

BESO-LS: otimização topológica estrutural combinando os métodos BESO e de representação de domínio por função level-set

Diego S. Duarte¹, Marcel D. Xavier¹, Antonio A. Novotny²

¹*Departamento de Engenharia Mecânica (PGMEC-TEM), Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, Niterói - RJ, Brasil
diegosd@id.uff.br, marcelxavier@id.uff.br*

²*Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica
Av. Getúlio Vargas 333, 25651-075, Petrópolis - RJ, Brasil
novotny@lncc.br*

Resumo. Nos últimos anos, o campo de otimização topológica estrutural acumulou vasta contribuição científica, principalmente envolvendo os métodos SIMP, BESO e da derivada topológica. Há interesse específico na solução de problemas complexos de engenharia, como os multifísicos e não-lineares, que podem ter abordagem simplificada com técnicas cuja análise seja puramente discreta, como no caso do BESO. Mais recentemente, a penalização material do SIMP e o método phase field foram incorporados ao BESO, conduzindo a resultados bastante satisfatórios. Sendo assim, nesse trabalho, um método alternativo de otimização topológica é proposto com o intuito de utilizar tal benefício de análises discretas, adaptando a sensibilidade da nova versão do BESO ao método de representação de domínio por função level-set (LS). Nesta proposta, denominada BESO-LS, a sensibilidade do BESO é utilizada para guiar a função level-set em direção a um mínimo local do problema de otimização topológica. A presente técnica se destaca por enriquecer o método BESO com o critério de otimalidade advindo da level-set, cujo algoritmo é extremamente simples e bastante eficiente. A aplicabilidade do método BESO-LS é demonstrada através da realização de exemplos numéricos no contexto de minimização da complacência estrutural, bem como na síntese de mecanismos flexíveis.

Palavras-chave: otimização topológica estrutural, BESO, level-set

1 Introdução

Otimização topológica estrutural consiste em resolver problemas de minimização para uma determinada função custo, retirando e/ou incluindo material no domínio de análise. Alguns métodos consagrados na literatura, como SIMP, BESO, derivada topológica, entre outros que tratam este tema, estão resumidos no trabalho de Ferrer [1], na seção introdutória. Com a motivação de simplificar abordagens complexas, este estudo utiliza uma técnica discreta de otimização topológica estrutural, o método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*), em conjunto com o método de representação de domínio por função level-set (LS). A formulação do BESO é feita com base na discretização do problema via Método dos Elementos Finitos, enquanto a determinação da topologia ótima é realizada por uma classificação relativa de números de sensibilidade calculados para cada elemento da malha. Huang e Xie [2] apresentaram uma versão atualizada do BESO, que aplica o esquema de interpolação material com penalização. Recentemente, Gao et al. [3] propuseram uma combinação do BESO com o método phase field, aprimorando o processo de otimização. Nesta linha de aprimoramento, a presente proposta, chamada BESO-LS, ao adaptar o BESO ao método level-set, possibilita a aplicação do algoritmo de otimização topológica proposto por Amstutz e Andrä [4], enriquecendo a presente técnica com seu critério de otimalidade, de forma simples e eficiente. Para validação do método aqui proposto, alguns exemplos numéricos no contexto de minimização da complacência estrutural, bem como na síntese de mecanismos flexíveis, são apresentados.

2 Formulação do Problema

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, aberto e limitado, o domínio de análise do problema, composto por dois subdomínios: $\Omega \subset \mathcal{D}$, representando um material elástico, e $\mathcal{D} \setminus \Omega$, representando um material complacente. Veja o problema representado

na Fig. 1, onde os contornos Γ_D e Γ_N , de Dirichlet e de Neumann, respectivamente, são tais que $\partial\mathcal{D} = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Além disso, o vetor \bar{q} é uma tração aplicada em Γ_N e u é o campo vetorial de deslocamentos. Para caracterizar a distribuição dos materiais, considera-se um parâmetro ρ , definido como

$$\rho(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega, \\ \rho_0, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

com $0 < \rho_0 \ll 1$. Tal caracterização é imposta através do tensor de tensões de Cauchy $\sigma(u) = \rho\mathbb{C}(\nabla u)^s$, considerando isotropia material, onde ρ é dado pela eq. (1), \mathbb{C} é o tensor de elasticidade e $(\nabla u)^s$, o tensor das deformações. Para uma descrição completa da formulação do presente problema no contínuo, ver Novotny e Sokolowski [5], capítulo 5, por exemplo.

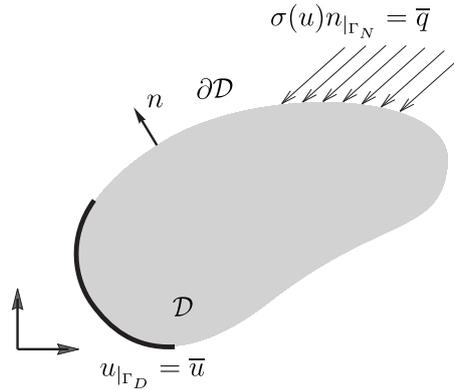


Figura 1. Problema elástico definido no domínio de referência.

A formulação pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) da equação de equilíbrio associada ao problema em questão pode ser escrita como:

$$KU = F, \quad (2)$$

onde $K = K^\top = \rho K_0$ é a matriz de rigidez global do sistema e K_0 é a matriz de rigidez nominal, com ρ dado pela eq. (1), F , o vetor força e U , a solução discreta do problema. A partir desses elementos, os problemas de otimização aqui tratados podem ser descritos da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \Psi(\Omega) + \beta|\Omega|, \quad (3)$$

na qual Ψ é o funcional de forma, isto é, a função objetivo, e β é uma penalização volumétrica que controlará a fração de volume ao final do processo de otimização.

3 Análise de Sensibilidade

A proposta central do presente trabalho consiste em integrar o método de representação de domínio por função level-set à sensibilidade do método BESO, apresentado por Huang e Xie [2], a fim de resolver o problema de minimização da eq. (3). Desta forma, a ideia é remover um elemento K^e e substituí-lo por γK^e , com $K^e = \rho^p K_0^e$, onde K_0^e é a matriz de rigidez nominal do e -ésimo elemento finito, p é o fator de penalização (em geral, $p = 3$, segundo Huang e Xie [2]) e $\gamma = \gamma(x)$ é o contraste nas propriedades materiais definido como

$$\gamma(x) := \begin{cases} \rho_0, & \text{se } x \in \Omega, \\ \rho_0^{-1}, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

com $0 < \gamma < \infty$. A forma perturbada da matriz de rigidez K pode ser avaliada como

$$\begin{aligned} K_\rho &= K - \rho^p K_0^e + \gamma \rho^p K_0^e \\ &= K - (1 - \gamma) \rho^p K_0^e. \end{aligned} \quad (5)$$

A sensibilidade associada é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{K} &:= \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{K_{\rho+\Delta\rho} - K_\rho}{\Delta\rho} \\ &= -(1 - \gamma) p \rho^{p-1} K_0^e. \end{aligned} \quad (6)$$

Portanto, a sensibilidade da eq. (2) é dada por

$$K\dot{U} = -\dot{K}U = (1 - \gamma) p \rho^{p-1} K_0^e U^e \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = (1 - \gamma) p \rho^{p-1} K^{-1} K_0^e U^e. \quad (7)$$

A introdução do contraste γ induz o método de representação de domínio por função level-set, como proposto por Amstutz e Andrä [4]. Esta estratégia simples permite que a sensibilidade BESO guie a função level-set em direção a um mínimo local do problema de otimização topológica com base no critério de otimalidade associado.

4 Algoritmo de Otimização Topológica

Nesta seção, o algoritmo de otimização topológica é apresentado. Baseado na combinação dos métodos de representação de domínio por função level-set e BESO, este algoritmo, originalmente apresentado por Amstutz e Andrä [4], basicamente busca uma condição de otimalidade local para o problema de minimização da eq. (3), em termos do gradiente topológico e da função level-set. A função level-set Φ caracteriza a região elástica, $\Omega \subset \mathcal{D}$, e a região complacente, $\mathcal{D} \setminus \Omega$, da seguinte forma

$$\Phi(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ > 0, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \Omega, \\ = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Uma condição suficiente de otimalidade local para o problema na eq. (3) é apresentada por Amstutz [6] como:

$$\dot{\Psi}(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (9)$$

onde $\dot{\Psi}(x)$ é o gradiente topológico do funcional de forma Ψ em $x \in \mathcal{D}$. Portanto, define-se

$$b(x) := \begin{cases} -\dot{\Psi}(x), & \text{se } \Phi(x) < 0, \\ +\dot{\Psi}(x), & \text{se } \Phi(x) > 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b(x) < 0, & \text{se } \Phi(x) < 0, \\ b(x) > 0, & \text{se } \Phi(x) > 0. \end{cases} \quad (10)$$

A condição na eq. (10) é satisfeita somente se b coincide com Φ por um fator estritamente positivo, isto é, $\exists \tau > 0$: $b = \tau\Phi$, ou

$$\theta := \arccos \left[\frac{\langle b, \Phi \rangle_{L^2(\mathcal{D})}}{\|b\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{D})}} \right] = 0, \quad (11)$$

onde θ é o ângulo entre as funções b e Φ e será utilizado como a condição de otimalidade neste algoritmo.

O processo de otimização inicia-se com a escolha de uma função level-set inicial Φ_0 , tal que $\|\Phi_0\|_{L^2(\mathcal{D})} = 1$. Numa iteração n qualquer, calcula-se a função b_n associada à função level-set Φ_n . Então, Φ_{n+1} é atualizada de acordo com a seguinte combinação linear entre as funções b_n e Φ_n :

$$\Phi_{n+1} = \frac{1}{\sin \theta_n} \left[\sin((1-k)\theta_n)\Phi_n + \sin(k\theta_n) \frac{b_n}{\|b_n\|_{L^2(\mathcal{D})}} \right], \forall n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

onde k é o tamanho do passo, determinado por uma busca linear a fim de diminuir o valor da função objetivo $\Psi(\Omega_n)$, com Ω_n usado para denotar o domínio associado a Φ_n . O processo termina quando $\theta \leq \varepsilon_\theta$, onde ε_θ é o parâmetro de tolerância solicitado. Além disso, numa iteração n , quando $k < \varepsilon_k$, sendo $\varepsilon_k > 0$ outro parâmetro de tolerância de entrada, mas $\theta > \varepsilon_\theta$, um refinamento da malha de \mathcal{D} é realizado e o processo iterativo é retomado. Para um detalhamento completo do algoritmo apresentado, ver, por exemplo, Novotny e Sokolowski [5].

5 Experimentos Numéricos

5.1 Complacência

Como forma de validar o presente método, o primeiro exemplo a ser estudado será o da minimização da complacência estrutural. A complacência, amplamente utilizada em inglês como *compliance*, pode ser interpretada como o trabalho realizado pelas forças externas e seu funcional de forma discreto (MEF) é dado por

$$\Psi = F \cdot U. \quad (13)$$

Derivando a equação acima em relação à perturbação considerada e utilizando a expressão obtida para \dot{U} , dada pela eq. (7), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= F \cdot \dot{U} \\ &= (1-\gamma)p\rho^{p-1}K^{-1}K_0^e U^e \cdot F \\ &= (1-\gamma)p\rho^{p-1}K_0^e U^e \cdot K^{-T}F \\ &= (1-\gamma)p\rho^{p-1}K_0^e U^e \cdot U^e. \end{aligned} \quad (14)$$

Da definição do contraste na eq. (4), segue, finalmente, que

$$\dot{\Psi} = \begin{cases} +(1-\rho_0)pK_0^e U^e \cdot U^e, & \text{em } \Omega, \\ -(1-\rho_0)p\rho_0^{p-2}K_0^e U^e \cdot U^e, & \text{em } \mathcal{D} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (15)$$

Exemplo numérico

Neste primeiro exemplo, o domínio inicial é representado por um retângulo com altura $h = 1.0$, largura $w = 2.0$, engastado em toda sua aresta esquerda e com um carregamento concentrado \bar{q} aplicado no ponto médio de sua aresta livre (veja Fig. 2(a)). O domínio é discretizado em uma malha triangular de elementos finitos, inicialmente com 3200 elementos e 1661 nós. Demais parâmetros, com respeito ao material e ao processo de otimização, estão apresentados na Tab. 1. Foi considerada a hipótese de estado plano de tensões.

A topologia resultante, representada na Fig. 2(b), se mostra compatível com os resultados da literatura, veja Ferrer [1], Huang e Xie [2], Amstutz e Andrä [4] e Bendsøe e Sigmund [7]. No gráfico da Fig. 3, confirma-se a convergência da minimização do funcional de forma e do ângulo theta (θ) durante o processo de otimização. Nota-se que cada um dos três picos na curva de theta é induzido por um refinamento de malha para aprimoramento de resolução. O processo contabilizou 60 iterações, alcançando um volume de cerca de 36.0% do volume inicial.

Tabela 1. Exemplo da viga engastada: Parâmetros.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
E	1.0	\bar{q}	1.0
ρ_0	10^{-3}	p	3
ε_k	10^{-3}	ν	1/3
ε_θ	$\pi/180$	β	3.5

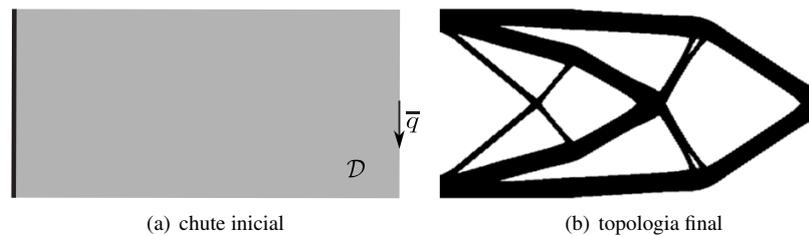


Figura 2. Exemplo da viga engastada.

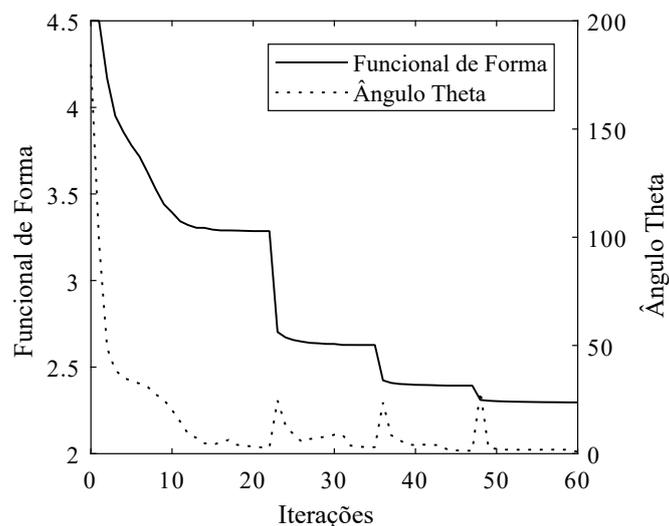


Figura 3. Exemplo da viga engastada: convergência do funcional e do ângulo theta.

5.2 Mecanismos flexíveis

Mecanismos flexíveis são estruturas compostas por um único componente cuja forma permite realizar deslocamentos complexos a partir de excitações simples. Para descrição do modelo mecânico de um mecanismo flexível genérico, ajusta-se o problema da Seção 2. Primeiramente, Γ_N é dividido em três partes mutuamente separadas Γ_{in} , Γ_{out} e Γ_0 , tal que $\Gamma_N = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$. Objetiva-se a maximização do deslocamento de saída u_{out} sobre Γ_{out} em uma direção específica para um dado deslocamento de entrada u_{in} sobre Γ_{in} . Novamente, para mais detalhes acerca da formulação completa do problema no contínuo, veja Novotny e Sokolowski [5], capítulo 5.

A forma discreta (MEF) do funcional de forma para mecanismos flexíveis é dada por

$$\Psi = F_{in} \cdot U + \kappa F_{out} \cdot U, \quad (16)$$

onde $\kappa > 0$ é um parâmetro de peso. Considera-se ainda para esta análise o seguinte estado adjunto associado:

$$KV = -F_{in} - \kappa F_{out}. \quad (17)$$

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior e utilizando a solução do estado adjunto introduzido, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= (F_{in} + \kappa F_{out}) \cdot \dot{U} \\ &= (1 - \gamma)p\rho^{p-1}K^{-1}K_0^e U^e \cdot (F_{in} + \kappa F_{out}) \\ &= (1 - \gamma)p\rho^{p-1}K_0^e U^e \cdot K^{-\top}(F_{in} + \kappa F_{out}) \\ &= -(1 - \gamma)p\rho^{p-1}K_0^e U^e \cdot V^e. \end{aligned} \quad (18)$$

Por fim, da definição do contraste na eq. (4), segue que

$$\dot{\Psi} = \begin{cases} -(1 - \rho_0)pK_0^e U^e \cdot V^e, & \text{em } \Omega, \\ +(1 - \rho_0)p\rho_0^{p-2}K_0^e U^e \cdot V^e, & \text{em } \mathcal{D} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (19)$$

Exemplo numérico

Como exemplo de um problema de mecanismos flexíveis, objetiva-se a síntese de um mecanismo inversor. O domínio inicial é um quadrado 1x1, fixado em seus vértices esquerdos e com carregamentos nos centros das arestas laterais, como ilustra a Fig. 4(a). Os demais parâmetros estão representados na Tab. 2. Analogamente ao exemplo anterior, o domínio foi discretizado em uma malha triangular de elementos finitos, inicialmente com 10000 elementos e 5101 nós. Uma sequência consecutiva de três refinamentos de malha também foi realizada para aprimoramento resolutivo. Manteve-se a hipótese de estado plano de tensões para este exemplo.

Tabela 2. Exemplo do mecanismo inversor: Parâmetros.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
E	1.0	ν	1/3
q_{in}	2.0	q_{out}	1.0
ρ_0	10^{-3}	p	3
ε_k	10^{-3}	κ	10
ε_θ	$\pi/180$	β	3

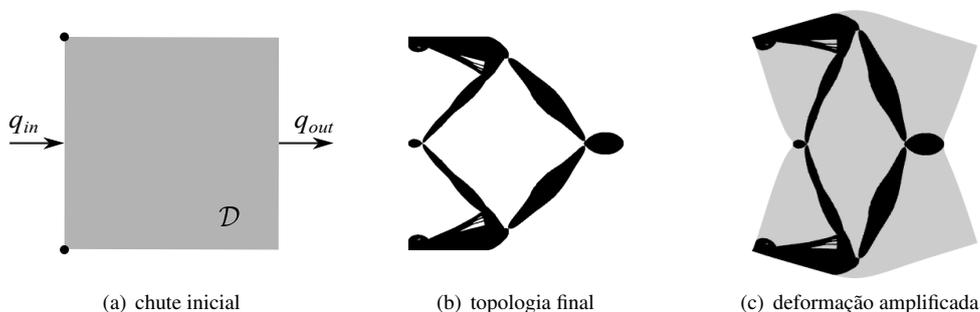


Figura 4. Exemplo do mecanismo inversor.

A topologia resultante do mecanismo inversor está disposta na Fig. 4(b) e é consonante com os resultados da literatura (Bendsøe e Sigmund [7], Lopes e Novotny [8] e Huang et al. [9]). Com o intuito de esclarecer o funcionamento deste mecanismo, uma deformação amplificada foi simulada na Fig. 4(c). O processo de otimização atingiu

uma fração volumétrica de aproximadamente 21.6% do volume inicial em 41 iterações. A Figura 5 demonstra a convergência ao longo do processo.

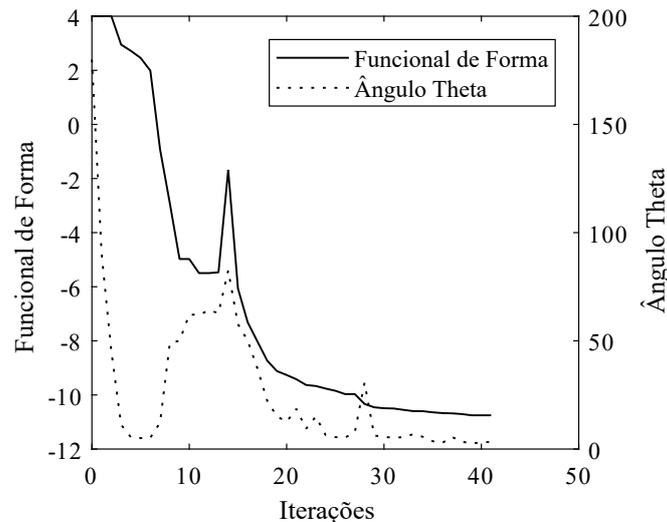


Figura 5. Exemplo do mecanismo inversor: convergência do funcional e do ângulo theta.

6 Conclusões

A contribuição principal do presente trabalho é um método alternativo de otimização topológica estrutural, através da integração dos métodos BESO e level-set, viabilizando uma ferramenta simples e de baixo custo computacional. A proposta apresentada obteve resultados satisfatórios quando comparados a exemplos disponíveis na literatura. Trabalhos futuros envolvem aplicação em problemas não-lineares e multifísicos, assim como avaliação do método em estruturas compostas por mais de um material.

Agradecimentos. Dirige-se agradecimento à CAPES pela bolsa de mestrado ao primeiro autor.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Ferrer, A., 2019. SIMP-ALL: A generalized SIMP method based on the topological derivative concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 120, pp. 361–381.
- [2] Huang, X. e Xie, Y. M., 2009. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. *Comput Mech*, vol. 43, pp. 393–401.
- [3] Gao, J., Song, B., e Mao, Z., 2020. Combination of the phase field method and BESO method for topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, vol. 61, pp. 225—237.
- [4] Amstutz, S. e Andrä, H., 2006. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, vol. 216, n. 2, pp. 573–588.
- [5] Novotny, A. e Sokolowski, J., 2020. *An Introduction to the Topological Derivative Method*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing.
- [6] Amstutz, S., 2011. Analysis of a level set method for topology optimization. *Optimization Methods and Software*, vol. 26, n. 4-5, pp. 555–573.
- [7] Bendsoe, M. P. e Sigmund, O., 2003. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Lopes, C. G. e Novotny, A. A., 2016. Topology design of compliant mechanisms with stress constraints based on the topological derivative concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 54, n. 4, pp. 737–746.
- [9] Huang, X., Li, Y., Zhou, S. W., e Xie, Y. M., 2014. Topology optimization of compliant mechanisms with desired structural stiffness. *Engineering Structures*, vol. 79, pp. 13–21.