

VIBRATION AND STABILITY OF A HYPERELASTIC NEO-HOOKEAN TRUSS

Antônio A. L. dos Santos, Renata M. Soares

antonio_santos@discente.ufg.br

renatasoares@ufg.br

School of Civil and Environmental Engineering, Federal University of Goiás.

Avenida Universitária, 1488, Setor Leste Universitário, 74605-200, Goiânia, GO, Brazil.

Abstract. Trusses are structural elements that present multi-stability, even under characteristic conditions of geometry, contour and rigidity. Metamaterials, on the other hand, have been an increase motivation for studies recently and their characteristics can be represented by hyperelastic constitutive models together with a geometric shape of trusses. Thus, in this work, the behavior, linear and non-linear, of the stability and vibrations of a hyperelastic neo-Hookean truss exhibiting Multistable behavior is investigated. For this, it is considered a plane truss with two bars and geometric imperfections. First an energetic formulation, considering large displacements, is presented and the nonlinear equations of motion for a nodal load applied at the top node are derived. Based on this formulation, the parametric buckling analysis of the truss under static load as a function of the load and geometric imperfections. Then, the fundamental vibration frequency, nonlinear frequency-amplitude relations and time history are obtained as a function of the static preload.

Keywords: hyperelastic, stability, vibrations.

1 Introduction

As treliças são estruturas leves capazes de vencer grandes vãos, sendo usadas com frequência na construção de pontes, em torres de transmissão de energia e em estruturas de coberturas. Dentre as estruturas abatidas, têm-se as treliças planas de duas barras, também conhecida por treliça de Von Mises, que caracteriza um sistema biestável, uma vez que sua trajetória de equilíbrio apresenta dois trechos estáveis de equilíbrio, a partir do qual a estrutura pode atingir o ponto limite, invertendo sua posição repentinamente, caracterizando um comportamento que recebe o nome de salto dinâmico ou *snap through*.

Kassimali e Bidhendi [1] estudaram a estabilidade e a resposta à grandes deformações da treliça de Von Mises, submetida a três tipos de cargas dinâmicas: carga constante, impulso triangular e carga senoidal. Já Ario [2] aplica a equação de Duffing à uma treliça plana de duas barras considerando a presença da não linearidade geométrica e massa concentrada no nó superior da treliça, para realizar uma análise da estabilidade dinâmica, do comportamento bifurcacional e oscilações não periódicas e periódicas, considerando fenômenos caóticos.

Na literatura é possível encontrar várias pesquisas que estudam a estabilidade e vibrações de treliças. Porém, apenas um número reduzido destes trabalhos tende a considerar a não linearidade do material, como por exemplo o trabalho de Fonseca [3], onde o autor realiza uma análise paramétrica para investigar o comportamento não linear, vibrações, bifurcações e instabilidade de uma treliça plana de duas barras feita de material hiperelástico e descrita pelo modelo neo-Hookeano.

Da mesma forma que os materiais hiperelásticos, os metamateriais podem sofrer grandes deformações e deslocamentos, situação onde a multiestabilidade costuma ser desejável. Rafsanjani *et al* [4] estudaram uma classe de metamaterial formado por um arranjo periódico de unidades com geometria próxima à de uma treliça, e consideraram o material sendo neo-Hookeano para realizar simulações numéricas e desenvolveram experimentos em protótipos impressos em 3D, demonstrando que a arquitetura de encaixe das unidades que formam o metamaterial poderia ser ajustada para gerar variadas respostas mecânicas não lineares, tornando este material

adequado para o design de estruturas adaptáveis, além da possibilidade de utilização da energia dissipada no fenômeno de *snap through* em aplicações de isolamento e amortecimento de vibrações. As características dos metamateriais podem ser representadas por modelos constitutivos hiperelásticos, que descrevem o comportamento mecânico do material por meio da energia de deformação específica.

Neste trabalho são estudadas a estabilidade estática e vibrações de uma treliça plana abatida de material hiperelástico incompressível, descrito pelo modelo constitutivo neo-Hookeano. A estabilidade estática da treliça é investigada pela obtenção da carga crítica das barras, dos caminhos de equilíbrio das cargas verticais aplicadas e dos esforços axiais. O comportamento dinâmico da treliça é analisado a partir das frequências naturais e modos de vibração, bem como pela obtenção das curvas de frequência-amplitude e relação frequência-carga.

2 Formulação matemática

A formulação matemática a seguir é baseada no trabalho de Fonseca [3]. Para realizar o estudo da estabilidade estática e vibrações da treliça abatida de material hiperelástico neo-Hookeano, consideram-se duas configurações geométricas nomeadas treliça perfeita e treliça imperfeita, conforme apresentado na Fig. 1, adaptado de Fonseca [3]. Onde θ é o ângulo de abatimento, b_0 , b_1 e b_2 são medidas da base, l_0 , l_1 e l_2 são comprimentos das barras com área de seção transversal A_0 e massa específica ρ , e h_0 altura da treliça. A origem do sistema de coordenadas encontra-se no nó superior da treliça perfeita. Para a configuração imperfeita, a projeção horizontal do comprimento de uma das barras da treliça é 5% maior do que a da treliça perfeita, mas o comprimento total da base permanece inalterado: $b_1 + b_2 = 2b_0$.

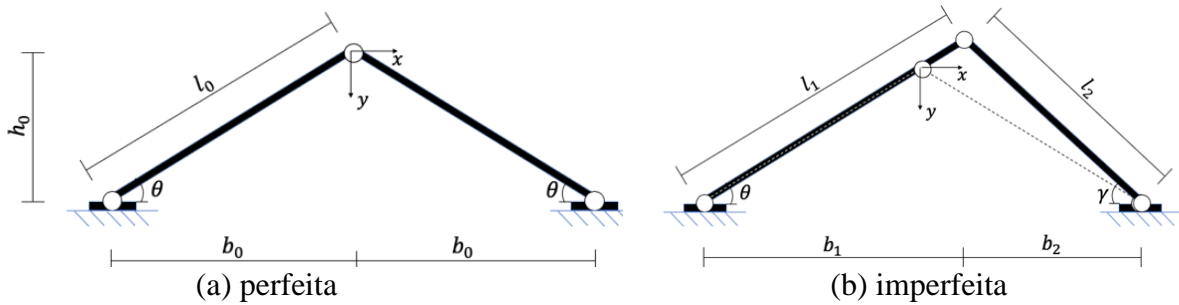


Figura 1. Geometrias da treliça.

O comportamento mecânico do material hiperelástico que compõe a treliça é descrito pelo modelo neo-Hookeano, eq. (1), escrito em função do fator de extensão principal axial λ , sendo C_1 um parâmetro do material.

$$W = \sum_{i=1}^{n^{\circ} \text{ barras}} C_1 \left(\lambda_{bi}^2 + \frac{2}{\lambda_{bi}} - 3 \right) \quad (1)$$

Uma vez que W é a energia de deformação específica, para obter a energia de deformação total do sistema U , integra-se W ao longo do volume da treliça. Portanto, a energia de deformação total U da treliça imperfeita é dada pela eq. (2), onde α_x e α_y são os graus de liberdade adimensionalizados em relação a b_0 e h_0 nas direções horizontal x e vertical y , respectivamente, e a variável auxiliar r é a razão entre os comprimentos de barra l_1 e l_2 . Obtém-se da eq. (2) a expressão da energia de deformação total para a configuração perfeita da treliça, adotando-se $b_1 = b_0$ e $r = 1$.

$$\begin{aligned}
U = C_1 A_0 \frac{b_1 \cdot l_0}{b_0} \left[\left(\frac{b_0}{b_1} \right)^2 (\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \\
\left. + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) \frac{2}{\sqrt{(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2}} - 3 \right] + \\
+ C_1 A_0 \frac{b_1 l_0}{b_0 r} \left[\left(\frac{b_0 r}{b_1} \right)^2 (\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2 + \right. \\
\left. + \left(\frac{b_1}{b_0 r} \right) \frac{2}{\sqrt{(\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2}} - 3 \right]
\end{aligned} \quad (2)$$

A energia devido ao trabalho de uma carga estática vertical p_y aplicada ao nó superior da treliça imperfeita é dada pela expressão da eq. (3) e para $b_1 = b_0$ têm-se para a treliça perfeita.

$$V_{p_y} = -p_y \sin\theta l_0 \left[\alpha_y - \left(\frac{b_1}{b_0} - 1 \right) \right] \quad (3)$$

A energia cinética para o sistema da treliça imperfeita é dada pela expressão da eq. (4), onde m representa a massa da treliça e, novamente quando se considera $b_1 = b_0$ e $r = 1$ têm-se para a treliça perfeita.

$$T = \frac{m l_0^2}{6} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\alpha_x^2 \cos^2\theta + \alpha_y^2 \sin^2\theta) + \frac{m l_0^2}{6r} \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^3 (\alpha_x^2 \cos^2\theta + \alpha_y^2 \sin^2\theta) \quad (4)$$

2.1 Análise estática

Realiza-se a análise da estabilidade estática da treliça perfeita hiperelástica, submetida a carga vertical aplicada no nó superior, calculando inicialmente a carga de flambagem da barra da treliça. Isto é feito através da expressão da eq. (5), que fornece a carga crítica para uma coluna hiperelástica neo-Hookeana, submetida a uma carga axial de compressão (Attard e Hunt [5]).

$$P_{cr} = \frac{n^2 P_{euler}}{1 - \frac{1}{4} \frac{n^2 P_{euler}}{EA} \left(1 - \frac{r_y^2}{r_z^2} \right)} \quad (5)$$

Onde, n – modo de flambagem; P_{euler} – carga crítica de Euler; r_y – raio de giração relativo à flexão em y ; r_z – raio de giração relativo à flexão em z .

Na sequência calculam-se as cargas verticais e as cargas axiais na barra, ao longo dos seus respectivos caminhos de equilíbrio, onde a verificação da estabilidade das configurações de equilíbrio obtidas é feita utilizando a forma quadrática da expressão da energia potencial total Π da treliça perfeita.

2.2 Análise Dinâmica

As formulações obtidas nesta seção foram realizadas para as duas configurações da treliça: perfeita e imperfeita. Apresenta-se o desenvolvimento referente apenas à treliça imperfeita, pois o mesmo se aplica à treliça perfeita, bastando substituir $b_1 = b_0$ e $r = 1$ nas equações de movimento da treliça imperfeita.

Aplicando a variação no Lagrangiano e substituindo o parâmetro $w = \sqrt{C_1 A_0 / m l_0}$ obtém-se as equações não lineares de movimento descritas na eq. (6) e eq. (7).

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\alpha_x)}{dt^2} + 3w^2 \left(\frac{r}{r+1} \right) \left[2 \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 + \alpha_x) - 2r \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 - \alpha_x) - \right. \\ \left. - \left(\frac{b_0}{b_1} \right) \frac{2(1 + \alpha_x)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{b_0}{b_1 r^2} \right) \frac{2(1 - \alpha_x)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\alpha_y)}{dt^2} + 3w^2 \left(\frac{r}{r+1} \right) \left[-2 \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 - \alpha_y) - 2r \left(\frac{b_0}{b_1} \right)^4 (1 - \alpha_y) - \right. \\ \left. - \left(\frac{b_0}{b_1} \right) \frac{2(1 - \alpha_y)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \alpha_x \cos\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{b_0}{b_1 r^2} \right) \frac{2(1 - \alpha_y)}{\left((\sin\theta - \alpha_y \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \alpha_x \cos\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Lineariza-se os termos não lineares das equações de movimento utilizando expansão em série de Taylor, e resolve-se o sistema de equações linearizado através de um problema de autovalor e autovetor. Para a treliça perfeita, obtém-se as equações linearizadas descritas na eq. (8) e eq. (9).

$$\alpha_{xd}'' + 6w^2 \alpha_{xd} - 6w^2 \sin^2 \theta \alpha_{xd} + 12w^2 \cos^2 \theta \alpha_{xd} = 0 \quad (8)$$

$$\alpha_{yd}'' + 6w^2 \alpha_{yd} + 12w^2 \sin^2 \theta \alpha_{yd} - 6w^2 \cos^2 \theta \alpha_{yd} = 0 \quad (9)$$

E conseqüentemente as frequências naturais de vibração, conforme apresentadas na eq. (10) e eq. (11).

$$\Omega_x = 3\sqrt{2}w \cos \theta \quad (10)$$

$$\Omega_y = 3\sqrt{2}w \sin \theta \quad (11)$$

Para obtenção da curva carga versus frequência, incrementa-se valores para a carga vertical P_y aplicada ao nó superior da treliça, e para cada incremento de carga resolve-se as equações diferenciais de equilíbrio utilizando o método numérico de Runge-Kutta de 4° ordem, obtendo-se a resposta no tempo sem amortecimento.

As curvas frequência-amplitude são obtidas utilizando-se o método de Galerkin-Urabe e o método de Newton-Raphson.

3 Resultados numéricos

Para a treliça perfeita considera-se comprimento de barra $l_0 = 1 \text{ m}$ e base com dimensão $b_0 = 0.966 \text{ m}$. Para a treliça imperfeita adota-se para as barras os comprimentos $l_1 = 1.05 \text{ m}$ e $l_2 = 0.957 \text{ m}$, relação entre os comprimentos de barra $r = 1.097$, e bases com dimensões $b_1 = 1.014 \text{ m}$ e $b_2 = 0.918 \text{ m}$. Para ambas as configurações da treliça considera-se área da seção transversal da barra indeformada igual a $A_0 = 2.89 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, ângulo de abatimento $\theta = 15^\circ$ e parâmetro $w = 6.22$. Considera-se para as treliças analisadas os parâmetros físicos utilizados por Selvadurai [7], onde o parâmetro do material assume $C_1 = 0,17 \text{ MPa}$ e $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ para a massa específica.

Na Figura 2 apresentam-se os caminhos não lineares de equilíbrio relativos à carga vertical aplicada (p_y) e ao esforço axial (N) na barra, bem como a carga de flambagem das barras com valor $P_{cr} = 700.67 N$. Os trechos do em linha tracejada, em azul e vermelho, indicam equilíbrio do tipo instável que se inicia para $\alpha_y = 0.44$ e termina em $\alpha_y = 1.56$ e, os trechos em linha contínua indicam equilíbrio estável.

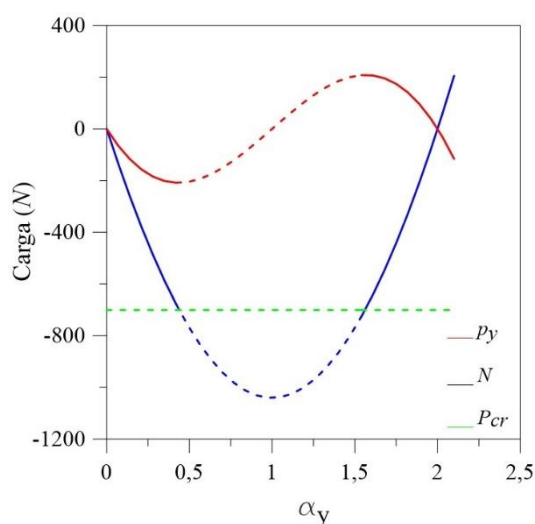


Figura 2. Caminhos de equilíbrio e carga crítica.

Os trechos instáveis e estáveis das curvas em azul e vermelho são os mesmos, uma vez que a análise da estabilidade considera a forma quadrática da expressão da energia potencial total, que engloba o trabalho da carga vertical p_y , geradora dos esforços axiais N . Observa-se na Fig. 2 que os valores da curva em vermelho estão relativamente distantes do valor da carga de flambagem, isso ocorre devido à geometria abatida da treliça, uma vez que pequenos ângulos de abatimento provocam valores baixos de carga p_y e cargas axiais com magnitudes mais altas através da relação $p_y = 2 \sin \theta N$, obtida por equilíbrio de forças no nó superior da treliça.

Da análise dinâmica linear obtêm-se as duas primeiras frequências naturais para as treliças perfeita e imperfeita. Os valores obtidos para três ângulos de abatimento distintos são apresentados na Tab. 1 e comparados com os valores obtidos por Fonseca [3]. Os valores de Ω_1 e Ω_2 equivalem, respectivamente, às frequências de vibrações nas direções y e x .

Tabela 1. Frequências naturais (rad/s) P - Perfeita, I - Imperfeita.

θ	Ω_1				Ω_2							
	Presente Trabalho		Fonseca (2018)		Presente Trabalho		Fonseca (2018)					
	P	I	P	I	P	I	P	I				
15°	6.82	6.78	6.84	6.76	0.29%	0.30%	25.47	24.07	25.48	24.07	0.04%	0.00%
45°	18.65	16.81	18.65	16.82	0.00%	0.06%	18.65	17.76	18.65	17.75	0.00%	0.06%
75°	25.47	23.21	25.48	23.21	0.04%	0.00%	6.82	5.92	6.84	5.89	0.29%	0.50%

Observa-se da Tab. 1 que não há divergência significativa entre os valores calculados para as frequências de vibração neste trabalho com os valores obtidos por Fonseca [3]. A medida que o ângulo de abatimento da treliça θ aumenta, os valores das frequências naturais também aumentam em ambas as geometrias consideradas.

Posteriormente, são apresentados os resultados a partir da solução das equações não lineares governantes do problema. Na Fig. 3 (a) e Fig. 3 (b), apresentam-se, respectivamente, as relações de frequência versus carga para os sistemas estruturais das treliças perfeita e imperfeita.

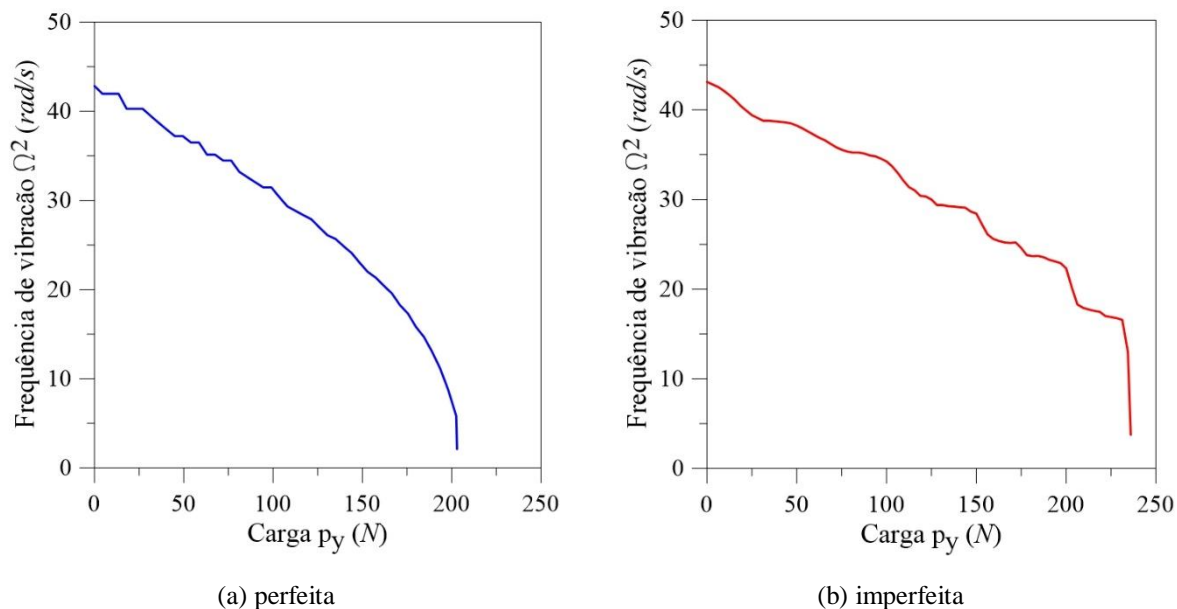


Figura 3. Relação frequência versus carga.

Os resultados apresentados na Fig. 3 mostram que o decréscimo na frequência natural de vibração é provocado pelo aumento da carga aplicada até atingir um valor crítico, ponto em que ela se torna instável, momento em que a frequência natural se torna nula conforme o critério dinâmico de estabilidade. Para a treliça perfeita, a carga crítica na Fig. 3 (a) corresponde a 203 N, valor próximo ao obtido para a carga limite na curva em vermelho da Fig. 2. Já para treliça imperfeita Fig. 3 (b) o valor de carga crítica obtida é de aproximadamente 236 N.

Da análise dinâmica não linear obtêm-se as relações frequência-amplitude para as configurações de treliça perfeita e imperfeita, em vibração livre. Para os casos onde as amplitudes não são desprezíveis, normalizaram-se as frequências obtidas pelas respectivas frequências naturais calculadas analiticamente e apresentadas na Tab. 1. Desta forma, apresenta-se na Fig. 5 (a) e Fig. 5 (b), respectivamente, a relação entre as frequências normalizadas ω e amplitudes de vibração A e B para a treliça perfeita e imperfeita. Ressalta-se que as amplitudes não apresentadas na Fig. 4, em cada caso estudado possuem valor desprezível.

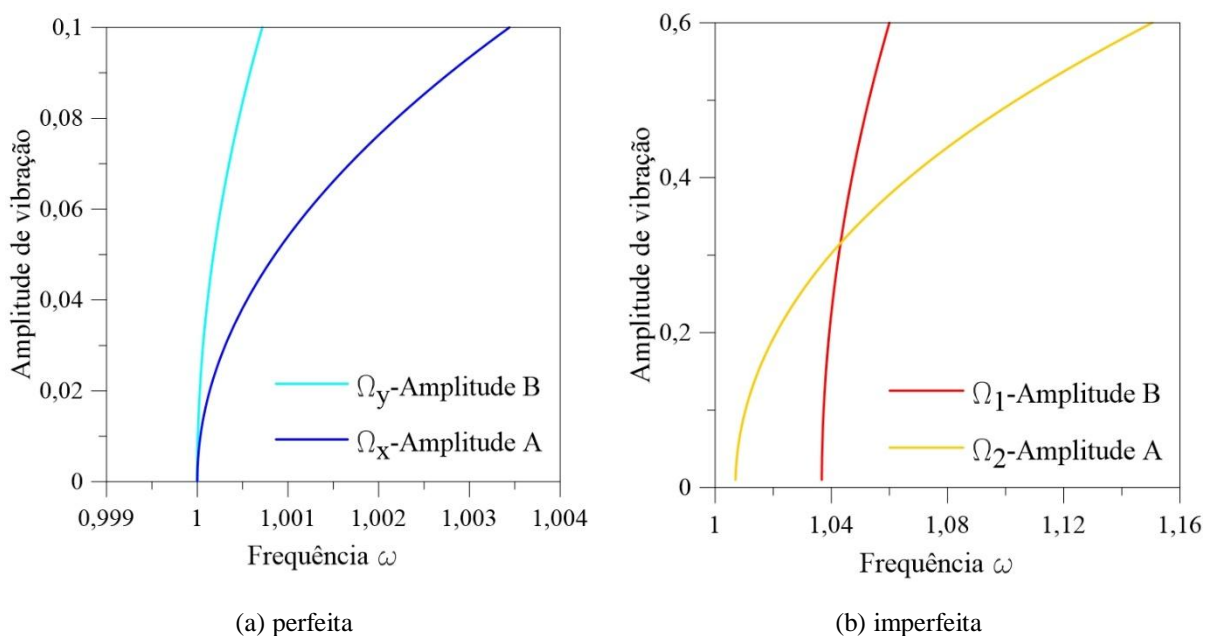


Figura 4. Relação frequência – amplitude para as treliças.

Na curva apresentada na Fig. 5 (a), para valores de amplitudes próximas de zero, ambas as frequências de vibração apresentam valor próximo da sua frequência natural obtida pela solução linear. Já na curva da Fig. 5 (b), para valores de amplitudes próximas de zero, a frequência de vibração Ω_2 apresenta valor mais próximo da sua frequência natural analítica do que a frequência de vibração Ω_1 apresentando a maior diferença, sendo de aproximadamente 4% em relação aos valores obtidos pela solução linear. Além disso, observa-se um comportamento de ganho de rigidez das treliças com o aumento da amplitude de vibração em ambos os modos estudados, sendo esse ganho de rigidez maior nos modos associados à direção x .

4 Considerações Finais

Como considerações finais deste trabalho observa-se que o caminho não linear de equilíbrio da carga vertical apresentada na curva em vermelho da Fig. 2, que ao atingir o ponto limite, a treliça perfeita estudada inverte sua posição repentinamente saltando para um segundo trecho estável, caracterizando o fenômeno de *snap through*. Além disso, no caminho de equilíbrio relacionado ao esforço interno da barra, curva em azul na Fig. 2, a instabilidade do sistema se inicia quando o esforço atinge o valor de carga crítica de Euler, como era esperado.

Para os três ângulos de abatimento da treliça analisados e apresentados na Tab. 1, observa-se que as frequências naturais de vibração da treliça imperfeita são menores que os valores observados para a treliça perfeita. Observa-se também que, tanto para treliça perfeita quanto imperfeita, que o abatimento produz um aumento dos valores das frequências naturais. Por fim, para ambas as configurações de treliça, perfeita e imperfeita, há um maior ganho de rigidez com o aumento da amplitude de vibração para modos associados à direção x .

Acknowledgements. Este trabalho foi possível graças ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Universidade Federal de Goiás.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

References

- [1] A. Kassimali and E. Bidhendi, “Stability of trusses under dynamics loads”. *Computer & structures*, vol. 29, n. 3, pp. 381-392, 1988.
- [2] I. Ario, “Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss”. *International Journal of non-linear Mechanics*, vol. 39, pp. 605-617, 2004.
- [3] F. M. Fonseca. *Comportamento não linear, bifurcações e instabilidade de uma treliça hiperelástica*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.
- [4] A. Rafsanjani, A. Akbarzadeh, D. Pasini, “Snapping mechanical metamaterials under tension”. *Advanced materials*, vol. 27, n. 39, pp. 5931-5935, 2015.
- [5] M. M. Attard and G. W. Hunt “Column buckling with shear deformations – A hyperelastic formulation”. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, n 14-15, pp. 4322-4339, 2008.
- [6] H. L. Soriano. *Introdução à dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 464 p.
- [7] A. P. S. Selvadurai, “Deflections of a rubber membrane”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, pp. 1093-1119, 2006.