

CONTRIBUIÇÃO PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE EDIFÍCIOS UTILIZANDO O P-DELTA COM A TÉCNICA DAS CARGAS LATERAIS FICTÍCIAS

Bruno Correia de Araújo Moura¹, João Carlos Cordeiro Barbirato¹

¹*Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas*

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceio, Alagoas, Brasil

brunocmoura@poli.ufrj.br, jccb@lccv.ufal.br

Abstract. Estruturas de concreto armado são frequentemente utilizadas em edificações no Brasil, devido à abundância de matéria prima e facilidade construtiva. As cidades estão cada vez mais se constituindo em aglomerações verticalizadas, edificações altas em terrenos relativamente pequenos. Quando se trata de edificações esbeltas, além de ser feita uma análise dos esforços de maneira linear, deve-se analisar a estrutura considerando os efeitos de segunda ordem provenientes da não-linearidade geométrica, por exemplo. Neste contexto, o presente trabalho traz uma contribuição ao estudo na área da estabilidade estrutural, e apresenta um programa computacional de análise de pórtico plano não somente no comportamento linear, mas também no comportamento não-linear da estrutura, a partir do processo P-Delta. Foi escolhida e implementada a técnica da carga lateral fictícia, um de seus métodos aproximados, para considerar os efeitos de segunda ordem da estrutura analisada. Isso é feito a partir de iterações na aplicação do processo até que haja a convergência nos resultados a valores definitivos de esforços e deslocamentos da estrutura. O resultado final de cargas, portanto, foi utilizado na configuração dos esforços internos e nos deslocamentos. O código computacional foi implementado na linguagem de programação PYTHON, com uso o método da rigidez direta, adicionalmente considerando a implementação de um operador tangente, onde é possível obter o valor final de deslocamentos utilizando apenas os valores obtidos na análise linear e na primeira iteração P-Delta. São apresentadas aplicações para comprovar a eficácia da formulação escolhida.

Keywords: Efeito P-Delta; Carga Lateral Fictícia; Método da Rigidez Direta.

1 Introdução

Segundo Carmo [1], a construção de edifícios cada vez mais altos e esbeltos vem sendo forçada por diversos fatores, entre eles o aumento populacional e a limitação do espaço físico dos grandes centros urbanos. Estruturas com grandes dimensões geram um tipo de problema que pode ser desconsiderado em edificações menores, que é o efeito de segunda ordem. Este efeito é decorrente do comportamento não-linear da estrutura, que leva em conta a não-linearidade (não-linearidade física) do material utilizado na construção e também a mudança de posição da estrutura quando submetida aos esforços (não-linearidade geométrica), que resultam em uma descentralização das cargas aplicadas nos pavimentos superiores. Em edificações de dimensões verticais menores, essa descentralização gera uma excentricidade pequena, e que pode ser desconsiderada no cálculo da estrutura, porém, na medida em que a estrutura aumenta em sua altura, a excentricidade gerada passa a ter um valor considerável, que interfere diretamente no cálculo dos esforços da estrutura.

A estabilidade global de uma estrutura é um fator essencial a ser analisado durante a elaboração de um projeto estrutural, visto que toda estrutura sofre deformações, portanto, são afetadas por esforços de segunda ordem, que podem acarretar na instabilidade global do sistema. Assim, é fundamental que esses esforços sejam levados em consideração no cálculo geral da estrutura, visando garantir a segurança.

Em estruturas de concreto armado, o estudo do efeito de segunda ordem apresenta uma complexidade devido ao fato de a estrutura apresentar dois tipos de não-linearidade, a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica. Segundo Pinto e Ramalho [2] a não-linearidade física do concreto armado se deve ao comportamento

do material, que não é elástico perfeito, levando em consideração efeitos como a fissuração, fluência, escoamento das armaduras e outros fatores menos importantes. Por outro lado, a não-linearidade geométrica leva em consideração as ações adicionais provenientes do deslocamento horizontal da estrutura, gerando alteração na configuração dos esforços, podendo levar o sistema ao colapso. A partir da posição deformada de uma estrutura, são gerados efeitos adicionais, denominados efeitos de segunda ordem, que mudam as solicitações atuantes. Por sua vez, a análise de estabilidade global avalia como a estrutura se comportará em relação a essa mudança de sua configuração inicial.

Um dos procedimentos automatizados utilizados na análise da não-linearidade geométrica é o método P-Delta, abordado por Lopes [3] como efeito de não-linearidade que ocorre em qualquer estrutura na qual os elementos estão submetidos a forças axiais. É, portanto, um processo que avalia os efeitos de segunda ordem que ocorrem na estrutura. Vários métodos de cálculo consideram esse efeito, e são classificados como métodos rigorosos ou exatos, métodos aproximados e métodos simplificados (DINAR *et al.* [4] e KONAPURE & DHANSHETTI [5]). Nesse trabalho, será adotado um dos métodos aproximados.

Segundo Souza e Pereira [6], nos processos aproximados o equilíbrio é estabelecido na posição deslocada, mas os efeitos de segunda ordem são indiretamente introduzidos, seja a partir da redução da rigidez dos elementos ou da aplicação de forças laterais fictícias no modelo de cálculo, transformando o problema não-linear em uma sequência de problemas lineares, que tem uma resolução mais simplificada. Os métodos mais conhecidos são: Método de Dois Ciclos Iterativos, Método da Carga de Gravidade Iterativa, Método da Rigidez Negativa e o Método da Carga Lateral Fictícia. Esse último foi o método selecionado para ser implementado para realização da análise de segunda ordem constante no presente trabalho.

2 Método das Cargas Laterais Fictícias (Processo P-Delta)

O método aproximado do processo P-Delta mais utilizado em trabalhos acadêmicos é o método das cargas laterais fictícias. Consiste em considerar a alteração nas configurações de esforços internos a partir do deslocamento horizontal na estrutura ocasionado pelas forças externas atuantes. Para aplicar esse método, determina-se uma carga fictícia que ajustará o cálculo dos esforços internos de acordo com o desalinhamento das cargas verticais em cada ponto da estrutura.

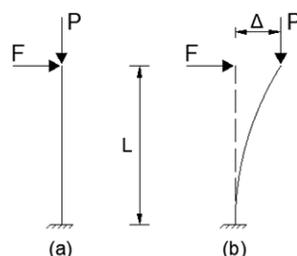


Figura 1. Configurações da estrutura: (a) indeformada; (b) deformada
Fonte: Adaptado de Moncayo [7].

Na Figura 1, pode-se observar uma estrutura sob um estado de carregamento que causa um deslocamento horizontal. A partir de uma análise linear da estrutura, obtém-se o momento resultante na base da estrutura, conforme eq. (1):

$$M_r = -F \cdot L. \quad (1)$$

Observando a configuração final da estrutura, percebe-se que além do efeito da carga horizontal, há um desalinhamento da estrutura, e a carga vertical também passa a influenciar no momento resultante na base, como pode ser expresso na eq. (2) a seguir:

$$M_r^1 = -F \cdot L - P \cdot \Delta. \quad (2)$$

Para compensar esse aumento na intensidade do momento resultante no apoio da estrutura, uma nova carga horizontal deve ser calculada e adicionada à força já existente, atualizando o carregamento e recalculando, tanto o novo deslocamento, como a nova carga fictícia até que a estrutura atinja a estabilidade. A intensidade da carga fictícia deve ser igual ao produto entre a carga vertical e o deslocamento horizontal, dividido pela altura da estrutura em análise, dessa forma, a força horizontal adicionada no ponto estudado, irá gerar um momento resultante igual ao P-Delta gerado pela carga vertical, como visto na eq. (3) e a devida substituição na eq. (4):

$$F^1 = \frac{P \cdot \Delta}{L}, \quad (3)$$

$$M_r^1 = -F \cdot L - F^1 \cdot L. \quad (4)$$

Ressalte-se que o processo de obtenção da configuração estabilizada, demanda rodadas iterativas de cálculo de novos deslocamentos laterais, transformação em cargas laterais fictícias e análise da estrutura ao novo vetor de forças. Portanto, o processo pode ser encontrado na literatura como processo iterativo. Pode-se obter maiores informações sobre o método das cargas laterais fictícias, da formulação às aplicações, em Moncayo [7] e Silva *et al.* [8].

2.1 Método da Rigidez Direta

O método da Rigidez Direta é amplamente utilizado para se realizar análises estruturais devido a sua facilidade de automatização, além de seus resultados eficientes. Segundo Soriano [9], o Método da Rigidez Direta utiliza deslocamentos como incógnitas primárias, e é formulado a partir do equilíbrio em cada nó de um modelo em função de seus deslocamentos. O sistema algébrico compacto do método da Rigidez Direta é formulado conforme a eq. (5), a seguir,

$$[R]\{u\} = \{F\}, \quad (5)$$

na qual, $[R]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $\{F\}$ é o vetor de forças e $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos.

A partir da escolha do elemento que será utilizado na discretização da estrutura, observado-se os sistemas de coordenadas globais e locais, são definidas as matrizes de incidência cinemática e as matrizes de rigidez dos elementos. A partir do triplo produto matricial, pode-se chegar à matriz de rigidez da estrutura a partir das matrizes dos elementos. Na ideia de considerar a parte da viga imersa no pilar que tem uma dimensão maior, pode-se trabalhar com um elemento especial, que leve em conta nas extremidades a possibilidade de trecho com módulo de rigidez à flexão infinita. Teoricamente, isso trará menor comprimento de vão livre das vigas, o que modificará a distribuição de momentos fletores, importantes dentro da análise estrutural.

2.2 Acoplamento do P-Delta no Método da Rigidez Direta

Para acoplar o método das cargas laterais fictícias em um algoritmo que utiliza o método da Rigidez Direta, pode-se aproveitar o fato de que na análise linear, o deslocamento horizontal de cada nó da estrutura em questão já é calculado. Pode-se, portanto, implementar com facilidade uma rotina para que sejam atualizados os carregamentos horizontais no algoritmo linear, em função dos deslocamentos horizontais e do carregamento vertical aplicado na estrutura, de forma iterativa.

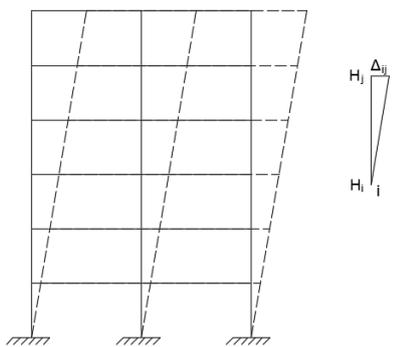


Figura 1. Pórtico em configuração indeformada e deformada
Fonte: Adaptado de Portugal [10].

Na Fig. 2, mostra-se um pórtico em sua configuração indeformada inicialmente e, também, sua configuração deformada após a aplicação do carregamento global, para se calcular as cargas fictícias a serem adicionadas no carregamento lateral. Deve-se observar o deslocamento individual entre o nó superior e o nó inferior de cada elemento vertical e em cada um deles aplicar o método das cargas laterais fictícias. Adaptando-se ao método as eq. (3) e as forças horizontais F em cada andar (Fig. 2), chega-se na eq. (6).

$$F_j^1 = \frac{P \cdot \Delta}{L} = \frac{P_j \cdot \Delta_{ij}}{(H_j - H_i)} \quad (6)$$

Após realizar todas as análises dos elementos verticais do pórtico e atualizar os resultados obtidos, uma nova configuração de carregamento é encontrada, e assim deve ser realizada uma nova análise linear da estrutura com as novas forças laterais aplicadas. Seguem-se tantas aplicações do método da carga lateral fictícia quantas necessárias, repetindo as iterações até que a estrutura atinja a estabilidade, resultando em uma nova configuração de esforços.

3 Implementação Computacional

Para realizar a análise linear e, em seguida, a de segunda ordem das estruturas adotadas, foi elaborado um programa de cálculo utilizando-se a linguagem computacional PYTHON, que permite o uso de uma ampla gama de bibliotecas disponíveis para realizar os vários cálculos. Nesse programa foi implementado um algoritmo que usa o método da rigidez direta para efetuar a análise linear da estrutura. Ainda, foram implementados passos adicionais para realizar o método das cargas laterais fictícias, refazendo os cálculos necessários até que a estrutura atinja um patamar de estabilidade.

A definição das cargas laterais fictícias inicia-se com base na eq. (2), considerando-se, agora, esforços cortantes fictícios juntamente com esforços cortantes reais, em função das diferenças de deslocamentos laterais em andares adjacentes, tomando-se como base um pavimento i (LACERDA *et al.* [11]). Para adaptação ao método utilizado, pode-se considerar os deslocamentos de cada nó individualmente, considerando então os deslocamentos horizontais de um nó de um pavimento i e uma coluna de pilares j em relação ao nó posicionado na mesma coluna de pilares j e no pavimento $i-1$. A eq. (7) define com encontrar a força fictícia a ser aplicada novamente na estrutura.

$$\bar{V}_{ij} = \frac{P_{ij}}{L_i} (\Delta_{ij} - \Delta_{i-1,j}), \quad (7)$$

na qual, P_{ij} representa o esforço vertical aplicado no nó ij ; L_i é a altura do pavimento $i-1$; e Δ_{ij} e $\Delta_{i-1,j}$ representam os deslocamentos laterais dos nós da coluna de pilares j dos pavimentos i e $i-1$, respectivamente.

A partir da eq. (7), pode-se determinar a carga lateral fictícia (\bar{H}_{ij}) no nó ij a ser aplicada, no novo passo iterativo, conforme definido na eq. (8).

$$\bar{H}_{ij} = \bar{V}_{ij} - \bar{V}_{i+1,j}. \quad (8)$$

É, portanto, o conjunto de cargas laterais fictícias que serão utilizadas para a se achar o novo vetor das ações nodais.

O algoritmo para análise linear de pórtico plano, via processo dos deslocamentos, é amplamente conhecido e de fácil implementação computacional. No caso presente, verifica-se a modificação em vários passos apenas do vetor das ações globais, com a soma das variações das cargas laterais fictícias. Assim, a matriz de rigidez uma vez definida, permanece a mesma para todas as demais fases. A inversão da matriz apenas precisa ser realizada uma única vez. Portanto, a partir do início do processo iterativo, a cada novo vetor de ações, basta a sua multiplicação pela inversa da matriz de rigidez e já são definidas as incógnitas deslocamentos globais. O ponto de parada do processo iterativo está relacionado com o nível de precisão que se deseja estabelecer, trabalhando-se com um número máximo da mantissa com valor nulo.

Por outro lado, da observação do comportamento da relação entre as variações da força horizontal e os deslocamentos nesta direção sugiu um procedimento alternativo às iterações em valores constantes, descrevendo um representação gráfica em patamares (escada) até chegar no valor de convergência. O gráfico descreve uma reta (Figura 3), portanto, capaz de ser expressa em dois pontos. Assim, pode-se trabalhar no conceito de um operador tangente que leva ao valor final do deslocamento desejado, utilizando-se os valores dos deslocamentos obtidos na análise linear e na 1ª iteração, conforme a formulação das cargas laterais fictícias.

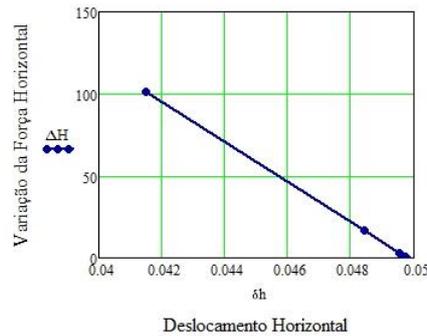


Figura 3. Relação linear para a convergência do deslocamento horizontal final

Tendo como base a eq. (7), que determina a variação das cargas laterais fictícias, a partir dos deslocamentos horizontais (na origem, obtidos na análise linear), chega-se à eq. (9), relação entre os deslocamentos laterais de um determinado pavimento, capaz de determinar o deslocamento na iteração n -ésima a partir dos deslocamentos obtidos na análise linear e na primeira iteração.

$$\delta_n = \frac{\delta_{lin}^2}{2\delta_{lin} - \delta_1} \quad (9)$$

4 Aplicação

Para testar o algoritmo implementado computacionalmente, foi escolhido a aplicação 3.1 desenvolvida em Silva *et al.* [8], um pórtico plano de um andar, não contraventado, conforme Fig. 4 (a). O material é aço, com módulo de elasticidade longitudinal igual a 205.000 MPa, coeficiente de Poisson 0,30. O pórtico é formado por dois pilares de 5 m de altura e uma viga de vão igual a 10 m (pilares CS 400x137 e viga CVS 500x217). O escoamento das colunas se dá com cargas na ordem de 6.090 kN. A carga vertical foi incremental até três vezes esse valor, utilizando uma carga horizontal igual a 10% da carga vertical. A Fig. 4 (b) representa a deformada da estrutura e define os nós.

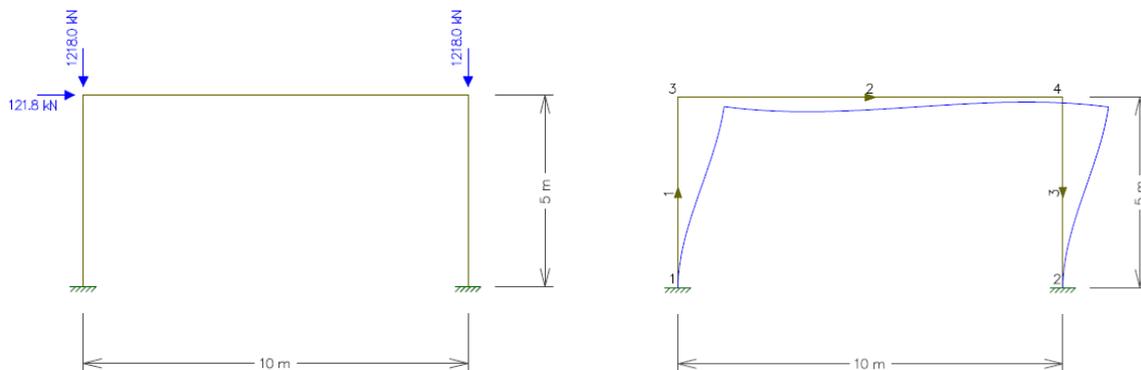


Figura 4. Pórtico plano: (a) definição da estrutura e forças aplicadas (1º incremento); (b) deformada e numeração dos nós.

Fonte: Silva *et al.* [8]

Os resultados obtidos neste trabalho foram compilados no Quadro 1, comparativamente aos resultados apresentados em Silva *et al.* [8]. Demonstram a adequação do código implementado, com pequenas diferenças para os valores referências. O número de iterações necessárias à convergência foi de 8.

Quadro 1. Resultados obtidos no presente trabalho e nas referências de Silva *et al.* [8]

Análise	Nó 3		Elemento 3		Elemento 1		Nó 1	
	Deslocamento(m)		Normal(kN)		Cortante(kN)		Fletor(kN.m)	
	Silva	Trabalho	Silva	Trabalho	Silva	Trabalho	Silva	Trabalho
Linear	0,12440	0,12445	18.666,5	18.666,47	917,79	917,79	2.599,20	2.599,19
P-Delta Robot	0,28182	0,24812	19.153,0	19.050,06	969,90	1.801,59	5.325,18	5.100,31
P-Delta STAAD	0,28188		19.153,0		969,92		5.325,75	

Na Fig. 5 são representadas as curvas referentes às análises linear, da referência P-Delta Robot e deste trabalho.

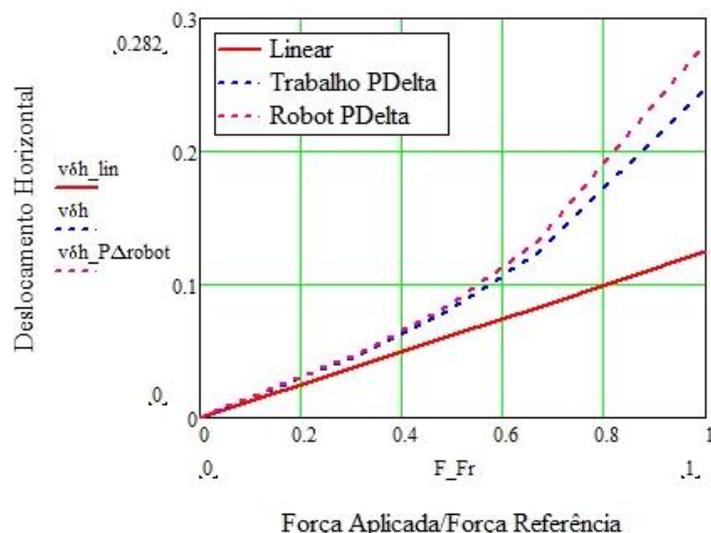


Figura 5. Comportamento do deslocamento horizontal do ponto 1

Vale ressaltar que foram processadas nove (9) configurações de carga lateral, uma (1) linear e oito (8) em iterações (com a condição de parada atribuída no código computacional deste trabalho). Utilizando-se um operador tangente, conforme eq. (9), foram necessárias apenas dois (2) processamentos para a obtenção dos mesmos valores já relatados.

5 Conclusões

O processo P-Delta foi apresentado sucintamente no presente trabalho como procedimento para análise da não-linearidade geométrica de pórticos planos. Seu acoplamento a um código computacional de análise linear de pórticos planos é de fácil execução e o resultado obtido de processamento de casos comprovam a eficácia desse processo. Na aplicação apresentada, o programa computacional escrito em linguagem PYTHON foi testado e ofereceu bons resultados frente a exemplos da literatura. Pode-se concluir que o comportamento da variação das cargas laterais fictícias com relação aos deslocamentos correlatos, possibilita chegar no valor do deslocamento na n-ésima iteração rapidamente, utilizando-se não de operadores constantes nas iterações, mas uma espécie de operador tangente. Os resultados obtidos foram os mesmos quando foram feitas todas as iterações. Sugere-se aplicar esse modelo a casos diversos na intenção de sedimentar esse entendimento. Paralelo ao estudo do operador tangente, sugere-se também, em trabalhos futuros, estudar a implementação de trechos de elementos com rigidez infinita, para que seja avaliada de forma mais precisa a alteração na configuração de esforços da estrutura com pilares largos.

Declaração de autoria

Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

Referências

- [1] R. M. S. Carmo. *Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado*. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Paulo, 1995.
- [2] R. S. Pinto; M. A. Ramalho. *Não-Linearidade Física e Geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, n. 19, p. 171-206, 2002.
- [3] A. P. Lopes; G. O. Santos; A. L. A. C. Souza. *Estudo sobre diferentes métodos de análise p-delta*. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 47., Olinda. Anais. Instituto Brasileiro de Concreto, São Paulo, 2005.

- [4] Y. Dinar; S. Karim; A. Barua; A. Uddin. P-Delta effect in reinforced concrete structures of rigid joint. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, Vol. 01, 4, 42-49, 2013.
- [5] C. G. Konapure; P. V. Dhanshetti. Effect of P-Delta action on multi-storey buildings. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, Vol. 4, 01, 668-672, January, 2015.
- [6] A. S. C. Souza; M.F. Pereira. *Evolução das Técnicas de Análise e Códigos de Projeto em Análise de 2ª Ordem de Estruturas Metálicas*. Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, v. 6, n. 1, p. 7-36, 2009
- [7] W. J. Z. Moncayo. *Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado*. 221 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Paulo, 2011.
- [8] M. F. D. S. Silva; I. F. M. Menezes; L. F. Martha. Um método simplificado para análise não-linear geométrica no FTOOL. *Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Suzana Moreira Ávila (Editor), ABMEC, Brasília, DF, Brazil, 2018.
- [9] H. L. Soriano. *Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional*. 346 p. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.
- [10] E. S. Portugal. *Análise de Estrutura de Edifícios Altos Considerando os Efeitos de Segunda Ordem pelo Método P-Delta*. Projeto de Graduação, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [11] M. M. S. Lacerda; A. C. Florêncio; W. A. da Silva; R. G. Delalibera. Avaliação dos critérios para análise da estabilidade global em edifícios de concreto armado: estudo de caso. *REEC – Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, Vol. 9, No. 2, 24-37, Porto Alegre, RS, 2014.