

Topological Optimization of three-dimensional Structures using the methods of moving asymptotes and optimality criteria

Hélio Luiz Simonetti¹, Valério Silva Almeida², Francisco de Assis das Neves³, Virgil Del Duca Almeida¹

¹Dept. Mathematics and Automation and Control Engineering, Federal Institute of Minas Gerais (IFMG)
R. Itaguaçu, 595 - São Caetano, Betim - MG, 32677-562

helio.simonetti@ifmg.edu.br, virgil.almeida@ifmg.edu.br

²Dept. Structural and Geotechnical Engineering at Escola Politécnica da University of São Paulo (EPUSP)

Brasil Av. Prof. Almeida Prado, 83 - Butantã, São Paulo - SP, 05508-070

valerio.almeida@pq.cnpq.br

³Dept. Civil Engineering, Federal University of Ouro Preto (UFOP)

Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, 35400-000, Ouro Preto-MG-Brasil

fassis@ufop.edu.br

Abstract. In structural optimization, one of the most fascinating fields is Topological Optimization (TO). In this article, the evolutionary topological optimization methods Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SESO) and Sequential Element Rejection and Admission (SERA) are used to minimize the growth of compliance using the Method of Moving Asymptotes (MMA) and the Optimality Criteria (OC) that applies the deterministic procedure with lagrangian multipliers. The effect of changing asymptotes is to control the generation of subproblems, which can both stabilize and accelerate the convergence of the overall process. The three-dimensional topological optimization of the cantilever beam is performed. Therefore, to optimize the computational solution, such as cost and excess memory, which occur in these types of problems, a Preconditioned Conjugated Gradient Method (PCG) is used as an iterative solver. The results obtained are compared with the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) that uses for convergence the OC.

Keywords: Topology Optimization, SESO, SERA, Method of Moving Asymptotes, Optimality Criteria

1 Introdução

A Otimização Topológica (OT) busca a distribuição ótima de material no domínio da solução para maximizar um desempenho mecânico sob determinadas restrições. Seus algoritmos removem e adicionam seletivamente os elementos ineficientes para obter uma configuração ótima, Tovar *et al.* [1]. A OT é considerada um campo importante na Otimização Estrutural (OE), área que atende interesse de projetistas e fabricantes de projetos mecânicos. É um campo de pesquisa que nas duas últimas décadas apresentou uma rápida expansão de problemas planos para tridimensional. Possui importantes aplicações práticas nas indústrias automotiva e aeroespacial e hoje é uma ferramenta importantíssima na Indústria 4.0 com aplicações em Manufatura Aditiva (MA), para exemplificar esse potencial da OT, o trabalho de Zegard e Paulino [2] mostra uma integração da OT com a MA aplicada na área médica com a reconstrução de crânio facial. Munk *et al.* [3] abordam o problema de OT na asa de uma aeronave hipersônica considerando os efeitos da temperatura na estrutura, usando o algoritmo BESO. Sigmund [4] desenvolveu um código Matlab, para otimização de topologia com base na minimização da compliance, usando critérios de otimização que dependem da sensibilidade da função objetivo. Liu e Tovar [5] desenvolveram um código computacional para o estudo da OT de estruturas tridimensionais. O programa implementado no MATLAB usando modelo SIMP. Zuo e Xie [6] implementaram um algoritmo de OT usando Python e emprega método BESO em conjunto com o software Abaqus.

No presente artigo, para resolver o problema da OT, usam-se os métodos de Critério de Otimalidade, Optimality Criteria (OC) [4] e o das Assíntotas Móveis - Method of Moving Asymptotes (MMA) visto em Svanberg [7]. Esses métodos foram implementados nos processos evolucionários de OT, Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SESO) - Simonetti *et al.* [8] - e Sequential Element Rejection and Admission (SERA), Rozvany e Querin [9]; e são usados para minimizar o crescimento da compliance. O método MMA baseado em gradiente é empregado para resolver o problema e a análise de sensibilidade é realizada para lidar com problemas de grande escala. O método OC é o método mais usado em OT por ser rápido e eficiente. Apresenta-se um problema da OT tridimensional de grande escala aplicada a uma viga em balanço. Para a resolução dos sistemas lineares, que demanda um alto custo e excesso de memória, o Método dos Gradientes Conjugados com o uso do pré-condicionador Jacobi é usado. Os resultados obtidos tem boa acurácia com o exemplo extraído da literatura, mostrando que SESO e SERA são métodos evolucionários de otimização com capacidade para resolver problemas de OT tridimensionais com baixo custo computacional e fácil implementação. Destaca-se que um índice de performance proposto por Liang *et al.* [10] foi implementado e incorporado ao modelo.

2 Métodos Evolucionários

Os métodos de otimização estrutural evolucionários são baseados em uma heurística simples de que a estrutura evolui para um ótimo, removendo lentamente do domínio da solução elementos ineficientes para a estrutura. Destaca-se que nos métodos SESO e SERA certas regiões do material podem ser adicionados e removidos do domínio de projeto até que uma configuração ótima seja alcançada, sendo assim de natureza bidirecional. Mas, a principal diferença entre eles está na heurística de remoção e adição dos elementos do domínio da estrutura. No método SERA são usados dois critérios separados de remoção e adição de elementos do domínio, permitindo a alteração de status "virtual" para "real" e vice-versa. A topologia final é construída com todo o material real presente na estrutura. O método SESO usa apenas um critério para realizar esse procedimento, em que elementos que atendam este critério são removidos do domínio, ordenados e agrupados com um percentil dos grupos com menores compliance e são descartados enquanto seu percentil complementar são devolvidos à estrutura suavizando o processo de remoção radical do método clássico ESO. Além disso, o uso de variáveis discretas garante que a topologia final está livre de regiões cinzentas como ocorre em métodos contínuos: SIMP. Destaca-se que o método SESO tem como variáveis discretas os elementos do domínio enquanto o SERA possui como variável a densidade de cada elemento.

2.1 Formulação do problema de otimização - SESO e SERA

O problema de otimização para o método SESO, [8], pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && C = F^T u \\
 & \text{sujeito a} && Ku = F \\
 & && V(x) = \sum_{i=1}^n x_i^T V_i \leq V^* \\
 & && X = \{x_1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n\}, x_i = 10^{-9} \text{ e } x_i = 1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

V_i é o volume do elemento, V^* é o volume prescrito, X o vetor de variáveis e x_j representa a variável de projeto do j -ésimo elemento. A formulação do problema de otimização usando o método SERA pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && C = F^T u \\
 & \text{sujeito a} && Ku = F \\
 & && V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i V_i}{V_0} \leq V^* \quad \text{com } x_i = \{x_{min}, 1\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

V_i corresponde ao volume de cada elemento finito do domínio de projeto, V^* é o volume prescrito e V_0 é o volume do domínio de projeto. Com x_i sendo a densidade do elemento que é a variável de projeto do SERA.

2.2 Índice de performance

Uma abordagem apresentada por [10] em sua pesquisa de estruturas elásticas lineares mostra que em um projeto final que tem por objetivo o nível de rigidez definido tem sua performance baseada na remoção dos elementos com menores energia de deformação. Define-se assim um índice de performance baseado em energia e expresso por:

$$PI = \frac{C_0 V_0}{C_k V_k}. \quad (3)$$

PI é o índice de performance da estrutura, C_0 é a compliance inicial, V_0 o volume inicial da estrutura, C_k é a compliance e V_k o volume na k -ésima iteração. Esse parâmetro tem a capacidade de monitorar o procedimento de otimização detectando pequenas perturbações na compliance devido a remoção desses elementos.

2.3 Esquema de filtragem

Nos métodos evolucionários discretos considera-se que cada elemento individualmente seja definido como ausente, indicado com o algarismo inteiro “0” ou presente “1”. O fato de minimizar a compliance resulta em valores mínimos e máximos possíveis para cada elemento individual, sem considerar a estrutura total. Isso não é benéfico para o procedimento de otimização pois os elementos podem ficar conectados por apenas dois nós, resultando em um padrão de tabuleiro de xadrez. Esse problema pode ser solucionado pelo uso de várias técnicas de filtragem, sendo as mais comuns a filtragem por densidade ou sensibilidade. Nesse sentido, emprega-se o processo de filtro de densidade proposto por Bruns e Tortorelli [11] cuja função é escrita da seguinte forma:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^N H_{ij} v_j x_j}{\sum_{j=1}^N H_{ij} v_j}. \quad (4)$$

com N é o número de elementos vizinhos ao elemento x_i com volume v_i , \bar{x}_i é a média ponderada dos elementos vizinhos a x_i com $H_{ij} = R - d_{ij}$ seu fator de ponderação, $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ a distância entre os centros dos elementos x_i e x_j , R raio da esfera cujo centro é o centro do elemento x_i , com (x_i, y_i, z_i) e (x_j, y_j, z_j) sendo as coordenadas dos centros dos elementos x_i e x_j , respectivamente.

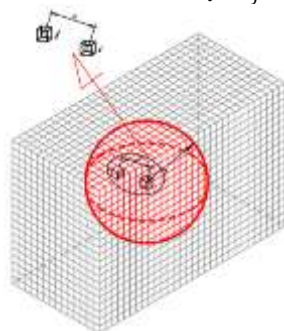


Figura 1 – Esquema do filtro espacial

2.4 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade do projeto é necessária para a solução do problema de OT, uma vez que elas quantificam a relação entre as mudanças nas variáveis do projeto, as mudanças na função objetivo e restrições. Nesta pesquisa, são necessárias sensibilidades em relação às variáveis de projeto que são usadas nos algoritmos MMA e OC. Existem vários métodos empregados para obter sensibilidades de projeto, [5], Gebremedhen *et al.* [12] e Ghabraie *et al.* [13]. Assim, sem alterar a sua heurística de remoção, ver [8], e usando uma versão modificada do SESO, pode-se escrever:

$$E_i(x) = E_{min} + x_i(E_0 - E_{min}) \quad (5)$$

com E_{min} é o modulo de elasticidade para o material “vazio”, valor utilizado $E_{min} = 10^{-9}$ usado para evitar a singularidade na matriz de rigidez $K(x)$, E_0 é o modulo de elasticidade para o material “sólido”, x_i representa a variável de projeto, neste caso, o elemento do domínio, assumindo valores 0 (zero) ou 1 (unidade) para uma otimização discreta. Portanto, a matriz de rigidez usando (5) pode ser escrita como:

$$K(x) = \sum_{i=1}^n [E_{min} + x_i(E_0 - E_{min})] k_i^0 \quad (6)$$

n representa o número de elementos finitos no domínio do projeto, k_i^0 é o termo da matriz de rigidez do elemento. Derivando a equação de equilíbrio $K(x)u(x) = F$ e fazendo algumas manipulações matemáticas chega-se a:

$$\partial u(x)/\partial x_i = -K^{-1}(x)(\partial K(x)/\partial x_i)u(x) \quad (7)$$

Aplicando a equação (7) na derivada da função objetivo, equação (1), em relação a x_i e usando a expressão $F^T = u^T(x)K(x)$ obtém-se:

$$\partial C(x)/\partial x_i = -u^T(x)(\partial K(x)/\partial x_i)u(x) \quad (8)$$

Substituindo a derivada de (6) em relação a x_i na equação (8), a sensibilidade da função objetivo é reescrita como:

$$\partial C(x)/\partial x_i = -u^T(x)[(E_0 - E_{min})k_i^0]u(x) \quad (9)$$

O algoritmo SESO é baseado no cálculo da função custo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos. Esta sensibilidade é obtida por procedimento de diferenças finitas. Neste artigo, o método SESO e SERA é aplicado em problemas da OT e a compliance é adotada como função objetivo a ser minimizada, sujeita à restrição de volume. Portanto, as expressões de sensibilidade dos métodos mencionados resultam em equações similares com interpretações físicas diferentes pois, o método SERA tem como variável de projeto a densidade do elemento, enquanto o método SESO tem como variável de projeto o elemento.

3 Algoritmos de Otimização

3.1 Método das assíntotas móveis (MMA)

O MMA é um algoritmo de programação matemática adequado para OT, usado para restringir o problema de otimização a muitas restrições a várias variáveis de projeto. Em cada etapa do processo iterativo do algoritmo, um subproblema de aproximação convexa é gerado e resolvido. A geração destes subproblemas é controlada pelas assíntotas móveis, as quais podem ambas estabilizar e acelerar a convergência do processo geral [7]. A solução ótima do subproblema pode ou não ser aceita: se aceita, a iteração se completa; se não, uma nova iteração é realizada, na qual um novo subproblema é gerado.

As iterações são repetidas até que os valores das aproximações da função objetivo e das restrições se tornem maiores ou iguais aos valores da função original, quando avaliada na solução ótima do subproblema, isto é, até que a condição conservadora seja satisfeita para as funções envolvidas. As aproximações que caracterizam o método são funções racionais cujas assíntotas são atualizadas em cada iteração. Destaca-se que o uso de aproximações racionais se justifica em diversos problemas da engenharia em que surgem variáveis recíprocas, ou seja, interação e esforço mútuo. Dada a função objetivo ou uma restrição $C(x)$. As funções de aproximação são dadas por:

$$C(x) \approx C(x^k) + \sum_1^n \left(\frac{r_i}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{s_i}{x_i - L_i^{(k)}} \right) \quad (10)$$

com r_i e s_i são definidos como:

$$Se, \partial C(x)/\partial x_i > 0 \text{ então } r_i = (U_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2, \partial C(x)/\partial x_i \text{ e } s_i = 0 \quad (11)$$

$$Se, \partial C(x)/\partial x_i < 0 \text{ então } s_i = -(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2, \partial C(x)/\partial x_i \text{ e } r_i = 0 \quad (12)$$

Para o problema de otimização em compliance a equação (12) é atendida pois, $\partial C(x)/\partial x_i < 0$. Então o MMA fornece ao projeto atual uma aproximação de um problema de programação linear do tipo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} - \sum_1^n \frac{(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2}{x_i - L_i^{(k)}} \frac{\partial c}{\partial x_i}(\tilde{x}^{(k)}) \\ & \text{sujeito a} \quad \tilde{x}^T \bar{v} - \bar{v} \leq 0 \quad \text{com } x \in \chi^k \end{aligned} \quad (13)$$

onde $\chi^k = \{x \in \chi | 0,9L_i^{(k)} + 0,1x_i^{(k)} \leq x_i \leq 0,9U_i^{(k)} + 0,1x_i^{(k)} \forall i = 1,2, \dots, n$ com $L_i^{(k)}$ e $U_i^{(k)}$ sendo as assíntotas inferiores e superiores, respectivamente, k é a iteração atual, n o número de variáveis de projeto, x^k variável de projeto e \bar{v} o volume prescrito. A seguinte regra heurística é proposta por [7] para atualização das assíntotas, de modo que nas duas primeiras iterações externas, quando $k = 1$ e $k = 2$ adotam-se:

$$\begin{aligned} U_i^{(k)} + L_i^{(k)} &= 2x_i^{(k)} \\ U_i^{(k)} - L_i^{(k)} &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Para $k \geq 3$

$$\begin{aligned} U_i^{(k)} + L_i^{(k)} &= 2x_i^{(k)} \\ U_i^{(k)} - L_i^{(k)} &= \gamma_i^{(k)} \end{aligned}$$

com

$$\gamma_i^{(k)} = \begin{cases} 0,7(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) < 0 \\ 1,2(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) > 0 \\ 1(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Observa-se na equação (15) que o MMA guarda o sinal de três iterações consecutivas. Quando os sinais alternam, detecta-se que os valores das variáveis de projeto oscilam, ou seja, $(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) < 0$, as assíntotas aproximam do ponto de projeto $x_i^{(k)}$. Se os valores das variáveis de projeto não oscilam, então o MMA afasta as assíntotas do ponto de projeto com o objetivo de acelerar a convergência. Existem duas abordagens para resolver os subproblemas no MMA, a dual e a do ponto interior primal-dual. A abordagem dual é baseada na dualidade de relaxamento lagrangiano correspondente ao subproblema, o qual busca a maximização da função objetivo côncava sem outras restrições e da condição de não negatividade nas variáveis. Esse problema dual é resolvido por um método de Newton modificado e, em seguida, a solução ótima dual pode ser traduzida para uma solução ótima correspondente do subproblema primal, e neste artigo, usa-se o método de Newton.

3.2 Critério de otimalidade (OC)

O OC é uma abordagem clássica para problemas de otimização de topológica, descrito em Bendsøe [14], e está associado à obtenção do resultado mediante o atendimento da condição de Karush-Kuhn-Tucker. O lagrangiano para o problema de otimização, equação (1), indicado por Meijboom [15] pode ser escrito como:

$$L = C(x) + \lambda(V(x) - V^*) + \lambda_1^T(Ku - F) + \sum_{i=1}^n \lambda_2^i(x_i^{min} - x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_3^i(x_i - x_i^{max}) \quad (16)$$

λ_j são os multiplicadores lagrangianos. A optimalidade é alcançada quando as derivadas do lagrangiano L em relação às variáveis de projeto (x_i) são iguais a zero, $\partial L / \partial x_i = 0 \forall i = 1,2, \dots, n$, assim:

$$\partial L / \partial x_i = \partial C / \partial x_i + \lambda \partial V / \partial x_i + \lambda_1^T \partial(Ku) / \partial x_i - \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (17)$$

Assumindo que as restrições do limite superior e inferior não estejam ativadas, ($\lambda_2^i = \lambda_3^i = 0$), o carregamento seja independente do projeto ($\partial F / \partial x_i = 0$), a derivada da função objetivo é em relação a variável de projeto, equação (8), que a derivada do volume em relação a variável de projeto é dada por $\partial V / \partial x^e = V_e$ e expandindo a derivada $\partial(Ku) / \partial x_i = 0$, - regra do produto na eq. (17) - e derivando a equação de equilíbrio, chega-se a

$$\partial L / \partial x_i = -u^T (\partial K / \partial x_i) u + \lambda V_e \quad (18)$$

Igualando a equação (18) a zero tem-se:

$$\lambda = \frac{u^T \frac{\partial K}{\partial x^e} u}{V_e} = \frac{-\partial C}{\partial x^e} = B_k^e = 1 \quad (19)$$

Desta forma, as variáveis de projeto agora podem ser atualizadas usando:

$$x_e^{k+1} = B_k^e x_e^k \quad (20)$$

Assim, com o objetivo de impedir que a variável mude muito em uma iteração, um limite móvel, m , é introduzido. O esquema heurístico de atualização do OC pode ser formulado como:

$$x_e^{k+1} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e^k - m) & \text{se } x_e^k (B_k^e)^\eta \leq \max(x_{min}, x_e^k - m) \\ x_e^k (B_k^e)^\eta & \text{se } \max(x_{min}, x_e^k - m) < x_e^k (B_k^e)^\eta < \min(1, x_e^k + m) \\ \min(1, x_e^k + m) & \text{se } x_e^k (B_k^e)^\eta \geq \min(1, x_e^k + m) \end{cases} \quad (21)$$

assumindo $\eta = 0,5$ que é o coeficiente de amortecimento numérico para estabilizar a iteração e $m = 0,2$ é recomendado para problemas da OT em mínimo compliance, [4], de modo que o valor do multiplicador Lagrangiano λ pode ser encontrado por um algoritmo clássico de bissecção. O critério de parada utilizado foi o número máximo de iterações, que é estabelecido a priori e também o valor da diferença numérica entre o resultado obtido para a variável de projeto em uma nova iteração, com o critério definido por ε , que é a tolerância estabelecida parada dado por: $|x_e^{k+1} - x_e^k| \leq \varepsilon$

4 Exemplo numérico -viga em balanço

Analisa-se uma viga engastada com a carga vertical distribuída na ponta de $P = 100N$, com dimensões de $L_x = 120\text{ cm}$, $L_y = 20\text{ cm}$ e $L_z = 20\text{ cm}$, com 48 mil elementos hexaédricos, cuja formulação está em [5], $E = 100MPa$ e $\nu = 0,30$, adotando $\varepsilon = 10^{-2}$ e $R_{min} = 1,2$. Os valores das assíntotas inferior e superior, $L_i^{(k)}$ e $U_i^{(k)}$, são atualizadas usando uma alteração na primeira desigualdade da equação (15) com 0,5 para atenuar a oscilação.

A Figura 2 mostra as configurações ótimas no domínio da solução para o problema de mínimo usando os métodos evolucionários SESO e SERA usando os algoritmos de otimização MMA e OC e resolvido pelo Métodos dos Gradientes Conjugados com o preconditionador Jacobi. A estrutura evolui para tal configuração com um volume final de 20% do volume inicial. Destaca-se que as topologias ótimas usando o MMA são semelhantes, mais esbelta e de mais fácil manufatura que as topologias apresentadas pelo algoritmo OC.

As compliances das soluções do SESO, $C_{MMA} = 2335,27$ e $C_{OC} = 2449,79$ e o custo computacional usando SESO com o algoritmo MMA foi 30% maior que o usando OC. No SERA as compliances são respectivamente, $C_{MMA} = 2333,64$ e $C_{OC} = 2386,92$, e seu custo computacional usando o algoritmo OC foi 13,4% menor que com o uso do MMA. A Figura 3 mostra os históricos de evolução da função objetivo usando os dois métodos evolucionários. A função objetivo para os métodos SESO e SERA aumentam, com um grande salto, devido a uma remoção maior de elementos causado pelo índice de rejeição (RR=0,1) do SESO e um índice de progressão (PR=0,1) do SERA, em seguida ocorre pequenas variações devido à quebra de barras durante o processo iterativo de otimização. Após alcançar o volume prescrito, nas iterações subsequentes, enquanto o volume permanece inalterado, a energia de deformação converge gradualmente para um valor constante.

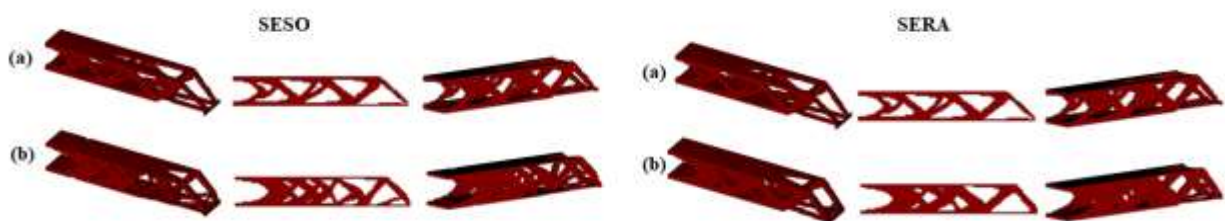


Figura 2. Topologia Ótima – algoritmo empregado a) MMA e b) OC

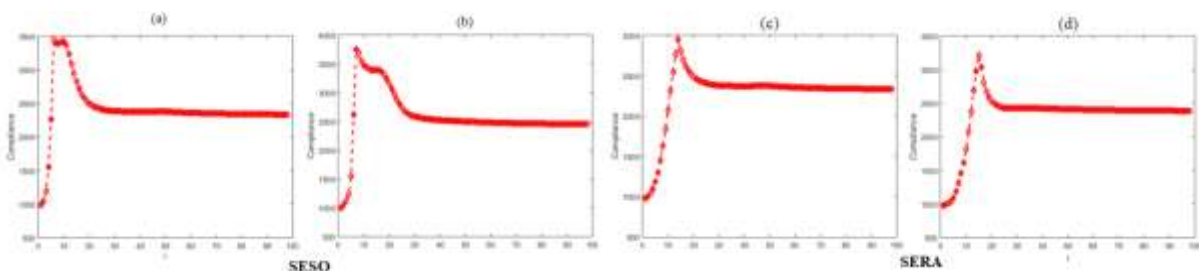


Figura 3. Histórico da evolução (a) SESO+MMA (b) SESO+OC (c) SERA+MMA e (d) SERA+OC

5 Conclusões

Este artigo faz uma abordagem de dois métodos diferentes de otimização topológica baseadas em procedimentos de minimização da compliance aplicados a problemas elástico linear 3D. Os métodos SESO e SERA foram implementados em código Matlab e os resultados obtidos possuem boa acurácia com o apresentado na literatura. O código livre, apresentado em [5], foi usado para introduzir os métodos mencionados acima, usando os algoritmos de otimização MMA e OC, nos quais o elemento finito hexaédrico é usado para discretizar o domínio de projeto e uma análise elastostática é usada para construir a função objetivo. É possível concluir que os modelos implementados podem gerar topologias ótimas que podem suportar as cargas aplicadas sob condições de contorno definidas. Além disso, com os resultados apresentados, fica claro que os métodos SESO e SERA, cujas variáveis de projeto são, respectivamente, os elementos do domínio e a densidade de cada elemento do domínio, possuem configurações ótimas bem próximas e com baixo custo computacional.

Agradecimentos. Os autores agradecem ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), a FAPESP, com o projeto 2016/02327-5, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e CNPq (Conselho Nacional de Ciência Desenvolvimento Tecnológico) no projeto de nr. 305093/2018-5 pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

Declaração de Autoria. Os autores confirmam que são as únicas pessoas responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte deste artigo é de propriedade (e autoria) dos autores ou tem a permissão dos proprietários a serem incluídos aqui.

Referências

- [1] Tovar, A., Patel, N. M., Niebur, G. L., Sen, M., & Renaud, J. E., 2006. Topology optimization using a hybrid cellular automaton method with local control rules. *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 1205-1216.
- [2] Zegard, T. & Paulino, G. H., 2016. Bridging topology optimization and additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 53, pp. 175-192.
- [3] Munk, D. J., Verstraete, D. & Vio, G., A., 2017. Effect of fluid-thermal-structural interactions on the topology optimization of a hypersonic transport aircraft wing. *Journal of Fluids and Structures*. vol. 75, pp. 45-76.
- [4] Sigmund, O., 2001. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, pp. 120-127.
- [5] Liu, T. & Tovar, A., 2014. An efficient 3d topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. vol. 50, pp. 1175-1196.
- [6] Zuo, Z. H., & Xie, Y. M., 2015. A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization. *Advances in Engineering Software*, vol. 85, pp. 1-11.
- [7] Svanberg, K., 1987. The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 24, pp. 359-373.
- [8] Simonetti, H. L., Almeida, V. S & Neto, L. O., 2014. A smooth evolutionary structural optimization procedure applied to plane stress problem. *Eng. Struct.*, vol. 75, pp. 248–258.
- [9] Rozvany, G. I. N. & Querin, O., 2004. Sequential element rejections and admissions (SERA) method: applications to multi-constraint problems. In: *Proceedings of the 10th AIAA. ISSMO Multidisc. Anal. Optim. Conference*, Albany, New York.
- [10] Liang, Q. Q., Xie, Y. M. & Steven, G.P., 2000. Optimal topology design of bracing systems for multistory steel frames. *J. Struct. Eng.*, vol. 126 (7), pp. 823-829.
- [11] Bruns, T. E., & Tortorelli, D. A., 2001. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190 (26-27), pp. 3443-3459.
- [12] Gebremedhen, H. S., Woldemicahe, D. E., & Hashim, F. M., 2019. Three-dimensional stress-based topology optimization using SIMP method. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, vol. 10, A1.
- [13] Ghabraie, K., 2015. The ESO method revisited. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 51(6), pp. 1211-1222.
- [14] Bendsoe, M. P., 1995. Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Berlin: Springer.
- [15] Meijboom, M. J. H., 2003. Topology optimization of dynamic problems. *Report External Traineeship. Reportnr.: DCT*.