

Multiscale analysis of solids with a spaces of functions blending method

Rosicley J. R. Rosa¹, Rodolfo A. K. Sanches¹, Humberto B. Coda¹

¹Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo
13566-590, São Paulo, Brazil
rosicley@usp.br; rodolfo.sanches@usp.br; hbcoda@sc.usp.br

Abstract. Many engineering problems deal with localized effects in a larger domain, such as cracked solids, localized plastic strains and discontinuities like holes or stiffeners. The proper analysis of such problems require techniques that allow to accurately represent the mechanical fields of the problem at different scales. In this study, a space of functions blending technique is applied for two-dimensional solids, under a position-based finite element formulation for large displacements dynamic and static problems. The multiscale analysis consists of overlapping a local finite element discretization, able to capture the localized effects, to an isogeometric global discretization. In a region of the local discretization, close to its outer boundaries (blending zone), the fem and isogeometric spaces of shape functions are weighted by functions specially designed to avoid a linear combination and added generating the blended space of functions. With this approach, no additional degrees of freedom are introduced to enforce continuity between models. Numerical examples are simulated, considering plane strain and plane stress, with results compared to the literature in order to verify the proposed method and assess its accuracy and efficiency.

Keywords: Mutiscale, Overlapping, Isogeometric, Blending technique.

1 Introdução

Na engenharia, são encontrados diversos problemas em que os campos de tensões e deformações variam drasticamente em uma região pequena quando comparada ao domínio observado. A análise de sólidos ou estruturas com existência de fissuras, defeitos no arranjo atômico do material, vazios, geometrias complexas ou deformações plásticas (materiais dúcteis) requer métodos capazes de tratar descontinuidades, singularidades e altos gradientes.

A modelagem de estruturas e sólidos em grandes escalas é relativamente complexa do ponto de vista computacional. Isso deve-se às múltiplas escalas que a envolvem, como na análise de um navio, em que o problema global é de ordem muito maior que os furos de ligações, que são regiões de concentração de tensões. Assim, a previsão de modos de falha micro-mecânica necessita ser considerada até nas menores escalas, sendo crucial a utilização de técnicas de análise confiáveis em diferentes escalas, como demonstram Fish and Belsky [1].

Visando análises em diferentes escalas, os métodos multiescala sugerem empregar macro e micro modelos. No contexto dos métodos multiescala de sobreposição de domínio, Fish [2] propõe o *s-method*, que possui uma estratégia de decomposição de modelo diferente das formulações local-global apresentadas até então, exploradas inicialmente por Mote [3]. Esse método consiste na sobreposição, nas regiões de elevados gradientes, da malha de elementos finitos global com uma malha de elementos finitos local, sendo esta última mais refinada e em conformidade com as descontinuidades existentes no corpo.

De modo semelhante, o Método de Arlequin, introduzido por Dhia [4] e Dhia and Rateau [5], também se baseia na existência de uma malha local refinada, sobreposta a uma malha global, entretanto, ao contrário do *s-method*, as malhas não são simplesmente adicionadas (com risco de redundância e limitação de flexibilidade), mas cruzadas e coladas umas as outras em uma sub-zona (zona de colagem) da região de sobreposição. O acoplamento de ambos os modelos é realizado a partir do uso de um campo de multiplicadores de Lagrange definido sobre a zona de colagem.

A aplicação do Método de Arlequin resulta na introdução de variáveis extras ao sistema, dificultando o processo de solução. Diante disso, Sanches et al. [6] propõem o método dos espaços de funções combinados, que consiste na combinação da discretização local e global em uma região definida no modelo local, denominada região de superposição. Nesta região, as funções de forma locais e globais são combinadas mantendo o conceito

de partição da unidade. Portanto, o acoplamento entre ambos os modelos é realizado a partir da modificação das funções de forma dos elementos situados dentro de uma sub-região da região superposição, sendo desnecessária a utilização de multiplicadores de Lagrange. Em Sanches et al. [6], o novo método de sobreposição de malha é aplicado para tratar problemas de interação fluido-estrutura.

Dentre os mais recentes avanços do Método dos Elementos Finitos (MEF), está a Análise Isogeométrica, apresentada inicialmente por Hughes et al. [7], que consiste na união das representações geométricas empregadas em CAD - *Computer Aided Design* com o MEF, o que garante que a análise seja feita sobre a geometria exata do projeto, independentemente do grau de refinamento da malha utilizada. Dessa forma, o domínio é modelado utilizando funções do tipo *B-splines* ou uma de suas variantes, sendo essas mesmas funções utilizadas na aproximação do campo de soluções.

Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de realizar análises estáticas e dinâmicas, em múltiplas escalas, de sólidos bidimensionais, que se comportam em regime de grandes deslocamentos. Para isso, combina-se a o método dos elementos finitos com a análise isogeométrica, ambos em formulação posicional (ver Coda [8]). A análise em multiescala é viabilizada pelo método dos espaços de funções combinados, que permite a sobreposição de uma discretização local, aproximada por elementos finitos, à uma discretização isogeométrica global, onde a geometria e o campo de solução são representados por funções do tipo *non-uniform rationalized B-Splines* (NURBS).

2 Formulação

O MEF convencional utiliza, como parâmetros nodais, deslocamentos e rotações. Já neste estudo, adota-se a formulação posicional do MEF, apresentada por Coda [9], que possui como parâmetros nodais, as posições atuais. Essa formulação é construída com base na descrição Lagrangiana total e se destaca por considerar intrinsecamente efeitos da não linearidade geométrica.

Para cada elemento finito do domínio, determina-se a função mudança de configuração \vec{f} . Para isso, realiza-se o mapeamento da configuração inicial \vec{f}^0 e atual \vec{f}^1 de cada elemento finito a partir de um domínio paramétrico adimensional $\vec{\xi}$, assim, escreve-se:

$$\vec{f}^0(\vec{\xi}) = \varphi^\beta(\vec{\xi}) \vec{x}^\beta \quad \text{e} \quad \vec{f}^1(\vec{\xi}) = \varphi^\beta(\vec{\xi}) \vec{y}^\beta, \quad (1)$$

sendo \vec{x}^β a posição inicial, \vec{y}^β a posição atual, φ^β a função de forma associada ao nó β , definida no elemento finito de coordenadas adimensionais. Neste estudo, utilizam-se funções de forma polinomiais Langragianas para aproximação da geometria e dos campos de soluções do modelo local, como na análise por elementos finitos tradicional. Já para o modelo global, utilizam-se funções do tipo *non-uniform rationalized B-Splines* (NURBS), usualmente empregadas em análises isogeométricas.

Na mecânica do contínuo, a função mudança de configuração \vec{f} não diz muito, explicitamente, sobre as deformações, sendo necessário o seu gradiente, denominado \mathbf{A} e determinado conforme eq. (2), para calcular a deformação e a energia de deformação do corpo.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (2)$$

em que

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \xi_j} x_i^\beta \quad \text{e} \quad A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \xi_j} y_i^\beta. \quad (3)$$

O modelo constitutivo adotado é o de Saint Venant-Kirchhoff (SVK), o qual apresenta uma relação linear entre o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} e a deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} , sendo estes dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (4)$$

em que Ψ é a energia livre de Helmholtz e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem.

Aplicando o Princípio da Estacionaridade da Energia na formulação posicional do MEF, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{y}^\beta} = \frac{\partial U_s}{\partial \vec{y}^\beta} + \frac{\partial U_k}{\partial \vec{y}^\beta} + \frac{\partial P}{\partial \vec{y}^\beta} = \vec{0}, \quad (5)$$

sendo U_s a energia interna (energia de deformação), U_k a energia cinética e P a energia potencial das forças externas.

Sabe-se que $\partial U_s / \partial \bar{y}^\beta$, $\partial U_k / \partial \bar{y}^\beta$ e $\partial P / \partial \bar{y}^\beta$ resultam, respectivamente, no vetor de forças internas \vec{f}_{int}^β , no vetor de forças inerciais \vec{f}_{iner}^β e no vetor de forças externas \vec{f}_{ext}^β , todos relacionados ao nó β e calculados por:

$$\frac{\partial U_s}{\partial \bar{y}^\beta} = \vec{f}_{int}^\beta = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{y}^\beta} dV_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial \bar{y}^\beta} = \vec{f}_{iner}^\beta = \mathbf{M} \cdot \ddot{y}^\beta \quad e \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{y}^\beta} = \vec{f}_{ext}^\beta = -\vec{f}_{con}^\beta - \vec{f}_{vol}^\beta - \vec{f}_{sup}^\beta, \quad (8)$$

em que \mathbf{M} é a matriz de massa, \ddot{y}^β as acelerações nodais, \vec{f}_{con}^β as forças concentradas, \vec{f}_{vol}^β as forças de volume e \vec{f}_{sup}^β as forças de superfície atuantes no nó β .

A equação de equilíbrio, apresentada na eq. (5), forma um sistema não linear com dependência no tempo, podendo ser escrito em termos das posições nodais. Para solução do problema, aplica-se o integrador temporal de Newmark e o processo iterativo de Newton-Raphson.

3 Sobreposição de discretizações

O domínio físico de um corpo qualquer Ω é particionado, sendo representado pela união do domínio global Ω_G e do domínio local Ω_L , ou seja, $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$. O domínio local é menor e mais refinado que o global e, ainda, contém a região de efeitos localizados do domínio físico do problema. O mesmo ocorre para as condições de contorno, ou seja, as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, no domínio físico, são dadas pela união das respectivas condições de contorno no domínio global e local, logo, $\Gamma_g = (\Gamma_G)_g \cup (\Gamma_L)_g$ e $\Gamma_h = (\Gamma_G)_h \cup (\Gamma_L)_h$, em que Γ_g e Γ_h denotam as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente, como mostra a Fig. 1.

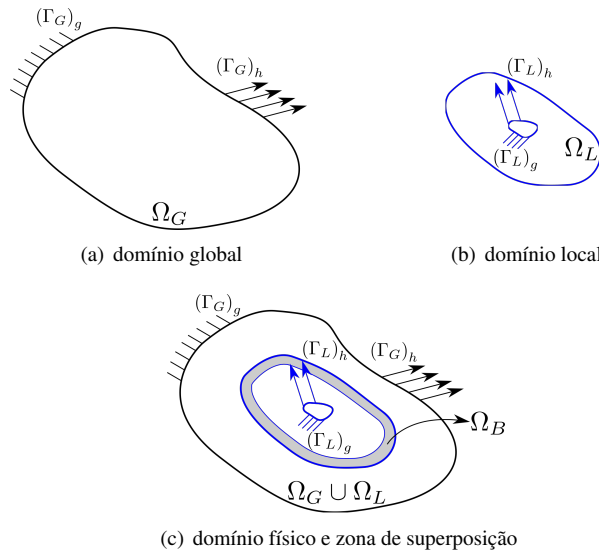


Figura 1. Decomposição do domínio físico de um corpo.

O acoplamento do domínio global e local é realizado a partir da combinação do espaço de funções de ambos os modelos numa região definida no domínio local, denominada zona de superposição (*blending zone*), ilustrada pela região em cinza na Fig. 1(c). O domínio da zona de superposição Ω_B deve ser maior que zero e menor que o domínio local. No entanto, a combinação direta do espaço de funções, de ambos os modelos, resultam num espaço de função inadequado, o qual não atende as propriedades da partição da unidade. Para contornar esse entrave, é empregado uma função peso $b(\xi_1, \xi_2)$, denominada *blending function*, com valor unitário no domínio $\Omega_G - \Omega_L$ e valor nulo no domínio $\Omega_L - \Omega_B$. Já no domínio Ω_B , a *blending function* deve apresentar uma transição suave.

Utilizando a técnica de elementos finitos, o problema é tratado multiplicando as funções de forma da discretização global $\phi^\beta(\zeta_1, \zeta_2)$ por $b(\xi_1, \xi_2)$ e as funções de forma da discretização local $\varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2)$ por $(1 - b(\xi_1, \xi_2))$. Denota-se ζ_1 e ζ_2 os eixos do espaço paramétrico, onde as funções base da discretização global são definidas, já

ξ_1 e ξ_2 os eixos do espaço paramétrico, em que as funções de forma da discretização local são definidas. Nesse sentido, um ponto dentro da *blending zone* é aproximado por:

$$\bar{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\beta=0}^{n_G} b(\xi_1, \xi_2) \phi^\beta(\zeta_1, \zeta_2) \bar{x}^\beta + \sum_{\alpha=0}^{n_L} (1 - b(\xi_1, \xi_2)) \varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2) \bar{x}^\alpha, \quad (9)$$

em que n_G e n_L representam a quantidade de funções de forma utilizadas na discretização global e local, respectivamente. Observa-se que o problema é equivalente a um problema de elementos finitos convencional, em que as novas funções de forma empregadas são obtidas a partir da modificação das funções discretizadas no domínio global e local. Ademais, as novas funções de forma atendem as propriedades da partição da unidade, ou seja,

$$\sum_{\beta=0}^{n_G} b(\xi_1, \xi_2) \phi^\beta(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{\alpha=0}^{n_L} (1 - b(\xi_1, \xi_2)) \varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2) = 1.0. \quad (10)$$

Segundo Sanches et al. [6], é necessário que os termos $b\phi$ e $(1-b)\varphi$ sejam linearmente independentes, a fim de garantir uma única solução. Isso requer que a *blending function* seja escolhida para promover essa independência linear. No entanto, os autores destacam que a utilização de métodos iterativos pode levar à solução desejada mesmo com dependência linear, especialmente para problemas dinâmicos, assim, a função b pode ser escolhida sem se preocupar com a independência linear dos termos mencionados. Visando garantir a independência linear das funções de forma modificadas, os autores sugerem escolher a função b com um grau a mais do que as funções de forma do local e global. Dessa forma, considerando que as funções de forma da discretização local e global são funções polinomiais de ordem n , a função b é escolhida como uma função polinomial de ordem $n + 1$, logo, dentro do domínio da zona de superposição, as funções modificadas são de ordem $2n + 1$. Portanto, considerando funções de forma quadráticas, a função b cúbica, dentro do domínio Ω_B , é dada por:

$$b(\xi_1, \xi_2) = 2 \left(\frac{X_L(\xi_1, \xi_2)}{\delta_B} \right)^3 - 3 \left(\frac{X_L(\xi_1, \xi_2)}{\delta_B} \right)^2 + 1, \quad (11)$$

em que δ_B é a espessura da zona de superposição, na prática, para domínios bidimensionais, é realizado um deslocamento do contorno da malha local para dentro dela mesmo, definindo, assim, o domínio Ω_B . Já X_L é a distância do ponto ao contorno do domínio local, sendo calculada por interpolação dos nós, isto é,

$$X_L(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha=0}^{n_L} \varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2) X_L^\alpha, \quad (12)$$

sendo X_L^α a distância do nó α ao contorno da malha de elementos finitos local.

Este procedimento pode resultar em nós ou pontos de controle, discretizados no domínio global, com nenhum suporte após o processo de acoplamento. Quando isso ocorre, esses nós ou pontos de controle devem ser desativados da análise. A espessura do domínio Ω_B , δ_B , afeta a precisão da solução. A região Ω_B é uma região, cujo o número de funções é maior, sendo essas de maior ordem, assim, aumentando δ_B , obtém-se uma solução numérica de maior qualidade. No entanto, o aumento de δ_B pode ocasionar em funções de forma com suporte muito menor que outras, podendo comprometer a solução do problema em questão, como atestam Sanches et al. [6].

Seguindo o raciocínio da formulação posicional do método dos elementos finitos, o mapeamento da configuração inicial em relação ao espaço paramétrico local, na zona de superposição, é dado pela eq. (9), ou seja,

$$\bar{f}^0(\xi_1, \xi_2) = \bar{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\beta=0}^{n_G} b(\xi_1, \xi_2) \phi^\beta(\zeta_1, \zeta_2) \bar{x}^\beta + \sum_{\alpha=0}^{n_L} (1 - b(\xi_1, \xi_2)) \varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2) \bar{x}^\alpha, \quad (13)$$

já o mapeamento da configuração atual do corpo é dada por:

$$\bar{f}^1(\xi_1, \xi_2) = \bar{y}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\beta=0}^{n_G} b(\xi_1, \xi_2) \phi^\beta(\zeta_1, \zeta_2) \bar{y}^\beta + \sum_{\alpha=0}^{n_L} (1 - b(\xi_1, \xi_2)) \varphi^\alpha(\xi_1, \xi_2) \bar{y}^\alpha. \quad (14)$$

4 Exemplos numéricos

4.1 Viga bi-engastada com carregamento concentrado

O primeiro teste da técnica de sobreposição de malha consiste no exemplo da viga bi-engastada submetida a uma força concentrada de impacto no meio do vão, que foi apresentado, inicialmente, por Mondkar and Powell

[10]. A viga, ilustrada na Fig. 2, possui comprimento de 20.0 in e seção transversal retangular, cuja altura e a base são de 0.125 in e 1.0 in, respectivamente. O material que constitui a viga possui módulo de elasticidade de 3.0×10^7 lb/in², coeficiente de Poisson nulo e massa específica igual a 2.6×10^{-4} lb s²/in⁴.

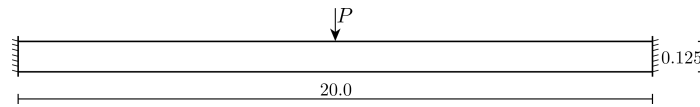


Figura 2. Geometria e condições de contorno da viga bi-engastada analisada.

O problema foi discretizado utilizando duas malhas sobrepostas, ambas construídas por aproximações quadráticas, sendo a malha local discretizada por elementos finitos e a malha global por discretização isogeométrica. Assim, o problema foi tratado conforme apresenta a Fig. 3, em que a malha local é sobreposta à malha global num comprimento de 0.1 in, na direção longitudinal da viga, como mostra a Fig. 4(a).

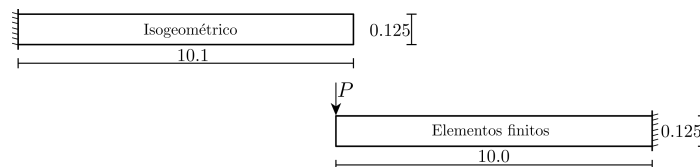
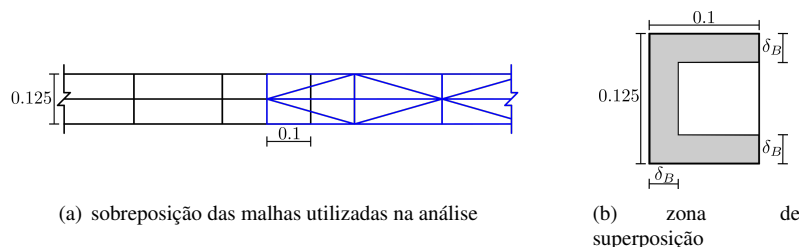


Figura 3. Viga bi-engastada empregando malhas sobrepostas.

Para a análise dinâmica desse problema, adotou-se que a força de impacto P possui intensidade de 640.0 lb e permanece constante ao longo de todo o tempo da análise. O intervalo de tempo adotado é de $25.0 \mu\text{s}$, como em Mondkar and Powell [10], já os parâmetros livres, do integrador temporal de Newmark, β e γ foram 0.25 e 0.5, respectivamente. Neste problema, a zona de superposição foi construída conforme apresenta a Fig. 4(b). A Fig. 5 apresenta os resultados obtidos para diferentes valores de δ_B , os quais são comparados com os de Mondkar and Powell [10] e com os resultados obtidos ao discretizar a viga somente por elementos finitos.



(a) sobreposição das malhas utilizadas na análise

(b) zona de superposição

Figura 4. Sobreposição de discretizações.

Observa-se que os resultados das análises com malhas sobrepostas são idênticos aos resultados da análise em que foi empregada uma única malha de elementos finitos, sendo que esses resultados estão em excelente concordância com os resultados de Mondkar and Powell [10]. Portanto, é comprovada a eficácia da formulação utilizada para acoplar um domínio local a um domínio global.

4.2 Sólido bidimensional bi-fissurado submetido à tração

O segundo exemplo, que explora a técnica de sobreposição de malha, consiste em um sólido bidimensional contendo duas fissuras, o qual é submetido a uma tensão de tração uniforme perpendicular as fissuras. A base e altura do sólido são 1.0 mm e 2.0 mm, respectivamente, ainda, este possui duas fissuras, cujos comprimentos são 0.3 mm, como mostra a Fig. 6(a). O material, que constitui o sólido, possui módulo de elasticidade $E = 1.0 \times 10^3$ N/mm² e coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, como em Yin et al. [11]. Ainda, considerou-se estado plano de deformação e $\sigma = 1.0$ N/mm², que atua de forma estática no sólido.

A malha local de elementos finitos triangulares é sobreposta à malha isogeométrica global, inserindo as descontinuidades físicas no domínio do problema. Como mostra a Fig. 6(b), a malha local é bastante refinada para capturar as singularidades que envolvem problemas da mecânica da fratura, visto que não foi implementado enriquecimento nodal. Os elementos de ambas as malhas utilizadas são de aproximação quadráticas. A zona de superposição adotada, região destacada em cinza na Fig. 6(c), possui $\delta_B = 0.05$ mm.

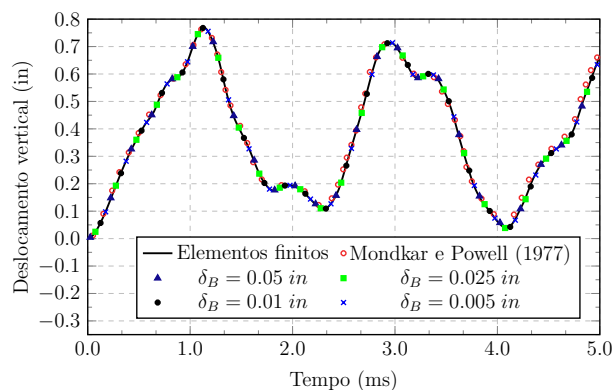


Figura 5. Deslocamento vertical ao longo do tempo.

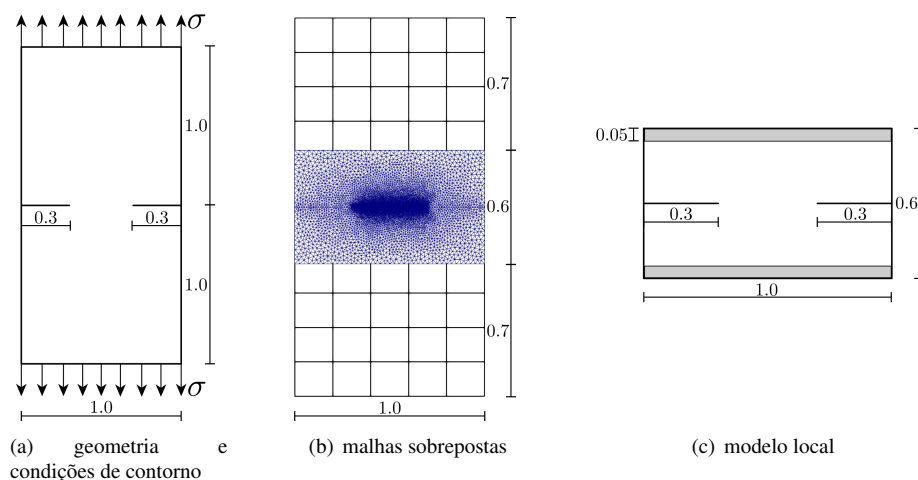


Figura 6. Sólido bi-fissurado submetido à tração.

A Fig. 7 compara os deslocamento, na direção X2, obtidos no presente trabalho com os de Yin et al. [11]. Os resultados, quanto ao deslocamento vertical, são bastante semelhantes, visto que o deslocamento máximo obtido é de 2.57×10^{-3} mm e o da referência é pouco maior que 2.50×10^{-3} mm. Já a distribuição das tensões de Cauchy, na direção X1, é comparada com a mesma referência na Fig. 8, em que utilizou-se a mesma escala, devido as singularidades das tensões na ponta da fissura.

5 Conclusões

O Princípio da Estacionariedade de Energia posicional é aplicado à Análise Isogeométrica [7] para a discretização do domínio global do sólido, em que o modelo geométrico exato é representado a partir das funções NURBS, assim como a aproximação do campo de solução. A utilização de funções NURBS oferece vantagens em relação às funções polinomiais Lagrangianas, tradicionalmente empregadas na análise por elementos finitos, principalmente no que se refere à representação exata, mesmo com uma malha grosseira, do domínio de sólidos com geometrias quádricas.

A técnica de partição de domínios, o método dos espaços de funções combinados, permitiu acoplar malhas discretizadas diferentemente. Sendo a malha local discretizada por elementos finitos triangulares, em que são empregadas funções polinomiais Lagrangianas para aproximação da geometria e do campo de solução. Conforme atestam os exemplos numéricos aqui apresentados, o método de sobreposição de malha se mostrou eficaz para diferentes formatos e espessuras da *blending zone*.

Agradecimentos. Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Código de Financiamento 001, e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 131730/2019-3.

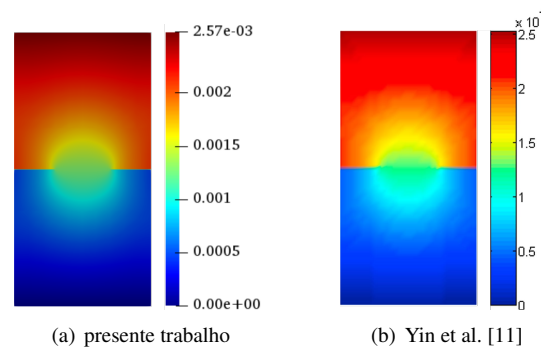


Figura 7. Deslocamento vertical.

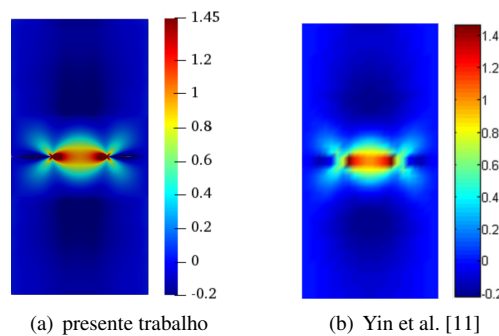


Figura 8. Tensões de Cauchy na direção X1.

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho e que todo o material aqui incluído, como parte do presente trabalho, é propriedade dos autores.

Referências

- [1] Fish, J. & Belsky, V., 1995. Multi-grid method for periodic heterogeneous media part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, n. 1, pp. 17 – 38.
- [2] Fish, J., 1992. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, vol. 43, n. 3, pp. 539 – 547.
- [3] Mote, C. D., 1971. Global-local finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, n. 4, pp. 565–574.
- [4] Dhia, H. B., 1998. Problèmes mécaniques multi-échelles: la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, n. 12, pp. 899 – 904.
- [5] Dhia, H. B. & Rateau, G., 2001. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, vol. 332, n. 7, pp. 649 – 654.
- [6] Sanches, R. A. K., Takizawa, K., & Tezduyar, T., 2019. Fluid-structure interaction computation with multi-scale overlapping meshes. In *Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Natal/RN, Brazil. ABMEC.
- [7] Hughes, T., Cottrell, J., & Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, n. 39, pp. 4135 – 4195.
- [8] Coda, H. B., 2018. *O Método dos Elementos Finitos Posicional*. EESC/USP, São Carlos.
- [9] Coda, H. B., 2003. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese para concurso de professor titular, SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil.
- [10] Mondkar, D. P. & Powell, G. H., 1977. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, n. 3, pp. 499–520.
- [11] Yin, S., Yu, T., Bui, T. Q., Zheng, X., & Gu, S., 2019. Static and dynamic fracture analysis in elastic solids using a multiscale extended isogeometric analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 207, pp. 109 – 130.