

3.2 Ensaio de flexão em três pontos com entalhe

Neste segundo exemplo o modelo proposto é empregado para a simulação de ensaio de flexão em três pontos com entalhe conforme EN 14651. Foram considerados ensaios com o concreto simples e CRFA com $V_f = 15kg/m^3$ (Figura 6). A discretização em elementos finitos do problema é ilustrada na Figura 5.

Para o concreto foram adotadas as seguintes propriedades mecânicas: resistência à compressão $f^c = 35MPa$, resistência à tração $f^t = 2.35MPa$, módulo de elasticidade $E^m = 35GPa$, coeficiente de Poisson $\nu^m = 0.2$, e energia de fratura $G_f^m = 0.1N/mm$. Foi também adotada uma largura da banda de localização $k = 1mm$.

Foram empregadas fibras com as seguintes propriedades geométricas: comprimento de $l^f = 50mm$ e diâmetro de $d^f = 0.75mm$; e propriedades mecânicas: módulo de elasticidade $E^f = 210GPa$ e tensão de escoamento de $\sigma_y^f = 1225MPa$.

De forma similar ao exemplo anterior, o acoplamento entre as malhas independentes da matriz de concreto e das fibras de aço são realizadas por meio de elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós. Para este exemplo foram adotados os seguintes parâmetros: $\tau_{max} = 12.5MPa$, $\tau_f = 4.5MPa$, $\alpha = 0.4$, $s_1 = 0.01mm$, $s_2 = 6.5mm$ e $k = 10^3MPa$.

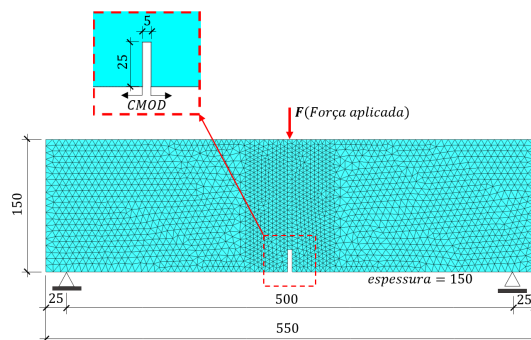


Figura 5. Modelo numérico empregado para a simulação de vigas em três pontos com entalhe: propriedades geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos (dimensões em mm).

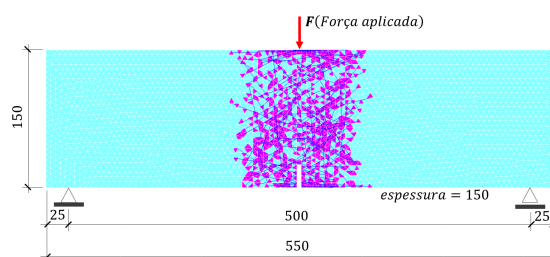


Figura 6. Detalhe do acoplamento fibras/matriz na região central da viga.

As curvas força x CMOD para o concreto simples e CRFA são apresentadas na Figura 7, na qual pode-se perceber claramente o efeito da adição de fibras ao concreto. A Figura 8 ilustra o processo de falha no elemento de CRFA.

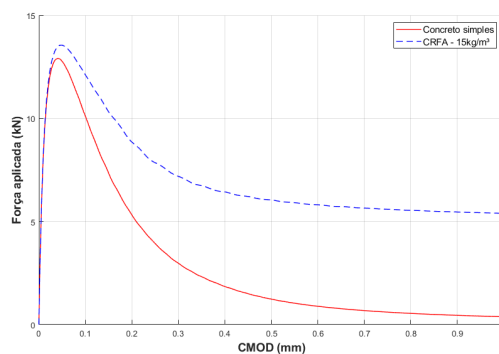


Figura 7. Curvas força aplicada x CMOD para o concreto simples e CRFA.

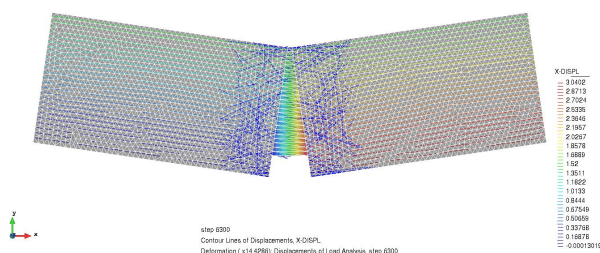


Figura 8. Localização da banda de deformações no ensaio de flexão em três pontos com entalhe (EN).

4 Conclusões

O modelo proposto utilizando elementos finitos com fissuras incorporadas no contexto da aproximação contínua de descontinuidades fortes mostrou-se adequado para a representação da propagação de fissuras no concreto reforçado com fibras de aço. A principal vantagem de utilização dessa abordagem quando comparada a outras metodologias usualmente empregadas (distribuídas e discretas) é a possibilidade de propagação de fissuras no domínio do elemento.

Embora avaliada de forma qualitativa, o efeito da adição de fibras de aço ao concreto utilizando a abordagem com representação discreta e explícita das fibras pode ser visto claramente quando compara-se as respostas obtidas com o concreto simples. Além disso, em trabalhos futuros, pretende-se aprimorar o modelo proposto com um algoritmo de construção de trajetória de propagação de fissuras e modelos constitutivos não lineares para descrever a região contínua do elemento com fissura incorporada a fim de representar o comportamento à compressão do concreto.

Agradecimentos. Luís A. G. Bitencourt Jr. agradece o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processo nº 2019/24487-2) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (processo nº 310401/2019-4).

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído neste documento é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

Referências

- [1] Bentur, A. & Mindess, S., 2007. *Fiber Reinforced Cementitious Composites*. Modern Concrete Technology Series.
- [2] Hillerborg, A., Modeer, M., & Petersson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, n. 6, pp. 773 – 782.
- [3] Hillerborg, A., 1985. *Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete*. Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation.
- [4] Ingraffea, A. R. & Saouma, V., 1984. *Numerical modeling fracture propagation in reinforced and plain concrete*. Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation.
- [5] Rots, J. G. P., Kuster, G. M. A., & Blaauwendraad, J., 1985. Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete. *Heron*, vol. 30, n. 1, pp. 48.
- [6] Rots, J. G., 1991. Smearred and discret representation of localized fracture. *Int. J. Fracture*, vol. 51, pp. 45–59.
- [7] Bazant, Z. P. & Oh, B. H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, vol. 93, n. 16, pp. 155 – 177.
- [8] Cabot, G. P. & Bazant, Z. P., 1987. Nonlocal damage theory. *Jour. Eng. Mech.*, vol. 113, n. 10, pp. 1512–1533.
- [9] Borst, R. D. & Mühlhaus, H. B., 1992. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 35, pp. 521–539.
- [10] Mühlhaus, H. B. & Vardoulakis, I., 1987. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, vol. 37, pp. 271–283.
- [11] Borst, R. D., 1991. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engr. Comp.*, vol. 8, pp. 317–332.
- [12] , 1992. Wave propagation and localization in a rate-dependent cracked medium - model formulation and one-dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, n. 23, pp. 2945 – 2958.
- [13] Lotfi, H. R. & Shing, P. B., 1991. An appraisal of smearred crack models for masonry shear wall analysis. *Computers and Structures*, vol. 41, n. 3, pp. 413–425.
- [14] Bitencourt Jr., L. A. G., Manzoli, O. L., Bittencourt, T. N., & Vecchio, F. J., 2019. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 159, pp. 171 – 190.
- [15] Simó, J. C. & Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag.
- [16] Souza Neto, E., Perić, D., & Owen, D. R. J., 2008. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. Wiley.
- [17] Bitencourt Jr., L. A. G., Manzoli, O. L., Prazeres, P. G. C., Rodrigues, E. A., & Bittencourt, T. N., 2015. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 290, pp. 19 – 44.
- [18] Cunha, V., 2010. *Steel fiber reinforced self-compacting concrete - from micromechanics to composite behavior*. PhD thesis, Department os Civil Engineering, University of Minho, Portugal.