

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE VIGA DE CONCRETO PROTENDIDO EM DUPLO BALANÇO UTILIZANDO UM MODELO PROBABILÍSTICO MACROSCÓPICO

Mariane R. Rita¹, Henrique C. C. de Andrade¹, Magno T. Mota¹, Eduardo de M. R. Fairbairn¹, Fernando L. B. Ribeiro¹, Jean-Louis Tailhan², Pierre Rossi²

¹*Programa de Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia, Ilha do Fundão, CEP: 21941-909, Rio de Janeiro, Brasil
mariane_rita@coc.ufrj.br, henriqueconde@coc.ufrj.br, magnomota@coc.ufrj.br, eduardo@coc.ufrj.br
fernando@coc.ufrj.br*

²*Departamento de Materiais e Estruturas - Université Gustave Eiffel.
jean-louis.tailhan@univ-eiffel.fr, pierre.rossi@univ-eiffel.fr*

Abstract.

The Double Cantilever Beam (DCB) test has been used in many studies, generally in the framework of Fracture Mechanics, in order to characterizing the concrete fracture under tensile loads. This test provides information, such as, the critical stress intensity factor and the critical energy release rate, that allows evaluating the toughness of the material. In this work, a numerical simulation of a prestressed DCB was carried out based on a macroscopic probabilistic model. The macroscopic probabilistic approach is developed in the context of the finite element method (FEM) and considers that each finite element represents of a heterogeneous material volume. The probabilistic aspect is introduced in the model by considering random distributions of tensile strength and local cracking energy at the local scale of the material. That states the cracks are created within the concrete with different energy dissipation depending on the spatial distribution of constituents and initial defects. To furnish consistent statistical results, the Monte Carlo procedure is used. Promising results in terms of global behaviour and macrocracking information in a very large prestressed DCB specimen are presented.

Keywords: Modelagem Numérica, Ensaio de Viga em Duplo Balanço, Fissuração do Concreto, Modelo Probabilístico

1 Introdução

A modelagem numérica do concreto vem sendo empregada de diversas maneiras ao longo dos anos e enfrenta desafios devido à complexidade do material. Por conta disso, existem vários modelos com diferentes aplicações, dentre os quais se encontram os probabilísticos, em que propriedades mecânicas do material são distribuídas aleatoriamente na malha de elementos finitos, por meio de funções de distribuição de probabilidade ([1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6] e [7]).

No contexto da modelagem probabilística da fissuração do concreto, encontra-se o modelo denominado macroscópico que tem como objetivo simular o comportamento global de estruturas de concreto com um padrão localizado de microfissuras [7]. Por conta disso, este trabalho tem como objetivo simular o comportamento de um elemento estrutural de concreto protendido submetido ao teste *Double Cantilever Beam (DCB)*, em português, teste de viga em duplo balanço (VDB).

São realizadas análises tridimensionais do problema e a validação estatística dos resultados é feita por meio do procedimento de Monte Carlo. O modelo foi implementado dentro do quadro do método dos elementos finitos (MEF), em linguagem de programação FORTRAN, numa plataforma que vem sendo desenvolvida e aperfeiçoada por pesquisadores do programa de engenharia civil da COPPE/UFRJ. Esta plataforma já foi utilizada em trabalhos publicados na literatura para diferentes aplicações ([8]; [9]; [10]; [11]; [12]; [13]; [14]; [15]; [16]; [17]).

2 Modelo Probabilístico Macroscópico de Fissuração do Concreto

A ideia básica do modelo desenvolvido por Rossi and Wu [1], considera que o comportamento mecânico de cada elemento finito depende do seu tamanho e está sujeito à variações aleatórias. Assim, cada elemento finito representa um volume de material heterogêneo cujo comportamento é controlado pelo seu grau de heterogeneidade $r_e = V_e/V_g$, onde V_e é o volume do elemento finito e V_g volume máximo do agregado. O modelo incorpora essa heterogeneidade por meio da distribuição aleatória de propriedades mecânicas de resistência à tração (f_t) e energia de fratura (G_c) na malha de elementos finitos.

O processo de fissuração, em um nível elementar, induz a uma dissipação local de energia, que é representada por uma lei de dano isotrópica que começa atuar quando a máxima tensão principal do elemento atinge seu valor de resistência a tração. Neste ponto, inicia-se, o processo de evolução do dano, que termina quando a quantidade de energia disponível para aquele elemento for totalmente consumida [18].

Por questões de simplificação, considera-se uma formulação bilinear da relação tensão-deformação (σ, ε) para simular o comportamento de amolecimento do material. A lei constitutiva (σ, ε) é completamente definida pela resistência à tração e pela densidade volumétrica de energia dissipada (g_c) [19]. Esta última pode ser calculada com base na energia de fratura do material: $g_c = G_c/l_e$. Onde l_e representa o tamanho característico elementar e pode ser estimado como: $l_e = \sqrt[3]{V_e}$ [20].

Considera-se que a energia consumida pela criação e propagação de uma microfissura, é dada em um nível macroscópico, como consequência da fissuração de sucessivos elementos ([21], [19]). Além disso, essa energia pode ser considerada como um parâmetro intrínseco do material, em termos de valor médio, sendo dependente apenas do tipo de concreto [7].

O modelo é probabilístico no que diz respeito à distribuição aleatória das propriedades do material, por conta disso, nas seções abaixo serão descritos os procedimentos utilizados para realizar essa distribuição e para o cálculo dos seus respectivos parâmetros. Mais detalhes sobre a formulação da lei de dano e implementação do modelo podem ser encontrados em Rita et al. [17].

2.1 Distribuição de Propriedades Aleatórias do Material

Para distribuição aleatória da resistência à tração (f_t), utiliza-se a lei de Weibull ([22],[23]). Diz-se que uma variável aleatória x segue a distribuição de Weibull (com dois parâmetros) se sua função densidade de probabilidade é definida pela função $f(x, b, c) : x \in (0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}$, tal como:

$$f(x, b, c) = \frac{b}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b} \quad (1)$$

onde b é chamado parâmetro de forma e c parâmetro de escala da distribuição, cuja média (μ) e desvio padrão (σ) são dados por,

$$\mu = c \times \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right) \quad (2)$$

$$\sigma^2 = c^2 \times \Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \mu^2 \quad (3)$$

Para a energia de fratura (G_c), utiliza-se a lei distribuição lognormal que tem função de densidade de probabilidade definida por $f(x, \mu, \sigma) : x \in (0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}$ tal como segue na eq. (4).

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\mu\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (4)$$

onde, μ é a média e σ o desvio padrão do logaritmo natural da variável, cujo valor esperado $E(X)$ e variância $Var(X)$ são dados pelas equações (5) e (6). O desvio padrão será considerado como a medida de dispersão da distribuição e será denotado como $d_{log} = \sqrt{Var(X)}$.

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (5)$$

$$Var(x) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2} \quad (6)$$

Cada uma das distribuições possui dois parâmetros que precisam ser determinados adequadamente para representar o comportamento do material. Contudo, visto que a energia de fratura pode ser considerada como uma propriedade intrínseca do material, adota-se que, em termos de média, seu valor é constante e igual ao valor obtido experimentalmente por Rossi [24]: $G_c = 1.3141 \times 10^{-4} \text{ MN/m}$, sendo seu desvio padrão o único parâmetro a ser determinado.

Dessa forma, para aplicar o modelo, precisamos determinar os parâmetros b e c da lei de Weibull e d_{log} da lei lognormal. A maneira mais eficaz de obtê-los é por meio de uma análise inversa a partir de dados experimentais. No entanto, este procedimento é complexo e computacionalmente custoso. Por conta disso, algumas alternativas podem ser sugeridas para estimar estes parâmetros como uma primeira aproximação.

Para a energia de fratura, considerou-se um volume elementar médio no ramo central do espécime, onde a microfissura se propaga, como sendo o V_e de influência do material, visto que a fissura se concentra apenas neste local e são estes elementos que contribuem para o resultado mecânico global da solução. Assim, foram realizadas diversas simulações, tendo-se fixado os parâmetros b e c , para estimar o valor de d_{log} que melhor representa o comportamento do ramo pós-pico, indicativo da propagação da fissura.

Para os parâmetros da lei de Weibull, desenvolveu-se um procedimento numérico iterativo para calculá-los a partir de um sistema não linear de equações, formado com base nas equações de média (μ) e desvio padrão (σ) da distribuição. Para obtenção desses valores em função de V_e/V_g , utilizou-se as equações (7) e (9) apresentadas por Rossi et al. [3], considerando-se que o volume de material solicitado é igual ao volume do elemento finito.

$$\mu(f_t) = a \left(\frac{V_e}{V_g} \right)^{-\gamma} \quad (7)$$

onde, $a = 6.5 \text{ MPa}$ e γ é dada pela eq. (8),

$$\gamma = 0.25 - 3.6 \times 10^{-3} \left(\frac{f_c}{c_1} \right) + 1.3 \times 10^{-5} \left(\frac{f_c}{c_1} \right)^2 \quad (8)$$

$$\frac{\sigma}{\mu}(f_t) = A \left(\frac{V_e}{V_g} \right)^{-B} \quad (9)$$

onde, $A = 0.35$; a constante $c_1 = 1 \text{ MPa}$ e B é dada pela eq. (10),

$$B = 4.5 \times 10^{-2} + 4.5 \times 10^{-3} \left(\frac{f_c}{c_1} \right) - 1.8 \times 10^{-5} \left(\frac{f_c}{c_1} \right)^2 \quad (10)$$

Assim, para cada elemento na malha, obteve-se um respectivo par (b, c) da lei de Weibull em função de seu volume e da resistência à compressão f_c que é representativa da qualidade do concreto. Contudo, devido ao fato desta formulação só ter sido validada para o intervalo $r_e \in [10, 10000]$, foi necessário ajustar o valor de média dada pela função nos elementos em que $r_e < 10$ (cerca de 10%), a fim de que o pico do ensaio fosse bem representado. Esta estimativa também foi feita fixando-se os demais parâmetros e multiplicando o valor de μ (somente nestes elementos) por uma constante até que o pico, indicativo da inicialização da fissura, fosse bem representado.

2.2 Procedimento Numérico para Cálculo dos Parâmetros da Distribuição de Weibull

A formulação do procedimento utilizado para a determinação dos parâmetros (b, c) da distribuição de Weibull, cuja média (μ) e desvio padrão (σ) foram obtidos conforme explicado anteriormente, e o algoritmo implementado são brevemente apresentados.

Formulação

Para obter o sistema não linear a ser resolvido, primeiro define-se duas variáveis auxiliares, são elas: $z = 1/b$ e $w = 2/b$. Substituindo-as nas equações (2) e (3), respectivamente, obtém-se:

$$\mu = c \times \Gamma(1 + z) \quad (11)$$

$$\sigma^2 = c^2 \times \Gamma(1 + w) - \mu^2 \quad (12)$$

Considerando-se a seguinte propriedade $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$, pode-se reescrever as equações (11) e (12) da seguinte maneira,

$$\mu = c \times z \times \Gamma(z). \quad (13)$$

$$\sigma^2 = c^2 \times w \times \Gamma(w) - \mu^2. \quad (14)$$

Finalmente, as equações (13) e (14) podem ser representadas por um sistema não linear com 3 equações e 3 incógnitas,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z \times \Gamma(z) & 0 & 0 \\ 0 & c^2 \times \Gamma(w) & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ w \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 + \mu^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (15)$$

Este sistema também pode ser escrito de uma forma mais compacta, através de uma notação matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Onde \mathbf{A} é a matriz 3×3 indicada e tem-se que: $\mathbf{x}^T = [c \quad w \quad z]$ e $\mathbf{b}^T = [\mu \quad \sigma^2 + \mu^2 \quad 0]$.

Algoritmo

A solução desse sistema foi obtida por meio do método iterativo das substituições sucessivas de *Picard* [25], que tem como grande vantagem ser de simples implementação. O procedimento não linear de solução é dado pelo algoritmo abaixo onde α é o parâmetro de sub-relaxamento ($\alpha = (0, 1]$).

Algorithm 1 Processo iterativo não linear de *Picard*

- 1: **for** $k = 0, \dots, It$ **do**
 - 2: $\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k$
 - 3: **if** $\|\mathbf{R}\| < tol$ **then**
 - 4: **exit**
 - 5: **end if**
 - 6: $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{x}_k)$
 - 7: $\mathbf{x}_{k+1} = \alpha\mathbf{x}^* + (1 - \alpha)\mathbf{x}_k$
 - 8: **end for**
 - 9: $\mathbf{x}_{n+1}^s = \mathbf{x}^k$
-

A linha 7 do Algoritmo 1 foi adicionada para aumentar a robustez do processo iterativo de solução. Esta modificação não existe no método original, porém é bastante utilizada em soluções de problemas não lineares [26]. O chute inicial do processo iterativo pode ser igual a $\mathbf{x}_0^T = [\mu \quad \frac{2\mu}{\sigma} \quad \frac{\mu}{\sigma}]$.

3 Ensaio de Viga em Duplo Balanço

O ensaio VDB está relacionado à propagação de microfissuras em uma viga em duplo balanço de grande dimensão, cuja campanha experimental foi realizada no contexto da tese de doutorado de Rossi [24] e as características geométricas podem ser vistas na Fig. 1(a). Neste trabalho, foram realizados ensaios com concreto simples (com e sem carga de protensão), concreto com fibras e concreto armado. Em um estudo realizado por Rita et al. [17], simulou-se este ensaio para o caso do concreto simples sem protensão. Agora, estuda-se a aplicação do modelo para concreto simples com aplicação de uma carga de protensão de 1230 KN, com intuito de concentrar a propagação da microfissura no centro do espécime, uma vez que durante a realização do ensaio experimental observou-se uma bifurcação prematura da fissura.

A malha de elementos finitos é composta por elementos tetraédricos, aproximados por funções de interpolação lineares, contendo 19395 elementos e 4496 nós. As condições de contorno foram impostas de forma compatível com o ensaio experimental, os locais de aplicação dos deslocamentos na direção transversal e da carga de protensão na direção longitudinal estão indicados na Fig. 1(b).

Os dados utilizados na simulação correspondem a um concreto simples, cuja composição foi descrita por Tailhan et al. [7] e os parâmetros mecânicos são: módulo de elasticidade $E = 36 \text{ GPa}$; resistência à compressão $f_c = 50 \text{ MPa}$. Para o modelo numérico utilizou-se: coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$; parâmetros da distribuição lognormal: média $G_c = 1.314 \times 10^{-4} \text{ MN/m}$ e desvio padrão $d_{log} = 3.942 \times 10^{-3} \text{ MN/m}$; parâmetros da lei de Weibull obtidos pelo procedimento iterativo.

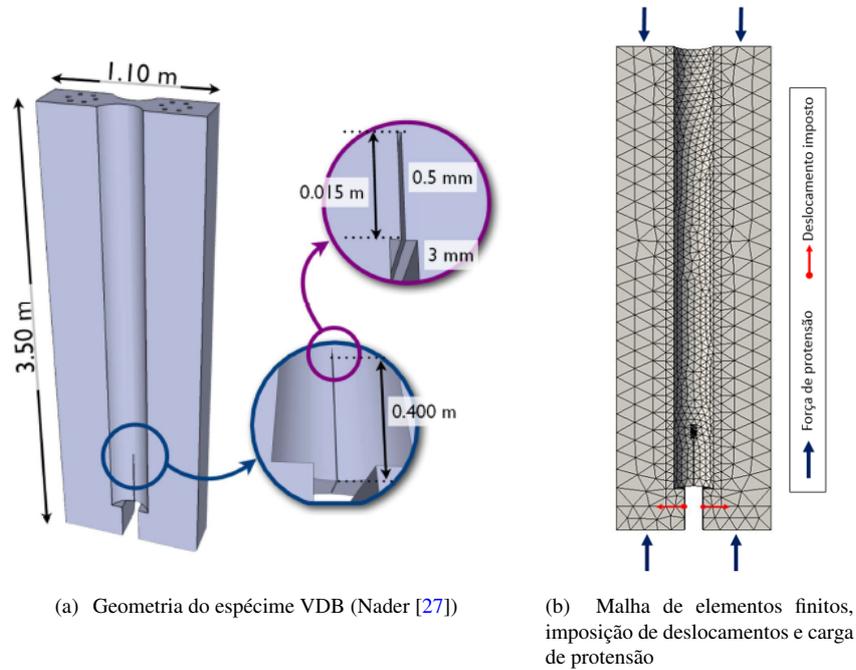
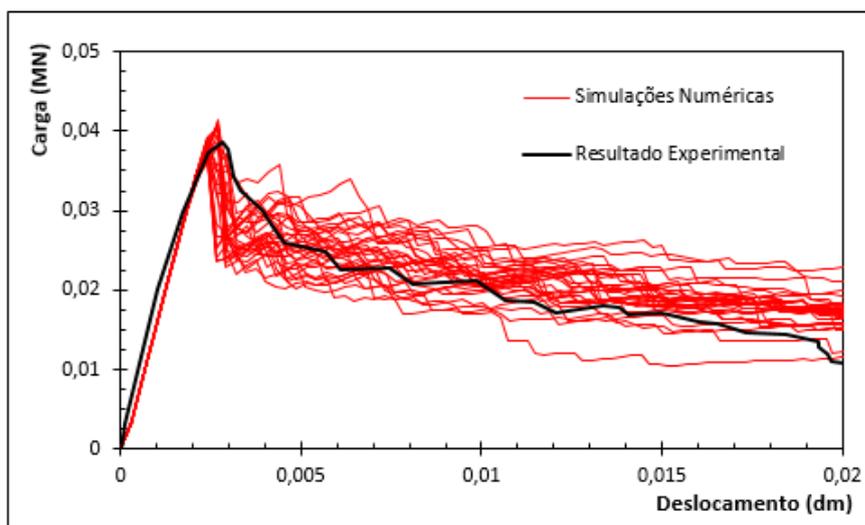


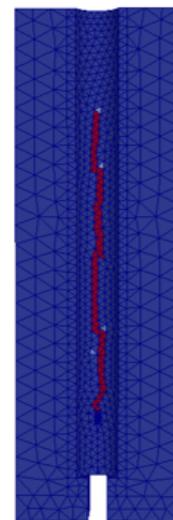
Figura 1. Características do espécime VDB analisado.

4 Resultados

Os deslocamentos aplicados possuem incremento de $0.25 \times 10^{-3} dm$ num número total de 80 incrementos para cada análise. A resposta do comportamento global da estrutura é obtida pelo método de Monte Carlo, onde foram realizadas 30 análises do ensaio (número suficiente de amostras em termos de convergência do comportamento médio global). Estes resultados são apresentados na Fig. 2(a) por meio das curvas de carga \times deslocamento, dadas em termos de DARF (deslocamento de abertura da boca da fissura). As curvas em vermelho representam as respostas do comportamento mecânico das simulações numéricas e a curva em negrito representa o resultado experimental obtido por Rossi [24].



(a) Resposta do comportamento global das simulações do espécime DCB



(b) Exemplo de macrofissura obtida com o modelo em uma das simulações do Monte Carlo.

Figura 2. Resultado obtido com o modelo macroscópico probabilístico.

Nota-se que a curva experimental está compreendida dentre o conjunto das análises numéricas. Além disso, o comprimento da fissura obtido experimentalmente foi 2.09 m, enquanto o comprimento médio de fissura numérico foi 2.21 m, o que corresponde à verificação de uma diferença de 5.7% em relação ao experimento. Esses resultados permitem afirmar que as respostas globais obtidas pelo modelo macroscópico probabilístico foi satisfatória.

Verifica-se também, conforme ilustrado na Fig. 2(b), que a direção de propagação da microfissura, obtida com o modelo, está concentrada na região central do espécime, coerentemente com o que se esperava.

5 Conclusões

Um modelo probabilístico macroscópico foi utilizado para simular o comportamento global do elemento estrutural (VDB) de concreto protendido. O modelo forneceu uma descrição satisfatória da microfissura envolvida no processo de fissuração, tanto por meio das curvas carga-DARF, que compreenderam a curva experimental, como pelo comprimento médio da microfissura, que diferiu 5.7% da medida obtida no experimento.

A estratégia proposta para estimação dos parâmetros das funções de distribuição de probabilidade, aplicados neste problema em particular, se mostrou satisfatória. No entanto, para trabalhos futuros, é necessário que um procedimento de análise inversa seja realizado para obtê-los com mais precisão, de modo a garantir que eles caracterizem adequadamente o material, levando em conta seus efeitos de heterogeneidade e efeito escala.

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ.

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

Referências

- [1] Rossi, P. & Wu, X., 1992. Probabilistic model for material behavior analysis and appraisalment of concrete structures. *Magazine of Concrete Research*, vol. 44, pp. 271–280.
- [2] Rossi, P., Wu, X., Le Maou, F., & Belloc, A., 1992. Effet d'échelle sur le comportement du béton en traction. *BLPC*, vol. 182, pp. 11–20.
- [3] Rossi, P., Wu, X., Le Maou, F., & Belloc, A., 1994. Scale effect on concrete in tension. *Materials and Structures*, vol. 27, pp. 437–444.
- [4] Fairbairn, E., Q., G., & Ulm, J., 1999. An inverse problem analysis for the determination of probabilistic parameters of concrete behavior modeled by a statistical approach. *Materials and Structures*, vol. 32, pp. 9–13.
- [5] Tailhan, J.-L., Rossi, P., & Dal Pont, S., 2008. Macroscopic probabilistic modelling of cracking processes in concrete structures. In *Proceedings of World Conference on Computational Mechanics - European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (WCCM-ECCOMAS)*, Venice, Italy.
- [6] Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T., & Foulliaron, J., 2012. Probabilistic modelling of crack creation and propagation in concrete structures: some numerical and mechanical considerations. In *Proceedings of Numerical Modeling Strategies for Sustainable Concrete Structures (SSCS)*, Aix-en-Provence, France.
- [7] Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T., Rastello, G., & Foulliaron, J., 2013. Multiscale probabilistic approaches and strategies for the modelling of concrete. In *Proceedings of FRAMCOS-8*, Toledo, Spain.
- [8] Ribeiro, F. L. B. & Ferreira, I. A., 2007. Parallel implementation of the finite element method using compressed data structures. *Computational Mechanics*, vol. 41, pp. 31–48.
- [9] Ferreira, I., 2008. *Solução em paralelo de um modelo termo-químico-mecânico para concreto jovem*. PhD thesis, Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- [10] Ainsworth, G., Ribeiro, F., & Magluta, C., 2011. A parallel subdomain by subdomain implementation of the implicitly restarted arnoldi/lanczos method. *Computational Mechanics*, vol. 48, pp. 563–577.
- [11] Silva, A. B., Telles, J. C. F., Fairbairn, E. M. R., & Ribeiro, F., 2015. A general tangent operator applied to concrete using a multi-surface plasticity model. *Computers and Concrete, an International Journal (Print)*, vol. 16, pp. 329–342.
- [12] Silva, A. B. C. G., Laszczyk, J., Wrobel, L. C., Ribeiro, F. L. B., & Nowak, A. J., 2016. A thermoregulation model for hypothermic treatment of neonates. *MEDICAL ENGINEERING & PHYSICS*, vol. 38, pp. 988–998.

- [13] Rita, M., Fairbairn, E., Ribeiro, F., Andrade, H., & Barbosa, H., 2018a. Optimization of mass concrete construction using a twofold parallel genetic algorithm. *Applied Sciences*, vol. 8.
- [14] Mota, M. T., Rita, M. R., Fairbairn, E., & Ribeiro, F., 2018. Reprodução do comportamento de amolecimento do concreto por meio de modelo probabilístico tridimensional de fissuração. In *Anais do XIII SIMMEC 2018 - Simpósio de Mecânica Computacional*, Vitória, Brasil.
- [15] Rita, M. R., Mota, M. T., Fairbairn, E., & Ribeiro, F., 2018b. Verificação de efeito escala em concreto sob tração utilizando um modelo probabilístico. In *Anais do XIII SIMMEC 2018 - Simpósio de Mecânica Computacional*, Vitória, Brasil.
- [16] Silva, A. B. C. G., Wrobel, L. C., & Ribeiro, F. L. B., 2018. A thermoregulation model for whole body cooling hypothermia. *JOURNAL OF THERMAL BIOLOGY*, vol. 78, pp. 122–130.
- [17] Rita, M. R., Mota, M. T., Andrade, H. C. C., Fairbairn, E. M., Ribeiro, F. L. B., Tailhan, J.-L., & Rossi, P., 2019. Modelagem numérica do ensaio de viga em duplo balanço utilizando um modelo probabilístico. In *Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Natal, Brasil. ABMEC.
- [18] Rastiello, G., 2013. *Influence de la fissuration sur le transfert de fluides dans les structures en béton. Stratégies de modélisation probabiliste et étude expérimentale*. PhD thesis, Université Paris-Est, IFSTTAR, Paris, France.
- [19] Rastiello, G., Tailhan, J.-L., Rossi, P., & Dal Pont, S., 2015. Macroscopic probabilistic cracking approach for the numerical modelling of fluid leakage in concrete. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 7, pp. 1–16.
- [20] Bazant, Z. & Oh, B., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Material and Structures*, vol. 3, pp. 155–177.
- [21] Tailhan, J.-L., Dal Pont, S., & Rossi, P., 2010. From local to global probabilistic modeling of concrete cracking. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 1, pp. 103–115.
- [22] Weibull, W., 1939. A statistical theory of the strength of materials. In *Proceedings of The Royal Swedish Institute for Engineering Research*.
- [23] Weibull, W., 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, vol. 18, pp. 293–297.
- [24] Rossi, P., 1988. *Fissuration du béton: du matériau à la structure-application de la mécanique lineaire de la rupture*. PhD thesis, L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- [25] Kelley, C. T., 1995. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM.
- [26] Moukalled, F., Darwish, M., & Mangani, L., 2015. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Springer International Publishing.
- [27] Nader, C., 2017. *A Multi-Scale Strategy for the Probabilistic Modeling of Reinforced Concrete Structures*. PhD thesis, Université Paris-Est, IFSTTAR, Paris, France.