

# A MLPG Formulation for Plane Stress Problems

André L. A. Silveira, José A. F. Santiago, Edmundo G. de A. Costa

*Department of Civil Engineering, COPPE/UFRJ*

*Ilha do Fundão, CP 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro/RJ, Brazil*

[andre.silveira@coc.ufri.br](mailto:andre.silveira@coc.ufri.br), [santiago@coc.ufri.br](mailto:santiago@coc.ufri.br), [edmundo\\_costa@coc.ufri.br](mailto:edmundo_costa@coc.ufri.br)

**Abstract.** This paper presents an analysis of plane stress problems using the first variant of the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method designed in the literature by MLPG-1. In this method, the Moving Least-Squares (MLS) is used as approximation function, and an integration scheme is proposed for avoiding the numerical errors associated to the points of integration located outside of the global domain of interesting. An example is presented in order to assess the accuracy and the stability of the proposed formulation by comparing its numerical model with a reference model based on the Boundary Element Method (BEM) formulation.

**Keywords:** MLPG formulation, moving least-squares, plane stress problems.

## 1 Introduction

Os métodos convencionais que fazem uso de malhas são os mais difundidos dentro da área da mecânica computacional, porém apresentam algumas dificuldades para resolver alguns tipos de problemas, como para grandes deformações e deslocamentos, para a propagação de trincas e com descontinuidades. Em geral, para resolver esses problemas, os métodos baseados em malhas utilizam processos iterativos para geração de malhas. Apesar de eficaz, esses processos geram um custo computacional muito alto. Uma alternativa que vem sendo estudada nos últimos anos são os métodos sem malha que permitem uma resolução dos problemas de valores de contorno sem o uso de malhas ou células.

Os primeiros trabalhos publicados nesta linha tinham como objetivo analisar problemas astrofísicos [1,2] Anos depois NAYROLES et al. [1] apresentaram um estudo sobre o Método do Elemento Difuso (DEM – sigla em inglês), usando o Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS – sigla em inglês). O Método de Galerkin Livre de Elementos (EFGM – sigla do inglês) [2] foi criado a partir de uma modificação do DEM. O EFGM foi aplicado, inicialmente, para problemas de elasticidade e condução de calor, usando o MLS como função de aproximação.

Apesar de serem considerados como métodos sem malha, não são verdadeiramente sem malha, pois necessitam de elementos para resolver as integrais de domínio. O primeiro método que não precisa de nenhum tipo de elemento, seja de interpolação e da resolução das integrais, foi apresentado por ZHU et al. [3]. Apesar disso, esse método apresentava algumas dificuldades com o tratamento de integrais singulares. Recentemente, uma nova formulação baseada no método sem malha Petrov-Galerkin (MLPG – sigla em inglês), foi apresentada por ATLURI e ZHU [4]. Essa formulação apresenta algumas vantagens com relação àquela baseada no método de Galerkin, uma vez que não apresenta descontinuidade na segunda derivada das funções peso e de aproximação. Um dos grandes atrativos desse método é a sua flexibilidade, permitindo assim a utilização de diferentes funções de forma, funções de teste e o uso de subdomínios locais de formas e tamanhos diferentes.

Portanto, esse artigo tem como objetivo a análise de problemas de Estado Plano de Tensão (EPT) utilizando uma formulação baseada na primeira variante do MLPG usando um esquema de integração numérica, a fim de evitar os erros numéricos associados aos pontos de integração localizados fora do domínio global de interesse.

## 2 Elasticidade

O comportamento de um corpo elástico e em equilíbrio sub à ação de forças externas pode ser demonstrado através das equações diferenciais do equilíbrio, que por sua vez devem ser satisfeitas em qualquer ponto do interior do corpo.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy correspondente ao campo de deslocamentos  $u_i$  e  $b_i$  é a componente das forças do corpo.

O problema no contorno pode ser descrito através das seguintes condições de contorno:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2)$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3)$$

onde  $\bar{u}_i$  representa o deslocamento prescrito no contorno  $\Gamma_u$ ,  $\bar{t}_i$  representa a força de superfície prescrita no contorno  $\Gamma_t$  e  $n_j$  representa o vetor normal unitário orientado para fora do corpo.

### 2.1 Estado Plano de Tensão

No estado plano de tensão a espessura do corpo na direção do eixo  $z$  é muito menor se comparado com as dimensões dos eixos  $x$  e  $y$ . As forças externas são aplicadas somente no plano  $x$ - $y$  e as tensões na direção do eixo  $z$  são nulas, logo:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

As componentes de deformação específica podem ser escritas de forma similar:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Apesar da tensão na direção do eixo  $z$  ser considerada nula, existe deformação específica na direção do eixo  $z$  e esta deformação pode ser calculada a partir das deformações na direção dos eixos  $x$  e  $y$ :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (6)$$

A deformação específica pode ser obtida a partir da relação deformação-deslocamento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $u$  e  $v$  são, respectivamente, as componentes de deslocamento na direção  $x$  e  $y$ .

Usando a Lei de Hooke para o caso 2D, pode-se obter as tensões a partir das deformações específicas:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (8)$$

onde  $c$  é a matriz de constantes do material, dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3 Método dos Mínimos Quadrados Móveis

O método consiste em obter valores aproximados para qualquer ponto do domínio. Partindo do princípio de que a função  $u(\mathbf{x})$  pertence ao domínio  $\Omega$ , podemos gerar um subdomínio  $\Omega_s$  a partir do ponto  $\mathbf{x}_i$ , no qual a função aproximada  $\tilde{u}(\mathbf{x}_i)$  é válida. Esta função aproximada é dada por:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_i) a_j(\mathbf{x}_i) \quad (10)$$

ou na forma matricial

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) \quad (11)$$

onde  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  é a base monomial com  $m$  termos e  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  são os coeficientes a determinar do subdomínio  $\Omega_s$  no ponto  $\mathbf{x}_i$ . O número de termos da base pode ser obtido a partir das seguintes expressões:

$$\begin{cases} m = \frac{(m_b + 1)}{1} & \rightarrow 1D \\ m = \frac{(m_b + 1)(m_b + 2)}{2} & \rightarrow 2D \\ m = \frac{(m_b + 1)(m_b + 2)(m_b + 3)}{3} & \rightarrow 3D \end{cases} \quad (12)$$

onde  $m_b$  é a ordem do maior termo monomial.

Para a aproximação da função  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)$ , o ponto  $\mathbf{x}_i$  é escolhido como base e os pontos dentro do subdomínio  $\Omega_s$  são denominados pontos do suporte  $\bar{\mathbf{x}}_k$ . Para que sejam obtidos resultados satisfatórios, o número de pontos do suporte deve ser maior do que o número de termos da base monomial.

Dessa forma, podemos reescrever a Eq. (10) como  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k)$ , ou seja, cada ponto  $\mathbf{x}_i$  receberá a contribuição do monômio aplicado em  $\bar{\mathbf{x}}_k$ . Assim, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_j(\mathbf{x}_i) \quad (13)$$

Como o método consiste em uma aproximação, o mesmo gera um resíduo acumulado para cada subdomínio  $\Omega_s$ . Essa função resíduo pode ser calculada da seguinte forma:

$$J(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^n w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k) [\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k) - \bar{\mathbf{u}}_k]^2 \quad (14)$$

onde  $n$  é o número de pontos no subdomínio  $\Omega_s$ ,  $w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)$  é a função peso associada ao ponto  $\mathbf{x}_i$  e  $\bar{\mathbf{u}}_k$  é o valor prescrito da função para o ponto  $\bar{\mathbf{x}}_k$ .

A função peso,  $w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)$ , é utilizada para que o erro seja função da distância de  $\mathbf{x}_i$  até o ponto  $\bar{\mathbf{x}}_k$ , dessa forma a aproximação torna-se local, dependendo apenas do tamanho do suporte.

Substituindo a Eq. (13) na Eq. (14), tem-se:

$$J(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^n w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k) \left[ \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_j(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}_k \right]^2 \quad (15)$$

A Eq. (15) pode ser escrita na forma matricial do seguinte modo:

$$J(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}] \quad (16)$$

Expandindo os termos da Eq. (16) na forma matricial, obtém-se:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (17)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & p_m(\bar{\mathbf{x}}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\bar{\mathbf{x}}_n) & \cdots & p_m(\bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (18)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{m \times 1} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_j = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\bar{\mathbf{x}}_1) \\ \vdots \\ u(\bar{\mathbf{x}}_n) \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (20)$$

O parâmetro  $\mathbf{a}_j(\mathbf{x})$  pode assumir qualquer valor. Portanto, para minimizar o erro e garantir que a função  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)$  seja a mais próxima possível da função  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$ , deve-se derivar a Eq. (16), obtendo-se:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{a}} = 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (21)$$

Em seguida, devemos igualar a Eq. (21) a zero, logo:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (22)$$

A Eq. (22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (23)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$ . A matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$  é simétrica ( $m \times m$ ) e a matriz  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$  não é simétrica ( $m \times n$ ).

Pré-multiplicando a Eq. (23) por  $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i)$ , resulta-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (24)$$

Substituindo a Eq. (24) na Eq. (11), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

Dessa forma, pode-se definir a função de aproximação como:

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \quad (26)$$

sendo  $\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}_i)$  uma matriz coluna ( $n \times 1$ ).

## 4 Formulação proposta

Diferente dos outros métodos sem malha, o MLPG proposto para este trabalho utiliza a forma fraca local sobre um subdomínio local  $\Omega_s$ , contido totalmente no domínio global  $\Omega$ . Assim, considerando a Eq. (1) para cada subdomínio  $\Omega_s$ , temos:

$$\int_{\Omega_s} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) w_i d\Omega_s + \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) w_i d\Omega_s = 0 \quad (27)$$

onde  $w_i$  é a função de ponderação,  $\Gamma_u$  é o contorno da condição essencial e  $\alpha \gg 1$  é o parâmetro de penalidade.

Expandindo os produtos e aplicando a regra do produto na Eq. (27), obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\partial\Omega_s} (w_i n_j \sigma_{ij}) d\Gamma - \int_{\Omega_s} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) d\Omega_s + \int_{\Omega_s} (w_i b_i) d\Omega_s + \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) w_i d\Gamma = 0 \quad (28)$$

onde  $\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , sendo  $L_s$  o contorno do subdomínio de integração  $\Omega_s$  e  $\Gamma_t$  sendo o contorno da condição natural. Para simplificar a Eq. (28), a função de ponderação  $w$  é selecionada de forma que zere no contorno  $L_s$ .

Substituindo as Eqs. (7) e (8) nas Eqs. (28) e fazendo  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}u$  a seguinte expressão pode ser reescrita na sua forma matricial como:

$$\int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{D} \mathcal{L} u d\Omega_s - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathcal{L} u d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{S} u d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{w} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{w} \mathbf{b} d\Omega_s \quad (29)$$

onde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{x_1} & 0 & n_{x_2} \\ 0 & n_{x_2} & n_{x_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{S}$  é usada para checar se ou não existe uma condição de contorno de Dirichlet prescrita no ponto considerado. Assim, os coeficientes da matriz  $\mathbf{S}$  são definidos da seguinte forma:

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{se existe valor prescrito de } \bar{u} \text{ no contorno } \Gamma_{su} \\ 0, & \text{se não existe valor prescrito de } \bar{u} \text{ no contorno } \Gamma_{su} \end{cases} \quad (31)$$

Para  $i = 1, GdL$ , onde  $GdL$  é o grau de liberdade do modelo.

Portanto, adotando a seguinte solução aproximada:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\Phi}^j(\mathbf{x}_i)\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) \quad (32)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}^j(\mathbf{x}_j)$  é uma matriz  $2 \times 2n$  constituída de  $n$  matrizes  $2 \times 2$  diagonal contendo as componentes da função de aproximação correspondentes aos pontos  $\mathbf{x}_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) dentro do suporte local, centrado no ponto base  $\mathbf{x}_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), sendo  $N$  o número total de pontos. O vetor  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)$  é chamado vetor de deslocamentos fictícios. Logo, a matriz  $\mathbf{K}_{ij}$  e o vetor  $\mathbf{f}_i$  são expressos por:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{D} \boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{\Phi}^j(\mathbf{x}_i) d\Omega_s - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{S} \boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{\Phi}^j(\mathbf{x}_i) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{S} \boldsymbol{\Phi}^j(\mathbf{x}_i) d\Gamma \quad (33)$$

e

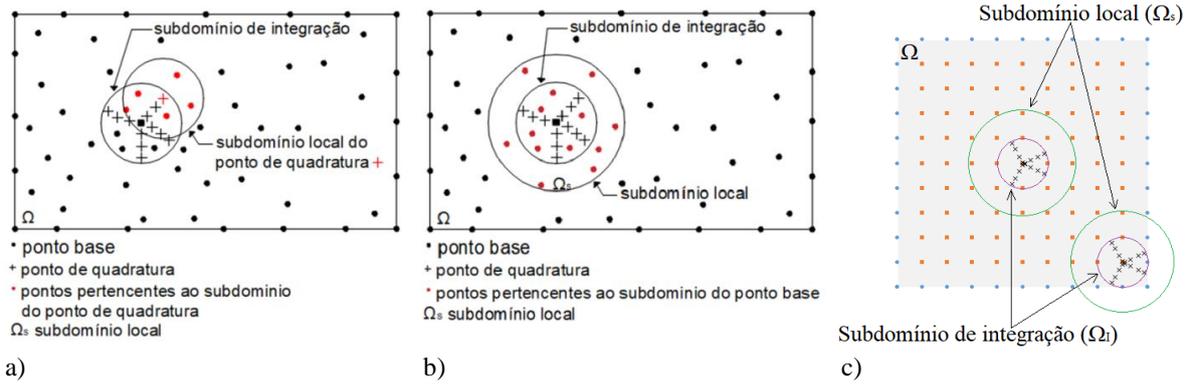
$$\mathbf{f}_i = \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{w} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_i) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{w} \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{w} \mathbf{b}(\mathbf{x}_i) d\Omega_s \quad (34)$$

Note que  $\mathbf{K}_{ij} = 0$  para qualquer  $\mathbf{x}_j$  que não pertence ao subdomínio local  $\Omega_s$ . Em outras palavras, a matriz  $\mathbf{K}$  é esparsa.

## 5 Esquema de Integração

A técnica tradicional de integração para o MLPG consiste na criação de um subdomínio de integração  $\Omega_I$ , centrado no ponto base, onde todos os pontos de Gauss são distribuídos e funções de aproximação são usadas para cada um deles, como mostrado na Fig. 1 (a). Como o esforço computacional para essa técnica é muito grande, técnicas alternativas vêm sendo aplicadas para evitar o custo computacional dos modelos numéricos. Recentemente, KONDA et al. [5] propôs um esquema que consiste basicamente da utilização de um único suporte compacto centrado no ponto base, usando a mesma função de aproximação para todos os pontos de Gauss, diminuindo assim o custo computacional dos modelos numéricos.

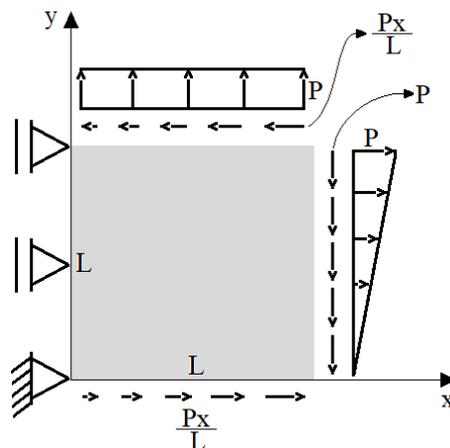
Para este trabalho, será empregada uma técnica alternativa, fazendo uso de um subdomínio de integração  $\Omega_I$  com tamanho reduzido, a fim de evitar os erros numéricos associados aos pontos de integração localizados fora do domínio global de interesse, como mostrado na Fig. 1 (c).



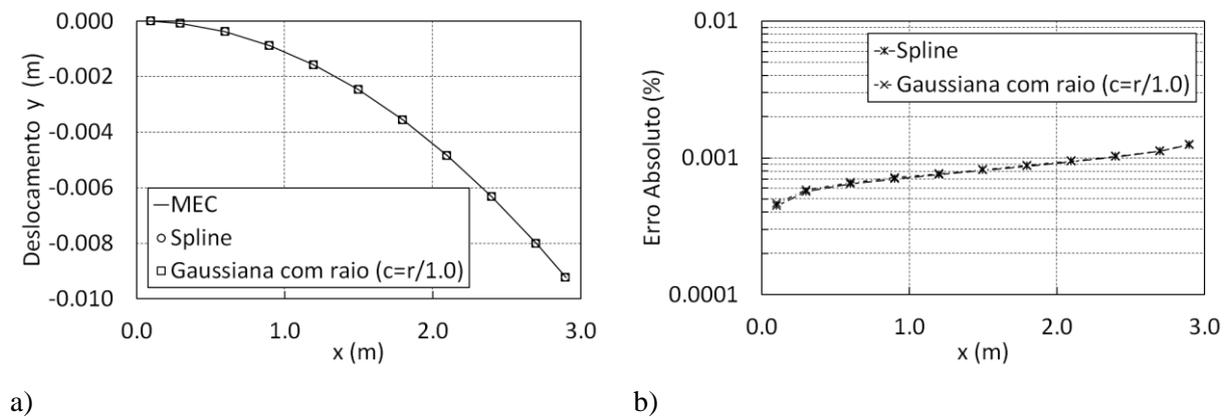
**Figura 1.** Esquema de integração: a) convencional, b) sugerido por KONDA et al. [5] e c) sugerido para a formulação proposta.

## 6 Exemplo

Neste exemplo foi considerado um domínio quadrado submetido a carregamentos diversos, como mostrado na Fig. 2(a). O problema possui  $E = 5000 \text{ Pa}$ ,  $L = 3.0\text{m}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $P = 10 \text{ N}$ . Para essa análise, foram utilizadas as funções gaussianas com raio e Spline como funções peso com base monomial quadrática.



**Figura 2.** Domínio quadrado submetido a carregamentos diversos.



**Figura 3.** Comparação da solução proposta com o MEC considerando um domínio quadrado submetido a carregamentos diversos.

A Figura 3 apresenta a comparação dos resultados da formulação proposta com o MEC para uma nuvem de pontos de 125 pontos. As curvas foram computadas ao longo do eixo x em  $y=1.5m$ . Duas funções peso para o MLS foram testadas. Em ambos os casos, a formulação proposta forneceu excelentes resultados (ver Fig. 3 (a)) com um erro absoluto abaixo de 0.01% (ver Fig. 3 (b)). Três parâmetros “c” da função Gaussiana com raio foram testados,  $c = r/1.0$ ,  $c = r/2.0$  e  $c = r/3.0$ , sendo r o raio do suporte de aproximação e bons resultados foram obtidos. Nestes gráficos, somente um parâmetro ( $c = r/1.0$ ) foi apresentado. Além disso, a formulação proposta forneceu resultados com um custo computacional reduzido por fazer uso de um único suporte compacto centrado no ponto base para todos os pontos de integração.

## 7 Conclusions

The MLPG formulation was implemented and tested for a plane stress problem by comparing its numerical model with a reference model based on the BEM formulation. An efficient integration scheme was used for the proposed formulation, and an excellent agreement was always found.

**Acknowledgements.** The authors acknowledge the financial support of the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). This study was also financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

**Authorship statement.** The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

## References

- [1] B. NAYROLES, G. TOUZOT and P. VILLON, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational mechanics*, vol. 10, pp. 307-318, 1992.
- [2] T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU and L. GU, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [3] T. ZHU, J.-D. ZHANG and S. ATLURI, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 223-235, 1998.
- [4] S. N. ATLURI and T. ZHU, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 117-127, 1998.
- [5] D. H. KONDA, J. A. F. SANTIAGO, J. C. F. TELLES, J. P. F. MELLO and E. G. A. COSTA, A meshless Reissner plate bending procedure using local radial point interpolation with an efficient integration scheme, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 99, pp. 46-59, 2019.