

Dynamic Modal Analysis by Craig-Bampton Method Applied Reticulated Structures

Lidiane de P. Pinto Mapa, Bruno Henrique Lourenço Camargos, Artur Hallack Ladeira, Reinaldo Antônio dos Reis, André César Martins de Miranda

Graduate Program in Civil Engineering (PROPEC)

Federal University of Ouro Preto, Campus Morro do Cruzeiro, School of Mining, Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, Minas Gerais, Brazil

lidianne.pinto@aluno.ufop.edu.br, bruno.camargos@aluno.ufop.edu.br, arturladeira@gmail.com, reinaldo.reis@engenharia.ufjf.br, andre.cmmiranda@gmail.com

Abstract. The Craig-Bampton method reduces the number of internal degrees of freedom of substructures by approximations, using a set of truncated vibration modes. This is useful for large/complex structures projects. This work aims to develop dynamic substructuring through the Craig-Bampton method for free vibration analysis on reticulated structures. The reduction in the number of equations provided by the method is demonstrated for the numerical examples considered. The accuracy of the method was verified through structural analyzes performed in the SAP 2000 software.

Keywords: substructuring, component-mode synthesis, Craig-Bampton method, frequencies and mode shapes.

1 Introdução

Equações que descrevem problemas de engenharia civil, mecânica e aeroespacial geralmente não possuem soluções analíticas, sendo necessário utilizar métodos numéricos para resolver essas análises. Nesse contexto, o método de Elementos Finitos é amplamente utilizado. Considerando esse método em análises dinâmicas de modelos com milhares de graus de liberdade, tem-se custo computacional alto, devido a discretização no tempo e a quantidade de detalhes (Mapa, Das Neves e Paulinelli [1]; Pippi A *et al.* [2]).

É possível dividir uma estrutura em subestruturas relativamente simples a fim de obter a resposta da estrutura completa com menor custo computacional (Cui *et al.* [3], Bathe e Dong [4], Gibanica, Abrahamsson e Rixen [5], Kim, Boo e Lee [6], Liu *et al.* [7]). A subestruturação dinâmica chamada de síntese modal de componente quando considerado o domínio modal, permite acoplar modelos de ordem reduzida de subestruturas a fim de obter o comportamento da estrutura completa. Os modelos são reduzidos através de uma aproximação dos graus de liberdade físicos por um conjunto de coordenadas generalizadas, utilizando um conjunto truncado de modos. Os diferentes métodos existentes consideram em uma matriz transformação modos de restrição, modos normais de interface livre, modos normais de interface fixa, etc.

Em aplicações de engenharia civil, a análise de danos e atualização do modelo são realizadas com menores custos computacionais quando é considerado a síntese modal de componentes, uma vez que é necessário reanalisar apenas as subestruturas modificadas (Weng *et al.* [8]; Ghiasi, Fathnejat e Torkzadeh [9]). Reanalisar uma estrutura completa em procedimentos de otimização pode ser impraticável para modelos com milhares de graus de liberdade.

A síntese modal de componentes foi inicialmente aplicada na década de 1960 por Hurty [10] e posteriormente, Craig e Bampton a simplificaram (Craig e Bampton [11]). As técnicas de CMS geralmente se concentram na redução dos graus de liberdade internos de cada subestrutura. No método Craig Bampton um conjunto truncado de modos normais de interface fixa e modos de restrição são usados para obter as matrizes de ordem reduzida do sistema.

Este artigo tem como objetivo avaliar a precisão e o custo computacional do método de Craig-Bampton em relação ao modelo completo de Método dos Elementos Finitos obtido através do software SAP 2000 considerando modelos sob vibração livre. Na próxima seção, as formulações da síntese modal de componente específicas para o método de Craig-Bampton são apresentadas.

2 Método de Craig-Bampton

Considerando a equação de equilíbrio de um modelo estrutural de elementos finitos não amortecido linear, as coordenadas físicas podem ser particionadas em graus de liberdade internos i e graus de liberdade de interface b , Sendo esses os que são compartilhados com uma estrutura adjacente ou possuem carga externa $\mathbf{f}_b(t)$. Assim, as equações de movimento podem ser dadas por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix}^{(s)} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(t) + \mathbf{r}_b(t) \end{Bmatrix}^{(s)} \quad (1)$$

Onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente, os vetores \mathbf{u} , e $\ddot{\mathbf{u}}$ são o deslocamento e a aceleração, respectivamente e o vetor $\mathbf{r}_b(t)$ é a força de reação igual e oposta desconhecida que será aplicada pela estrutura de conexão.

As coordenadas físicas \mathbf{u} das equações de equilíbrio (1) são reduzidas em coordenadas generalizadas \mathbf{p} pela matriz de transformação de Craig-Bampton:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ib} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{bb} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \mathbf{p} \quad (2)$$

Em que Φ_{ik} é uma matriz com o conjunto truncado de modos de interface fixa, calculados a partir de uma análise de problema de autovalor fixando cada DOF de interface da subestrutura (Mapa *et al.* [1]), e Ψ_{ib} são modos de restrição, representativos da deformação estática da estrutura obtida pela aplicação de um deslocamento de uma unidade a um interface DOF. Os modos de restrição são dados por:

$$\Psi_{ib} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_{ii} \mathbf{K}_{ib}) \\ \mathbf{I}_{bb} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1) e pré-multiplicando pela transposta de \mathbf{T}_{CB} , a equação de movimento reduzida torna-se:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{kk} & \hat{\mathbf{M}}_{kb} \\ \hat{\mathbf{M}}_{bk} & \hat{\mathbf{M}}_{bb} \end{pmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix}^{(s)} + \begin{pmatrix} \Lambda_{kk} & \mathbf{0}_{kb} \\ \mathbf{0}_{bk} & \hat{\mathbf{K}}_{bb} \end{pmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(t) + \mathbf{r}_b(t) \end{Bmatrix}^{(s)} \quad (4)$$

Para acoplar as subestruturas é necessário uma transformação de coordenadas de dependentes \mathbf{p} para independentes \mathbf{q} . Considerando o acoplamento de duas estruturas tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{k_1}^{(1)} \\ \mathbf{P}_b^{(1)} \\ \mathbf{P}_{k_2}^{(2)} \\ \mathbf{P}_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k_1}^{(1)} \\ \mathbf{q}_{k_2}^{(2)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (5)$$

Assim, considerando a matriz de conectividade \mathbf{L} (Eq. 5), as equações de movimento acopladas tornam-se:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k_1k_1} & \mathbf{0}_{k_1k_2} & \hat{\mathbf{M}}_{k_1b}^{(1)} \\ \mathbf{0}_{k_2k_1} & \mathbf{0}_{k_2k_2} & \hat{\mathbf{M}}_{k_2b}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{M}}_{bk_1}^{(1)} & \hat{\mathbf{M}}_{bk_2}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{bb}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{k_1}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{k_2}^{(2)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{k_1k_1}^{(1)} & \mathbf{0}_{k_1k_2} & \mathbf{0}_{k_2b} \\ \mathbf{0}_{k_2k_1} & \mathbf{\Lambda}_{k_2k_2}^{(2)} & \mathbf{0}_{k_2b} \\ \mathbf{0}_{bk_1} & \mathbf{0}_{bk_2} & \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{(1)} + \hat{\mathbf{K}}_{bb}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k_1}^{(1)} \\ \mathbf{q}_{k_2}^{(2)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

A resposta livre ou forçada a uma determinada carga/condição inicial pode ser integrada usando as equações de ordem reduzida (Eq. 6). A seguir, são demonstrados os exemplos numéricos.

3 Exemplos numéricos

A fim de exemplificar o acoplamento de vigas, inicialmente fez-se o acoplamento de três modelos de viga com a finalidade de obter um modelo de viga bi-engastada. O desenvolvimento do algoritmo do Método de Craig-Bampton foi realizado no software Matlab. A representação do acoplamento pode ser observada pela Fig. 1. Conforme é ilustrado, as vigas foram acopladas através dos graus de liberdade de deslocamento e de rotação contidos na interface compartilhada.

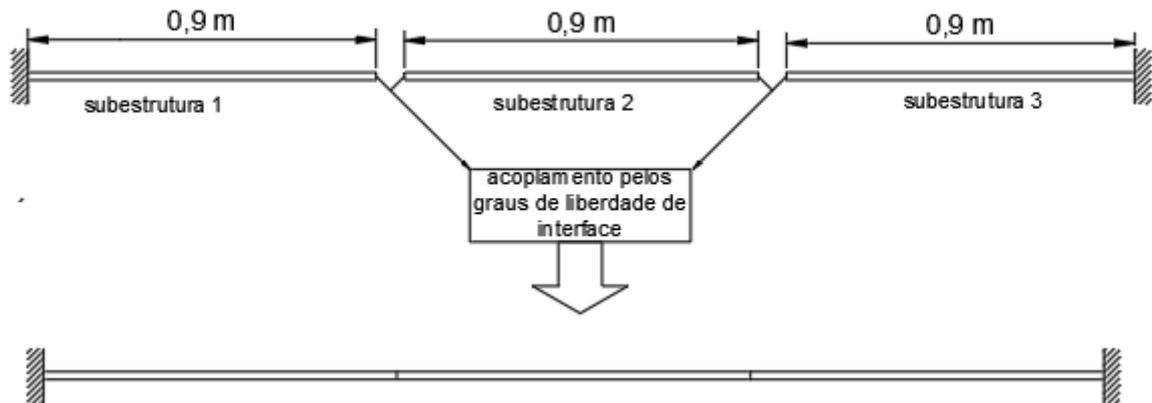


Figura 1: Representação do acoplamento de vigas pelo método de Craig-Bampton.

Cada modelo de viga possui comprimento de 0,9 m, seção circular com diâmetro de 0,10 m, módulo de elasticidade igual a 200,0 GPa, densidade de 7870 Kg/m³ e foram discretizados em 10 elementos finitos linear de dois nós. Na Tab. 1 é possível observar as frequências dos quatro primeiros modos de interface fixa obtidos para as subestruturas (Fig. 1). Como elas possuem a mesma geometria e propriedades mecânicas, os modos dinâmicos obtidos são os mesmos.

Tabela 1: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas.

Número do modo	Frequência Interface fixa (Hz):
1	554,05
2	1527,6
3	2996,9
4	4962,2

Considerou-se o intervalo de frequência de interesse de 0 a 750 Hz, e os modos correspondentes a até duas vezes a frequência máxima de interesse na matriz de transformação. Pode-se observar na Tab. 1 que os dois primeiros modos estão dentro desse intervalo. O número de modos normais de interface fixa obtidos é igual ao número de graus de liberdade internos de cada subestrutura.

Na Tab. 2 é possível observar a diferença percentual das frequências naturais entre o método de Craig-Bampton e o Método de Elementos Finitos para a estrutura completa.

Tabela 2: Diferença percentual de frequências entre o Método de C-B e o MEF

Nº do modo	Craig-Bampton	MEF	Diferença %
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	61,5604	61,5588	0,003
2	169,7140	169,6897	0,014
3	550,1975	549,9203	0,050
4	826,1226	821,5203	0,560

O diferença apresentada na Tab. 2 foi calculada através da seguinte fórmula:

$$diferença(\%) = 100 \frac{\text{resultado obtido via MEF} - \text{resultado via C - B}}{\text{resultado obtido via MEF}} \quad (7)$$

Observa-se que dentro da faixa de frequência de interesse (0 - 750 Hz) a diferença máxima entre as frequências é de 0.56 %, relativo ao quarto modo de vibração da estrutura acoplada. Pela Fig. 2 é possível observar a correlação entre os modos obtidos via MEF para estrutura completa e pelo método de Craig-Bampton através dos coeficientes MAC (Mapa [12]).

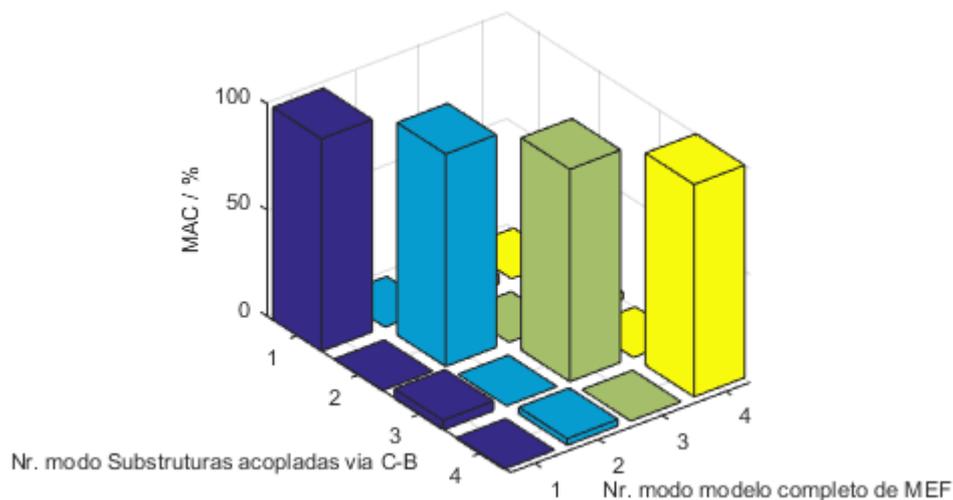


Figura 2: Valores dos coeficientes MAC entre os modos obtidos via Craig-Bampton e via Método de Elementos Fintos.

Observa-se pela Fig. 2 que os coeficientes MAC da diagonal principal se aproximaram de 100 % para todos os modos que estão dentro da faixa de frequência de interesse, mostrando a correta correspondência dos modos. Para essa aplicação o modelo completo do Método de Elementos Finitos teve 58 equações, enquanto que o modelo de Craig-Bampton apresentou 10 equações.

Em seguida, o método CB foi explorado acoplando dois modelos de barra. O esquema desta aplicação é

ilustrado pela Fig. 3.

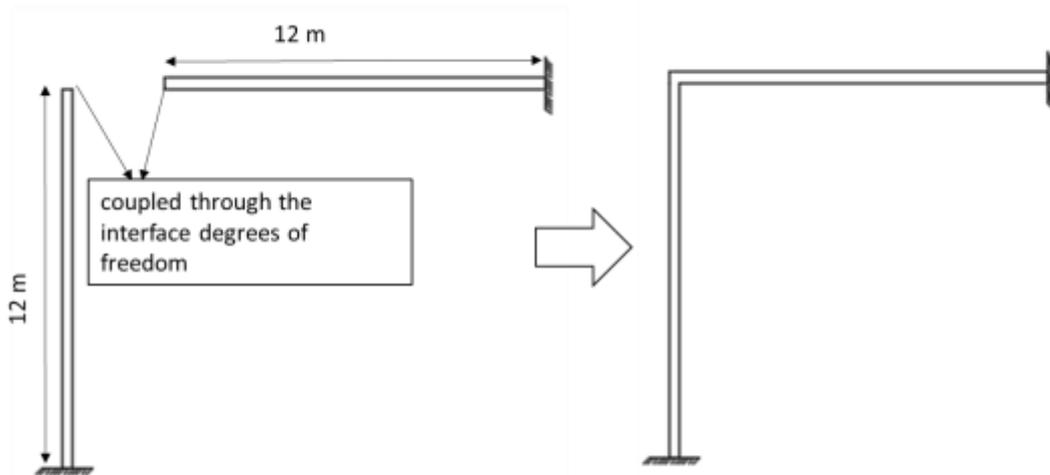


Figure 3: Representação do acoplamento de barras planas.

Neste exemplo, as barras foram discretizadas em 40 elementos finitos linear de dois nós e modeladas com o perfil W 310x143. As subestruturas foram acopladas pelos graus de liberdade de rotação e translação e estão engastadas nas extremidades.

Na Tab. 3, é possível observar as frequências relacionadas aos seis primeiros modos de interface fixa obtidos para as subestruturas.

Tabela 3: Frequências dos modos de interface fixa para Subestruturas

Nº do modo	Subestruturas
	Interface fixa (Hz)
1	17.425
2	48.033
3	94.164
4	155.659
5	212.607
6	232.531

Considerando a faixa de frequência de interesse de 0 a 110 Hz, os cinco primeiros modos são selecionados (Tab. 3). As frequências naturais obtidas por meio do modelo FEM completo e do método Craig-Bampton são fornecidas na Tab. 4.

Tabela 4: Diferença percentual de frequência natural obtida para estrutura acoplada (0 a 110 Hz)

Nº do modo	Método de C-B	Modelo completo	Diferença (%)
	Frequência (Hz)	MEF	
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	11,984	11,984	0,000
2	17,322	17,322	0,000
3	38,624	38,620	0,011
4	47,052	47,051	0,002
5	78,888	78,761	0,161
6	85,348	85,182	0,194
7	103,575	103,077	0,481
8	107,749	107,211	0,499

A Tab. 4 mostra que dentro da faixa de frequência de interesse, a diferença máxima entre as frequências de modo é 0,499%. Na Fig. 5, pode-se observar que o coeficiente MAC apresentou valores próximos a 100% para os oito primeiros modos.

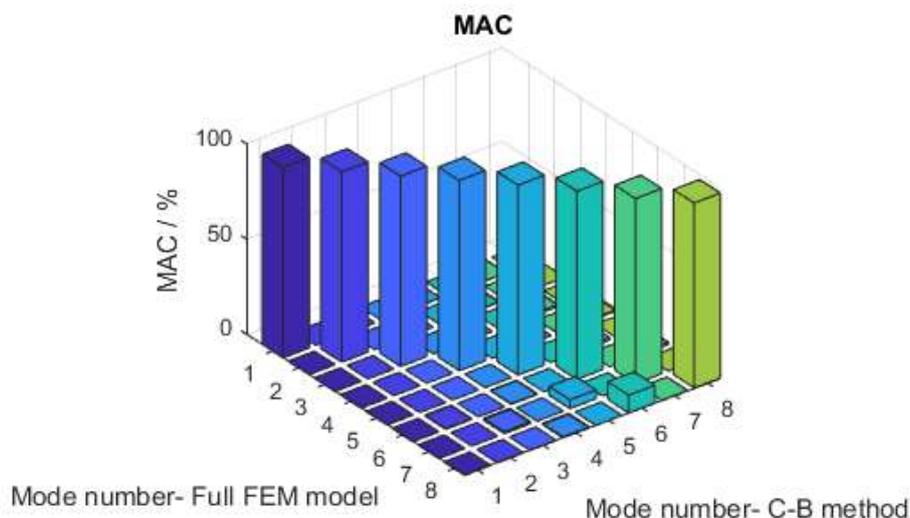


Figure 5: MAC values for the coupling of bars.

Para essa aplicação o método de Craig-Bampton utilizou 13 equações enquanto o Método de Elementos Finitos para a estrutura completa utilizou 237.

4 Conclusões

A síntese em modo componente foi desenvolvida considerando as formulações do método de Craig Bampton. As subestruturas foram acopladas por graus de liberdade de contorno e os graus de liberdade internos foram reduzidos, permitindo analisar os modelos considerados com um custo significativamente menor do que integrar a equação do modelo completo em coordenadas físicas.

Observa-se que o método apresenta confiabilidade na faixa de frequência de interesse. Os valores de MAC foram próximos a 100% mostrando que os modos se correlacionam corretamente. A máxima diferença de frequência em relação ao método dos Elementos Finitos para estrutura completa não ultrapassou 1%.

Vale ressaltar que quanto maior o número de subestruturas maior o número de equações do modelo reduzido, pois o tamanho do modelo depende do número de graus de liberdade de interface e do número de modos de interface fixa considerados.

Agradecimentos. Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) dos autores.

Referencias

- [1] L. Mapa, F. das Neves and G. Guimarães. “Dynamic Substructuring by the Craig–Bampton Method Applied to Frames”. *J. Vib. Eng. Technol.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s42417-020-00223-4>
- [2] A. Pippi, P. Bernardes Júnior, S. Avila, M. Morais, G. Doz. “Dynamic response to different models of adjacent coupled buildings”. *J Vib Eng Technol*, vol. 8 pp. 247–256. <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00102->
- [3] J. Cui, X. Wang, J. Xing, G. Zheng. “An eigenvector-based iterative procedure for the free-interface component modal synthesis method”. *Int J Numer Methods Eng*, vol. 116, pp. 723–740. <https://doi.org/10.1002/nme.5941>
- [4] K.-J. Bathe, J. Dong. “Component mode synthesis with subspace iterations for controlled accuracy of frequency and mode shape solutions”. *Comput Struct*, vol. 139, pp. 28–32, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.comps.truc.2014.03.003>

- [5] M. Gibanica, T. Abrahamsson, D. Rixen. “Multiidelity component interface reduction and modal truncation augmentation”. *Int J Numer Methods Eng*, vol. 120, pp. 105–124, 2019. <https://doi.org/10.1002/nme.6126> 8.
- [6] J.-H. Kim, S.-H. Boo, P.-S. Lee. “A dynamic condensation method with free interface substructuring. *Mech Syst Signal Process*”. vol. 129, pp. 218–234, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.04.021> 11.
- [7] Y. Liu, H. Du, H. Li, F. Li, W. Sun. “An improved method for parametric model order reduction by matrix interpolation”. *J Vib Eng Technol*, vol. 7, pp. 603–610. <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00153-w>
- [8] S. Weng, S. Zhu, Y. Xia, J. Li, W. Tian. “A review on dynamic substructuring methods for model updating and damage detection of large-scale structures.” *Adv Struct Eng*, vol. 23, n°3, pp. 584–600, 2019. <https://doi.org/10.1177/1369433219872429>
- [9] R. Ghiasi, H. Fathnejat, P. Torkzadeh. “A three-stage damage detection method for large-scale space structures using forward substructuring approach and enhanced bat optimization algorithm”. *Eng Comput*, vol. 35, pp. 857–874, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0636-0>2019
- [10] W. C. Hurty. “Vibrations of structural systems by component mode synthesis”. *J. Eng. Mech. Divis.* Vol. 86, n° 4, pp. 51–70, 1960.
- [11] R. Craig, M. Bampton. “Coupling of substructures for dynamic analysis”. *AIAA Journal*, vol. 6, n.7, pp. 1313–1319. <https://doi.org/10.2514/3.47419>