

Revisiting the topological enrichment pattern in the linear elastic fracture modeling via GFEM / XFEM

Diego Amadeu F. Torres

Department of Mechanical Engineering, Federal University of Technology of Paraná
Londrina, 86036-370, Paraná, Brazil
diego.amadeu@gmail.com

Abstract. The way of performing special enrichment to model crack tip singularities, in the linear elastic fracture analysis via Partition of Unity (PoU) based methods, has been an issue of concern over the past two decades. One aspect of significant importance is to alleviate the mesh dependences to assure convergence rates do not be adversely affected by the discretization h -parameter reduction. The geometric enrichment pattern emerged as the preferable strategy to reach such a goal. Additionally, the PoU regularity has been identified as a feature of great impact in the ansatz's capability of capturing the singularity of such especial enrichments, as shown in recent results in the context of C^k -GFEM. Thus, once lower dependence on the enrichment zone size has been found in the case of using smooth PoU functions, the enrichment strategies which lead to a smaller increment in the amount of DOF become attractive again. This work aims to study how the topological pattern of enrichment performs in the case of the C^k -GFEM if compared to the conventional XFEM / GFEM. Different schemes of polynomial enrichment are also considered trying to enlighten some blending / transition effects. The approximations performances are assessed by crack severity parameters computation using the material forces method.

Keywords: smoothness, PoU-based methods, linear elastic fracture, enrichment patterns

1 Introduction

Este trabalho pretende avaliar ambas as versões do *Método de Elementos Finitos Generalizado* (MEFG) ao padrão de enriquecimento singular, próprio de modelagens em *Mecânica da Fratura Elástica Linear* (MFEL), que foi concebido para inserir a singularidade no sub-espaço de aproximação de forma mais grosseira¹. Tal estratégia é chamada de *padrão topológico* e desencadeia dificuldades de convergência para o MEFG C^0 convencional, como é bem conhecido a partir dos trabalhos de Laborde et al. [1], Béchet et al. [2] e Tarancón et al. [3].

Para o padrão topológico, as *funções de enriquecimento singular* são aplicadas sobre um conjunto fixo de nós ao redor da ponta da trinca. Desta forma, a dimensão desta zona enriquecida é dependente do refinamento da malha. Além disso, a função *degrau Heaviside* é aplicada somente aos nós justamente margeando os segmentos da trinca. Em outras palavras, somente os nós mais próximos da trajetória da trinca são enriquecidos. Conceitualmente, tal enriquecimento topológico é o padrão de enriquecimento mais barato computacionalmente, visto que este adiciona menos *Graus de Liberdade* (GL) quando comparado ao padrão geométrico².

O MEFG é um consagrado método baseado na *Partição da Unidade* (PU), e se apresenta em sua versão original com baixa regularidade, o MEFG C^0 (conceitualmente, idêntico ao XFEM³), e na versão suave, com alta regularidade, o MEFG C^k . Esta última é bastante versátil porque permite a construção de funções PU arbitrariamente contínuas em malhas de elementos finitos, inclusive para malhas irregulares / não-estruturadas (de Barcellos et al. [4], Mendonça et al. [5]), e para qualquer geometria de elementos. O procedimento usado aqui segue de Barcellos et al. [4], que foi originalmente proposto por Edwards [6], e generalizado por Duarte et al. [7] para acomodar nuvens arbitrariamente poligonais.

O principal propósito deste trabalho é analisar, uma vez mais, o padrão topológico de enriquecimento singular, porém no contexto de uma comparação de performance entre as duas versões do MEFG. O estudo é conduzido

¹Sem maiores cuidados com os fenômenos de transição/mistura

²Para o padrão de enriquecimento geométrico, todos os nós no interior de uma região com dimensão prescrita ao redor da ponta da trinca são enriquecidos com funções singulares, independentemente do tamanho dos elementos da malha.

³Abreviação de *extended Finite Element Method*, designado em língua portuguesa por Método de Elementos Finitos Estendido, frequentemente.

através da avaliação numérica da integral \mathcal{J} mediante método das *forças configuracionais* (Mueller and Maugin [8], Häusler et al. [9]). Esta investigação é uma continuação do estudo reportado em Torres et al. [10], onde maiores detalhes da formulação e sua implementação poderão ser encontrados.

2 Problema modelo

O problema clássico da MFEL, uma placa quadrada de espessura constante e com uma trinca retilínea se estendendo de uma das bordas até o ponto central, foi considerado para experimentos numéricos. Para isto, um domínio quadrilateral com dimensões $\bar{\Omega} = [0, 2a] \times [0, 2a]$, sendo a dimensão característica $a = 60$, foi usado, com espessura $l_z = 1$, sob condição de estado plano de deformações. A trinca é definida por $\Gamma_C = [0, a] \times \{a\}$, que atinge a aresta esquerda do domínio, e a relação tensão-deformação é suposta ser linear elástica, em regime de deformações infinitesimais, com módulo de Young $E = 1$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

As condições de contorno de Neumann são calculadas usando os termos dominantes das soluções assintóticas para tensões (Westergaard [11], Anderson [12]), considerando um sistema de coordenadas polares cuja origem está na ponta da trinca, de tal modo que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, sendo $\theta = 0$ a direção tangente às faces da trinca. As restrições de deslocamento $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = u_x(0, 2a) = 0$ são impostas para suprimir os movimentos de corpo rígido, considerando coordenadas cartesianas, com origem na extremidade inferior esquerda do domínio.

O modo I de abertura de trinca puro é estudado considerando um fator de intensidade de tensão prescrito $K_I = 1$, enquanto para um modo misto de abertura as condições de contorno de Neumann são calculadas considerando $K_I = K_{II} = 1$. Neste estudo, a taxa de liberação de energia \mathcal{G} , e consequentemente o valor exato da integral \mathcal{J} , que será calculada mediante forças configuracionais, são conhecidos em princípio, portanto.

Foi considerado somente um padrão regular e uniforme de malhas de elementos triangulares. As malhas foram projetadas para possuírem somente nuvens convexas⁴. Ainda, garantiu-se que sempre existam elementos cortados pela trinca, de modo que sua ponta esteja sempre posicionada no interior de um elemento, compondo uma situação menos favorável em se tratando de aproximações MEFG.

O MEFG C^k conduz a uma aproximação completamente $C^\infty(\Omega)$ quando malhas tendo somente nuvens convexas são usadas juntamente com funções de aresta exponenciais. Aqui, optou-se pelo procedimento descrito em de Barcellos et al. [4], considerando $\gamma = 0,3$ e $\beta = 0,6$. Deste modo, deve-se notar que as aproximações MEFG C^k reportadas aqui são infinitamente suaves, isto é, com $k = \infty$.

2.1 Padrões de enriquecimento

Para se entender os benefícios obtidos com a suavidade da PU, as malhas mostradas na Fig. 1 foram consideradas. Uma vez que o segmento de trinca é retilíneo, sua completa representação é feita usando somente as *funções de ponta de trinca* (Belytschko and Black [13], Moës et al. [14]), aplicadas aos nós associados aos elementos seccionados, os nós marcados em verde. Este enriquecimento introduz a singularidade e a descontinuidade simultaneamente.

A função de enriquecimento *de grau Heaviside* (Laborde et al. [1], Béchet et al. [2], Belytschko and Black [13], Moës et al. [14]) para nós distantes da ponta da trinca foi evitada objetivando-se reduzir fontes de erro na zona de transição/mistura, ou seja, nos elementos contendo diferentes tipos de funções de enriquecimento singular ou descontínuo, ou ainda naqueles onde somente alguns dos seus nós são enriquecidos.

Adicionalmente às funções de ponta de trinca, um *enriquecimento polinomial*, à maneira de Torres et al. [10], Duarte et al. [15], uniforme sobre toda a malha foi executado até grau $b = 2$, com o propósito de permitir que as aproximações acomodem modos de deformação mais ricos e a melhor incorporação das condições de contorno de Neumann, visto que $b = 1$ pode não ser suficiente para aproximar o carregamento de superfície apropriadamente.

Para viabilizar a comparação entre as duas versões do MEFG para um dado grau de reproduzibilidade polinomial, um grau polinomial b é definido para a base resultante, em outras palavras, para o sub-espço de aproximação uniformemente enriquecido com monômios, como sugerido em Mendonça et al. [16].

Além do enriquecimento polinomial uniforme, um enriquecimento localizado com um grau superior foi também aplicado. Inicialmente, somente os nós do elemento contendo a ponta da trinca foram enriquecidos. Este enriquecimento polinomial localizado mínimo é chamado aqui de padrão “cloud”. Após este, outra estratégia foi testada, na qual todos os nós dos elementos ao redor daquele contendo a singularidade foram enriquecidos também. Esta segunda abordagem é referida como padrão “layer”, veja a Fig. 1(e), e note que o elemento com a singularidade, juntamente com a primeira camada de elementos ao seu redor, compõem uma região completamente enriquecida com funções polinomiais de grau superior. Esta sequência de enriquecimentos polinomiais localizados é executada para estudar sua influência no efeito de transição causado pelo enriquecimento singular.

⁴Deve-se salientar que isto é uma escolha da presente investigação e não uma limitação da metodologia.

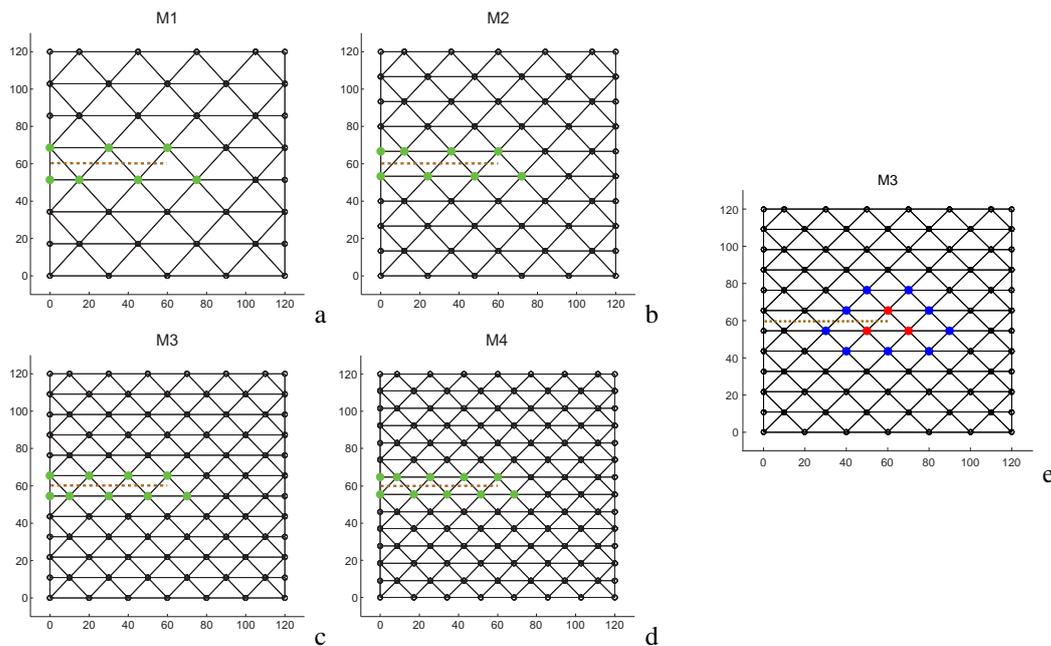


Figure 1. Discretizações para uma trinca definida por $\Gamma_C = [0, 60] \times \{60\}$ (linha tracejada marrom). Funções de enriquecimento singular são aplicadas de acordo com o padrão topológico, nós marcados em verde. Funções de enriquecimento polinomial são também localmente aplicadas. (e) Tomando a malha M3 como exemplo, os nós marcados em vermelho são enriquecidos com monômios de grau superior aos aplicados no restante da malha no caso do padrão “cloud”. Para o padrão “layer”, os nós marcados em vermelho, assim como os nós azuis, são enriquecidos com monômios de grau superior.

2.2 Integração numérica

No caso do MEFG C^k enriquecido com funções singulares, a integração numérica das contribuições de rigidez dos elementos requer esforço especial. O esquema de quadratura usado aqui segue aquele concebido para a investigação relatada em Torres et al. [10]. Deve ser enfatizado que somente um único esquema de quadratura foi considerado para cada malha usada, independentemente do grau de enriquecimento polinomial e do tipo de PU.

3 Resultados e discussão

A taxa de liberação de energia \mathcal{G} , no caso da MFEL, é igual à integral \mathcal{J} [12, 17] e, por sua vez, esta última pode ser relacionada aos fatores de intensidade de tensão [18]. A integral \mathcal{J} pode ser também relacionada às forças nodais configuracionais como discutido em Torres et al. [10], usando o formalismo da mecânica Eshelbiana [19].

Serão examinados aqui os efeitos da suavidade da PU no cômputo da integral \mathcal{J} , cujo valor foi obtido somando-se as componentes x das forças configuracionais G_α (vide Torres et al. [10]), pós-processadas, dos três nós ao redor da ponta da trinca.

Para o enriquecimento polinomial localizado, quer seja mediante o padrão “cloud” ou “layer”, o grau polinomial foi progressivamente aumentado até $p = 3$ para C^0 , e até $p = 4$ para C^k . O grau p é o grau máximo dos monômios de enriquecimento polinomial. Assim, o número máximo de coeficientes nodais, para os nós nestas zonas enriquecidas, é o mesmo nas duas versões do MEFG.

Nas figuras seguintes, os quatro pontos de uma mesma cor correspondem aos níveis de refinamento de malha, conforme a Fig. 1, para cada combinação de grau polinomial uniforme b e localizado p estudados. Para cada conjunto de quatro pontos foi realizado um ajuste de curva linear, a partir do qual foram obtidas as taxas de convergência, buscando entender melhor os efeitos da suavidade na convergência- h . Para tanto, foi considerado o logaritmo de $GL^{1/2}$ ao longo do eixo horizontal, com GL sendo o número de graus de liberdade do modelo, e o logaritmo do erro relativo na integral \mathcal{J} no eixo vertical.

Deve-se ressaltar que o padrão topológico de enriquecimento singular pode não remover completamente a singularidade da solução que se pretende aproximar, como se pode argumentar ser possível através do padrão geométrico. O MEFG C^0 , em malhas de elementos quadrangulares, quando aplicando o padrão topológico de

enriquecimento singular converge, para a energia de deformação, com a mesma taxa que o MEF convencional sem refinamento de malha especial (Laborde et al. [1], Béchet et al. [2]).

Análises complementares realizadas no âmbito desta investigação mostraram que em malhas de elementos finitos triangulares a taxa de convergência do MEF, para a energia de deformação, é ligeiramente menor que aquela verificada para malhas de elementos quadrangulares. Deve-se observar que a PU em malhas triangulares é mais pobre que a PU em malhas quadrangulares.

Então, tem-se concluído, a partir do exposto na literatura, que o problema baseado em MEFG C^0 com padrão topológico de enriquecimento singular se enquadra na categoria B^5 , no sentido de Szabó and Babuška [20]. Neste contexto, a taxa de convergência teórica para o MEF⁶ em termos da energia de deformação e $GL^{1/2}$ é 1, quando usando refinamentos de malha regulares e uniformes, independentemente do grau da aproximação, sendo portanto governada pela ordem da singularidade⁷.

É também sabido que o erro em termos dos fatores de intensidade de tensão tende a convergir com a mesma taxa que o erro na integral \mathcal{J} (Béchet et al. [2]). Além disso, a taxa de convergência para a integral \mathcal{J} tende a ser a mesma verificada para a energia de deformação no caso de MEF hierárquico de alto grau polinomial (Szabó and Yosibash [21]).

As figuras 2 e 3 mostram o erro relativo na integral \mathcal{J} para o MEFG C^0 e C^k , respectivamente, no caso de carregamento para modo I puro de abertura de trinca. Por outro lado, os resultados obtidos para o carregamento associado ao modo misto de abertura de trinca são mostrados nas figuras 4 e 5.

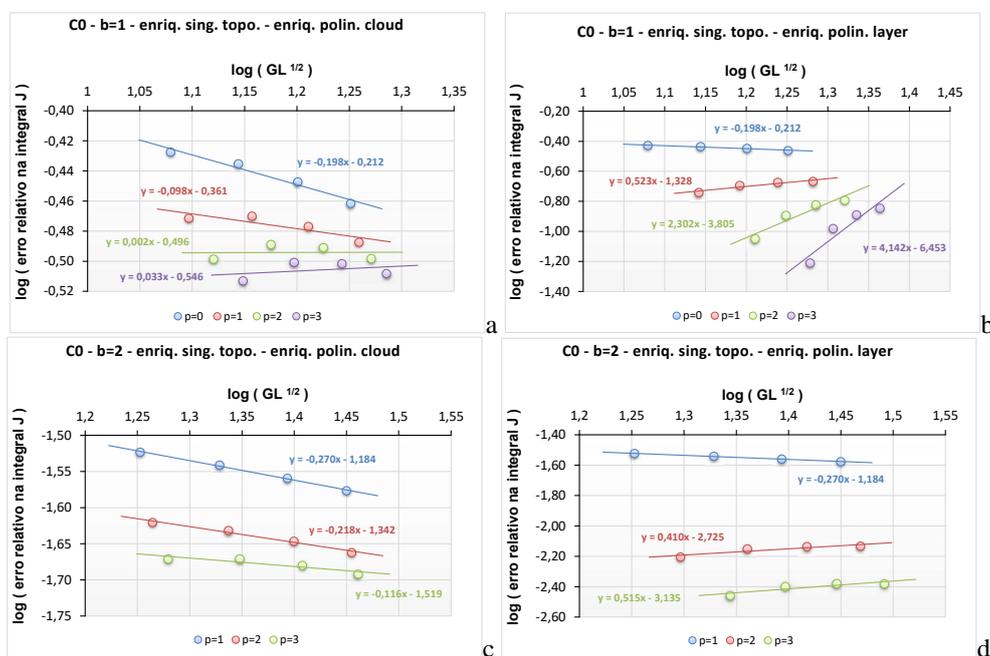


Figure 2. Taxas de convergência h para MEFG C^0 , modo I puro.

Observa-se que, para aproximações C^0 com $b = 1$, o enriquecimento polinomial localizado via padrão “cloud” (Fig. 2(a)) permite a redução do nível de erro numa mesma malha. Porém, para um dado grau p localizado, nota-se que há perda da capacidade de convergência com o refinamento da malha à medida que este grau p aumenta.

De forma geral, o MEFG C^0 sem qualquer tipo de enriquecimento polinomial (ou seja, $b = 1$ e $p = 0$) converge com taxa maior em modo I puro, se comparado ao modo misto de carregamento, compare Fig. 2(a) com Fig. 4(a). Similarmente, o mesmo se observa quando há enriquecimento polinomial uniforme, de modo que $b = 2$ e $p = 1$, vide figuras 2(c) e 4(c).

Notavelmente, na situação C^0 com $b = 1$ e $p = 0$, para as malhas consideradas, a taxa de convergência é bem menor que a obtida via MEF, com malhas se conformando à trinca. Portanto, claramente, a PU linear a partir de elementos triangulares, torna o enriquecimento singular topológico bem menos interessante, se comparado ao MEFG C^0 com elementos quadrangulares.

O enriquecimento polinomial via padrão “cloud” em aproximações C^0 , para ambos $b = 1$ e $b = 2$, promove redução da capacidade convergente, sendo esta perda mais intensa no modo misto de carregamento. Adicional-

⁵Classificação quanto à posição da singularidade no domínio do problema.

⁶Com funções seccionalmente polinomiais.

⁷O leitor deve estar atento quanto à correspondência entre as taxas de convergência em termos de energia de deformação e norma energia.

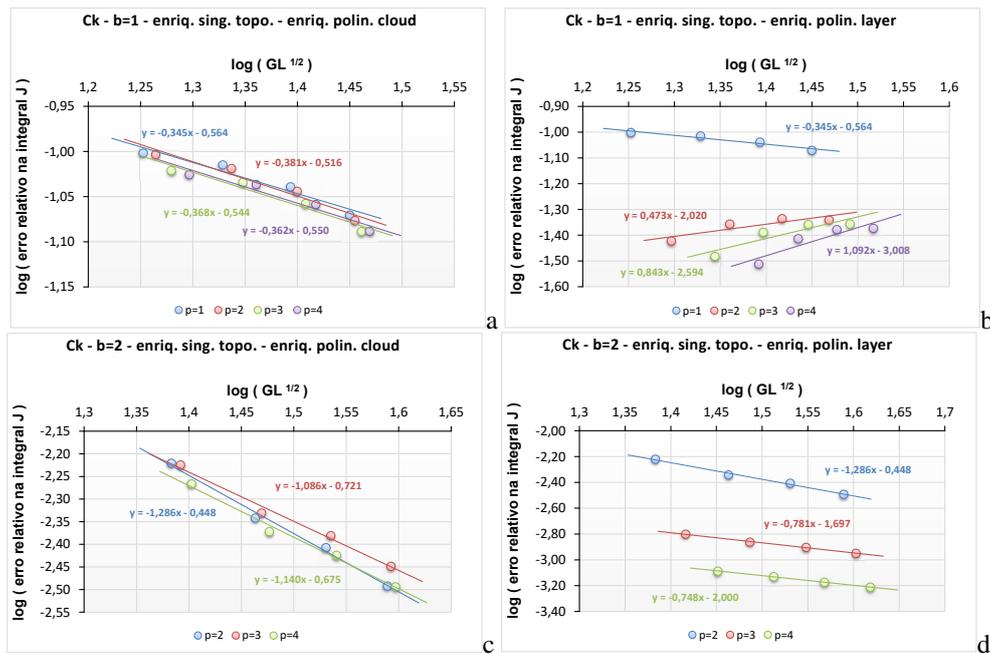


Figure 3. Taxas de convergência h para MEFG C^0 , modo I puro.

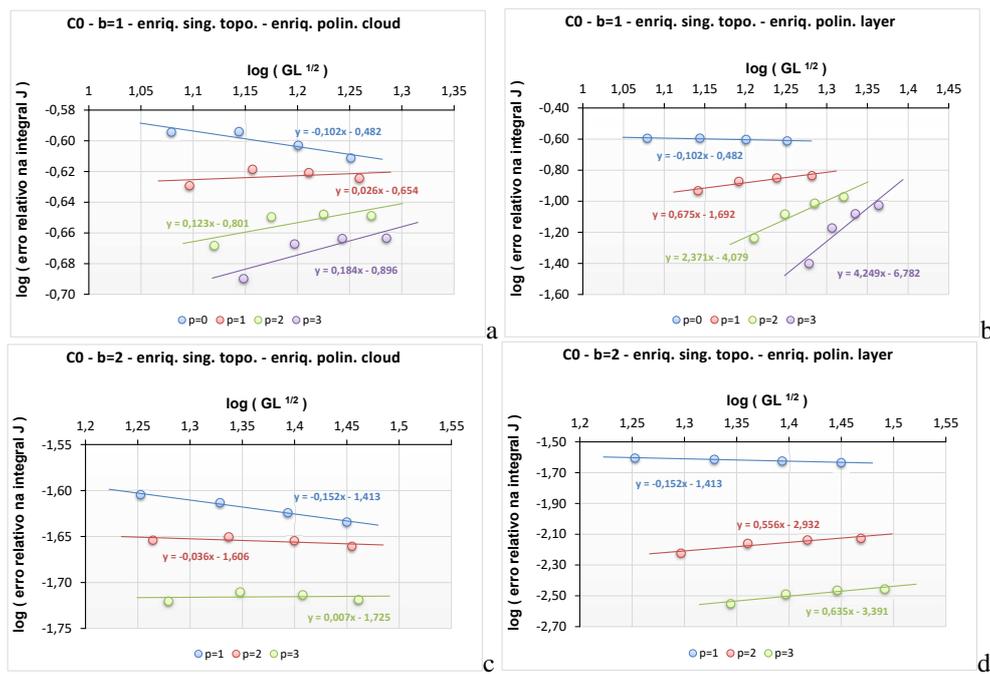
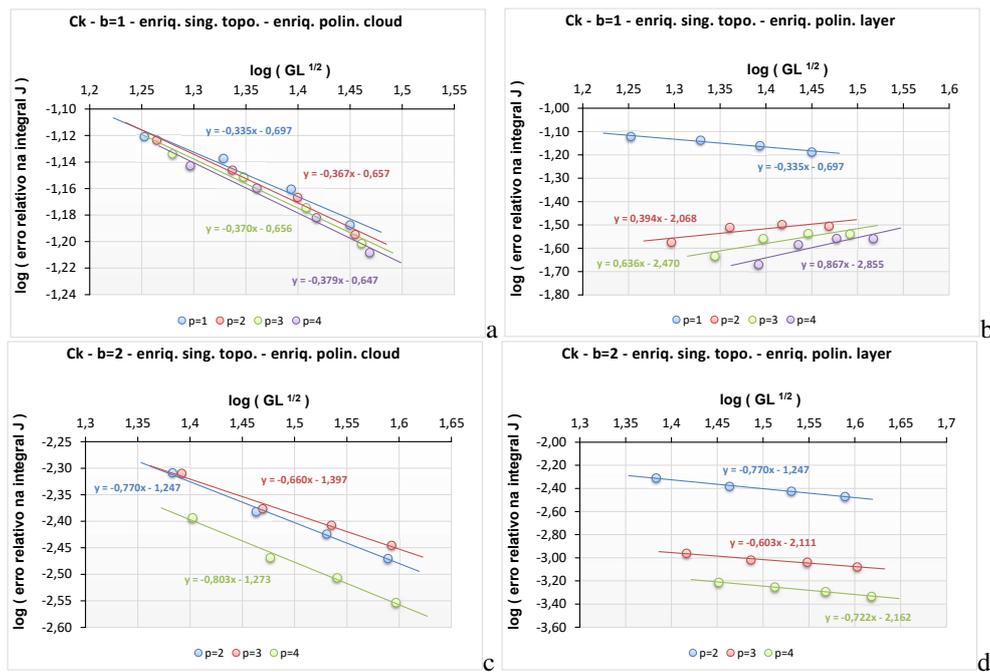


Figure 4. Taxas de convergência h para MEFG C^0 , modo misto.

mente, o padrão “layer” de enriquecimento polinomial localizado promove a divergência da solução. Deste modo, nota-se que para o MEFG C^0 o enriquecimento polinomial localizado é completamente deletério.

Por outro lado, é interessante observar que aproximações C^k com $b = 1$ convergem com taxas similares para todos os graus p do padrão “cloud”, tanto para o modo I quanto o modo misto de carregamento. Nota-se, desta forma, a independência do enriquecimento singular topológico com relação ao enriquecimento polinomial localizado em padrão “cloud”, sendo este, portanto, desnecessário. Além disso, os níveis de erro no modo misto são ligeiramente menores que aqueles observados para modo I puro, compare as figuras 3(a) e 5(a). Ainda, relativamente ao caso C^k com $b = 1$, o padrão “layer” somente reduz o nível de erro numa mesma malha, à medida que o grau p aumenta, figuras 3(b) e 5(b). Porém, como também notado para as aproximações C^0 , verifica-se a perda


 Figure 5. Taxas de convergência h para MEFG C^k , modo misto.

da capacidade de convergência perante o refinamento de malha à medida que o grau p aumenta, todavia com menos intensidade que no caso C^0 .

O enriquecimento polinomial uniforme quando aplicado sobre PU suave, de modo que $b = 2$, permite que o enriquecimento polinomial localizado via padrão “layer” ainda promova convergência, muito embora com taxas menores, vide figuras 3(b) e 5(b). O padrão “cloud” permite reduzir um pouco o nível de erro numa dada malha (Fig. 5(c)). Também, algum efeito no incremento da taxa de convergência pode ser verificado, conforme Fig. 3(c). A convergência em modo I puro já se torna maior que no modo misto. Notavelmente, em oposição às aproximações C^0 , todas as situações com $b = 2$ no MEFG C^k são convergentes.

Ainda, com relação ao caso C^0 , o enriquecimento polinomial uniforme não melhora as taxas de convergência, permitindo somente uma redução do nível de erro. Diferentemente, o enriquecimento polinomial uniforme sobre PU C^k promove redução dos níveis de erro juntamente com uma melhora significativa das taxas de convergência, compare a Fig. 3(a) com a Fig. 3(c), assim como a Fig. 5(a) com Fig. 5(c).

Vale observar que o enriquecimento polinomial uniforme sobre PU suave permite taxa de convergência ligeiramente maior que a unidade (a taxa de convergência do MEF convencional), veja a Fig. 3(c). Isto evidencia que o enriquecimento singular topológico ainda propicia alguma vantagem, justificando sua aplicação no MEFG C^k , quando conveniente.

De qualquer forma, é essencial citar que poucas malhas foram usadas aqui e, possivelmente, as taxas de convergência h podem ser diferentes se malhas mais refinadas fossem testadas, como em Béchet et al. [2]. Além disso, é notável que o ajuste de curva linear não exhibe correlações próximas à unidade em todas as situações.

4 Conclusões

Ambos os enriquecimentos polinomiais localizados não são recomendados no caso de aproximações via MEFG C^0 com $b = 1$, sendo o padrão “layer” muito mais deletério, à medida que as soluções divergem com o refinamento de malha. O padrão “cloud” de enriquecimento polinomial uniforme, quando aplicado em aproximações MEFG C^0 com $b = 1$ e $b = 2$ não contribui em termos de taxas de convergência, no caso do modo I puro, e contribui menos ainda no caso de modo misto. Ou seja, o padrão “cloud” não ajuda a suavizar os efeitos de mistura/transição que surgem devido ao enriquecimento singular via padrão topológico. Adicionalmente, o padrão “layer” de enriquecimento polinomial localizado em aproximações C^0 torna o refinamento h divergente (figuras 2(b) e (d) e 4(b) e (d)).

É notado que a taxa de convergência h é praticamente inalterada à medida que o grau p aumenta via padrão “cloud” no caso de aproximações C^k com $b = 1$. Isto demonstra que o MEFG C^k é menos sensível à forma como se procede o enriquecimento singular, e ainda pode sugerir uma minoração dos efeitos de transição/mistura.

O melhor comportamento da convergência- h é obtido com MEF $G C^k$ com $b = 2$. O padrão “layer” de enriquecimento polinomial localizado é desnecessário para aproximações suaves com $b = 2$ porque as taxas de convergência correspondentes são menores que aquelas obtidas com o padrão “cloud”.

O MEF $G C^k$ permite a convergência h da integral \mathcal{J} com taxas ligeiramente maiores que o MEF convencional quando $b = 2$. Isto pode sugerir que o padrão topológico de enriquecimento no caso do MEF $G C^k$ ainda pode melhorar o comportamento em convergência quando comparado ao MEF convencional.

Authorship statement. The author hereby confirm that he is the sole liable person responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the author, or has the permission of the owners to be included here.

References

- [1] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., & Salaun, M., 2005. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, pp. 354–381.
- [2] Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N., & Burgardt, B., 2005. Improved implementation and robustness study of the XFEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, pp. 1033–1056.
- [3] Tarancón, J. E., Vercher, A., Giner, E., & Fuenmayor, F. J., 2009. Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, pp. 126–148.
- [4] de Barcellos, C. S., Mendonça, P. T. R., & Duarte, C. A., 2009. A C^k continuous generalized finite element formulations applied to laminated kirchhoff plate model. *Computational Mechanics*, vol. 44, pp. 377–393.
- [5] Mendonça, P. T. R., de Barcellos, C. S., & Torres, D. A. F., 2011. Analysis of anisotropic mindlin plate model by continuous and non-continuous GFEM. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, pp. 698–717.
- [6] Edwards, H. C., 1996. C^∞ finite element basis functions. Technical Report 96-45, TICAM, The University of Texas at Austin, Austin, USA.
- [7] Duarte, C. A., Kim, D. J., & Quaresma, D. M., 2006. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 33–56.
- [8] Mueller, R. & Maugin, G. A., 2002. On material forces and finite element discretizations. *Computational Mechanics*, vol. 29, pp. 52–60.
- [9] Häusler, S. M., Lindhorst, K., & Horst, P., 2011. Combination of the material force concept and the extended finite element method for mixed mode crack growth simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, pp. 1522–1542.
- [10] Torres, D. A. F., de Barcellos, C. S., & Mendonça, P. T. R., 2019. Smooth generalized / extended FEM approximations in the computation of configurational forces in linear elastic fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, vol. 216, pp. 185–210.
- [11] Westergaard, H. M., 1939. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, pp. 49–53.
- [12] Anderson, T. L., 2005. *Fracture Mechanics: fundamentals and applications*. CRC Press, 3rd edition.
- [13] Belytschko, T. & Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601–620.
- [14] Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150.
- [15] Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, vol. 77, pp. 215–232.
- [16] Mendonça, P. T. R., de Barcellos, C. S., & Torres, D. A. F., 2013. Robust C^k/C^0 generalized FEM approximations for higher-order conformity requirements: application to Reddy’s HSDT model for anisotropic laminated plates. *Composite Structures*, vol. 96, pp. 332–345.
- [17] Rice, J. R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- [18] Irwin, G. R., 1957. Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 361–364.
- [19] Kienzler, R. & Herrmann, G., 2000. *Mechanics in material space with applications to defect and fracture mechanics*. Springer.
- [20] Szabó, B. & Babuška, I., 2011. *Introduction to finite element method: formulation, verification and validation*. Wiley series in computational mechanics. Wiley.
- [21] Szabó, B. & Yosibash, Z., 1996. Superconvergent extraction of flux intensity factors and first derivatives from finite element solutions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 129, pp. 349–370.