

# Uma estratégia para seleção de portfólios baseada em reversão à média com controle de risco

João D. M. Yamim<sup>1</sup>, Igor M. S. Leite<sup>1</sup>, Carlos C. H. Borges<sup>2</sup>, Raul F. Neto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*PGMC, Universidade Federal de Juiz de Fora*

*Via Local, 4646-4740, Minas Gerais, Brasil*

*joao.yamim@engenharia.ufjf.br, igor.leite@ice.ufjf.br*

<sup>2</sup>*Dept. de Ciências da Computação, Universidade Federal de Juiz de Fora*

*Via Local, 4646-4740, Minas Gerais, Brasil*

*cchborges@ice.ufjf.br, raulfonseca.neto@ufjf.edu.br*

**Abstract.** O problema de seleção de portfólio é, sem dúvida, um dos tópicos mais desafiadores da área financeira. Desde a contribuição inicial de Markowitz, várias técnicas e modelos aplicáveis foram propostos. Com o desenvolvimento de métodos de otimização *online*, ou seja, os algoritmos de aprendizado dinâmico, tem se mostrado como uma abordagem eficaz para a criação de portfólios eficientes. Algoritmos amplamente utilizados no contexto da seleção de portfólio *online* concentram-se no uso de informações sobre o retorno dos ativos para tomada de decisão, embora as informações sobre a variância também tenham se mostrado eficientes. Além disso, estudos como Li, Bin, et al [1] mostram que os preços relativos das ações podem seguir a propriedade de reversão à média, que ainda não foi totalmente explorada pelas estratégias atuais. A reversão à média modela a distribuição dos retornos dos ativos como uma distribuição gaussiana, analisando os preços de curto prazo sobre os preços médios de longo prazo, possibilitando decisões de compra e venda com base na avaliação do preço do ativo referente à cotação histórica. Neste trabalho, implementa-se uma variação da estratégia de seleção de portfólio *online* denominada Reversão da Média Ponderada pela Confiança (CWMR - sigla em inglês para *Confidence Weighted Mean Reversion*), para que informações importantes sobre o risco das ações sejam consideradas na etapa de projeção do algoritmo. Para controlar o risco de cada estratégia de investimento, usamos o modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) com Beta variante no tempo. As carteiras construídas foram comparadas com a *Uniform Constant Re-Balanced Portfolio* (UCRP) e o índice BOVESPA. Utilizamos dados da BOVESPA de janeiro de 2000 a dezembro de 2017 com observações diárias.

**Keywords:** Seleção de portfólios, Otimização online, reversão à média, CAPM variante no tempo.

## 1 Introdução

O processo de seleção de portfólios é um problema de decisão no qual o investidor deve alocar uma quantidade de riqueza em um conjunto finito de ativos dentro de um horizonte de tempo. A modelagem do problema deve definir a decisão do investidor, ou seja, o investidor decide quanto de sua riqueza irá destinar para cada um dos ativos disponíveis no mercado. Cada ativo representa uma oportunidade de investimento distinta e a decisão realizada para uma alocação é um portfólio. Neste problema, o investidor busca alocar seu dinheiro em um mercado de ações de maneira a obter uma boa relação entre o retorno esperado e o risco.

A escolha do portfólio ótimo é um problema tão antigo quanto o próprio mercado de ações. Entretanto, foi a partir do trabalho de Markowitz [2] que o problema foi tratado através de uma formulação matemática. A moderna Teoria de Carteiras, introduzida por Markowitz, apresentou o risco e a diversificação do portfólio como fatores inerentes às decisões de investimento, em oposição ao senso comum da época, que era a concentração dos recursos no ativo de maior retorno esperado.

Nas últimas décadas, abordagens baseadas em técnicas de aprendizado de máquina têm sido intensamente aplicadas, tornando-se uma área de pesquisa importante e ativa, por oferecer a possibilidade de definir estratégias *online*<sup>1</sup> de investimento que permitem maximizar a riqueza sem a utilização de pressupostos estatísticos sobre o preço dos ativos.

<sup>1</sup>Classificamos como otimização *online* procedimentos em que as entradas chegam uma a uma e a cada nova entrada o algoritmo deve tomar

O uso de aprendizado de máquina em problemas de seleção de portfólios se fundamenta em trabalhos como [3–6], estes mostraram que um portfólio constante reequilibrado para um alocação específica, *Constant Rebalancing Portfolio* (CRP), pode ser mais vantajoso do que selecionar uma carteira baseada em uma medida de desempenho e mantê-la durante todo período. O CRP é uma estratégia clássica que explora, de modo indireto, a ideia de negociação baseada em reversão à média. Embora bem fundamentado, em termos teóricos, segundo [7], o esquema passivo do CRP apresenta limitações para alcançar um bom desempenho na prática. Borodin et al [8] mostraram que redistribuir a riqueza explorando heurísticamente a reversão à média, via correlações estatísticas, pode ser significativamente superior quando comparada com o melhor CRP em retrospectiva.

Os algoritmos de otimização *online* derivaram dos trabalhos de [9] que exploram somente informações sobre o retorno das ações em um portfólio. Estratégias que se baseiam não somente no retorno dos ativos [10, 11], inspiradas no algoritmo CWMR [7] (*Confidence Weighted Mean Reversion*) tem se mostrado efetivas. O algoritmo CWMR modela o vetor de portfólio como uma distribuição gaussiana e atualiza sequencialmente a distribuição dos retornos, aplicando técnicas de aprendizado *online* para explorar o princípio da negociação de reversão à média, usando o algoritmo de aprendizado *online Confidence Weighted* (CW) [12, 13].

Avaliando empiricamente o desempenho de estratégias baseadas em reversão à média no mercado Brasileiro, constata-se que embora apresentem desempenho superior as estratégias de referência, basear-se no procedimento de venda de ativos com retorno superior a média e comprar ativos em desvalorização pode construir portfólios com risco elevado. Naturalmente, a decisão de investimento em um ativo não está relacionada somente ao retorno total obtido, há de se avaliar o risco a ele relacionado, uma vez que, é a combinação desses dois fatores que exerce efeito sobre o valor do ativo.

Neste trabalho, explora-se características específicas possibilitadas pelo algoritmo CWMR, mas modificamos a etapa de projeção para que sejam considerados fatores de risco importantes na composição do portfólio. Para controle da composição de risco dos portfólios construídos, utiliza-se o modelo *Capital Asset Price Model* (CAPM) com  $\beta$  variante no tempo.

Neste sentido, este trabalho combina características do método de seleção de carteiras *online*, que possuem alto poder de adaptação e são eficientes computacionalmente, com técnicas de aprendizado dinâmico aplicadas a uma estratégia intuitiva de vender ativos com excesso de retorno e comprar ativos desvalorizados. Além disso, a cada iteração, calcula-se o risco atual e é realizada uma previsão *online* de qual será o risco na etapa posterior, levando em conta essa nova informação na decisão de alocação da riqueza.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2 apresenta-se a configuração básica do problema de seleção de portfólios. Em seguida, na seção 3, faz-se uma breve revisão de trabalhos relacionados ao tema exposto que motivaram a técnica proposta. Na seção 4 apresenta-se a modelagem matemática da estratégia utilizada e as técnicas utilizadas para calcular o risco dos portfólios. Na seção 5 mostra-se os detalhes de implementação dos algoritmos. Na seção 6, realiza-se os experimentos e discute-se os resultados obtidos, comparando o desempenho dos diferentes portfólios construídos com *benchmarks* do mercado, avaliando o retorno final e a estrutura de risco. Por fim, na seção 7 exibem-se as conclusões do estudo e aponta-se algumas diretrizes para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

## 2 Seleção de portfólios *online*

Um problema de seleção de portfólios *online* pode ser escrito como uma sequência infinita de funções de custo convexas  $\{c_1, c_2, \dots\}$  e um conjunto de soluções viáveis  $S_n \subseteq R^n$ . A cada etapa  $t$ , o algoritmo utiliza uma estratégia  $s_t \in S_n$  e após escolher essa estratégia avalia o custo em  $c_t$ . Uma vez que nem toda informação está disponível, o algoritmo usa o desempenho  $t = 1, \dots, t - 1$  para definir a posição futura. Os algoritmos de otimização de portfólios *online* se baseiam no preço atual dos ativos para selecionar a alocação futura do portfólio, o que significa que as informações sobre o preço dos ativos chegam sequencialmente e a decisão de alocação é realizada de imediato.

Em cada período de negociação  $t$ , para  $t = 1, \dots, T$ , um investidor observa um vetor de retornos  $\mathbf{x}_t$ , onde cada componente  $x_{it}$  é o retorno da ação  $i$  no tempo  $t$  com preço de fechamento até  $t - 1$ . O vetor  $\mathbf{b}_t$  contém a proporção aplicada em cada um dos  $n$  ativos. A riqueza de um portfólio aplicado em  $\mathbf{b}_t$ , considerando somente um período, pode ser calculada pelo produto interno  $\mathbf{b}_t^\top \mathbf{x}_t$ .

Uma vez que considera-se para fins de análise que todo valor é reinvestido e adota-se o preço relativo, a riqueza do portfólio aumentaria multiplicativamente. Assim, após  $T$  períodos de negociação, o investimento de acordo com uma estratégia de portfólio  $\mathbf{b}^n$  produz uma riqueza cumulativa  $\mathbf{S}_n$ , que aumenta a riqueza inicial em um fator de  $\prod_{t=1}^n \mathbf{b}_t^\top \mathbf{x}_t$ , isto é,

---

uma decisão sem saber quais serão as próximas, isto é, operam sobre um conjunto de entradas que não é previamente conhecido. Tratamos essa questão na Seção 2

$$S_n(\mathbf{b}^n, \mathbf{x}^n) = S_0 \prod_{t=1}^n \mathbf{b}_t^\top \mathbf{x}_t \quad (1)$$

onde  $S_0$  denota a riqueza inicial.

### 3 Trabalhos relacionados e motivação

#### 3.1 Trabalhos relacionados

O uso de aprendizado de máquina em problemas de seleção de portfólio é baseado em trabalhos como [3–6], que mostraram que um portfólio com reequilíbrio constante pode ser mais vantajoso. do que selecionar um portfólio com base em uma medida de desempenho e mantê-lo ao longo do período. Além disso, Cover [9] demonstrou que existe uma estratégia de alocação constante que proporciona o melhor crescimento de riqueza de longo prazo (*Best Constant Rebalancing Portfolio* - BCRP). Portanto, os métodos de aprendizado de máquina geralmente utilizam o BCRP como estratégia de referência.

Cover e Ordentlich [14] propuseram o algoritmo *Weighted Universal Portfolio* que tem *Regret*  $O(n \log T)$  e complexidade de tempo  $O(T^n)$ , onde  $n$  é a quantidade de ações e  $T$  o número de períodos analisados. Uma vez que a complexidade cresce exponencialmente com o número de ações, esse algoritmo é geralmente inviável na prática.

Helmbold et al. [15] introduziu o *Exponential Gradient Algorithm*, uma variação do método de otimização gradiente descendente.

Com uma estratégia semelhante à usada em [9], o algoritmo *Successive Constant Rebalanced Algorithm* proposto por Gaivoronski e Stella [16] discretiza o conjunto de soluções viáveis em um *simplex* selecionando iterativamente os melhores portfólios em cada período. negociação.

Zinkevich [17] propôs o algoritmo *Online Gradient Descent* que usa informação de primeira ordem, ou seja, primeiras derivadas, e portanto tenta aproximar funções por funções lineares. Os estudos [18–20] usam informações de segunda ordem sobre o retorno atual de cada ativo, explorando assim a curvatura das funções de recompensa.

Embora estratégias do tipo *Follow-the-Winner* tenham se mostrado convenientes dentro do contexto de seleção de portfólio *online*, onde evidências empíricas demonstradas em [21–23] indicam que, muitas vezes, apostar na estratégia oposta pode trazer ganhos, ou seja, um princípio comum e famoso em finanças, a saber, reversão à média.

O algoritmo *Anticor*, proposto por Borodin et al. [8] utiliza informações estatísticas históricas para reequilibrar o portfólio de acordo com a ideia de negociação de reversão à média. Desde então, diversas estratégias de alocação *online* foram propostas, com destaque para as apresentadas nos trabalhos [11, 12, 24–27], todas elas se baseando no simples princípio de comprar títulos com baixo desempenho e vender títulos com bom desempenho, referenciando-se por métodos *online*. A reversão à média têm se mostrado crucial para construir estratégias eficientes de seleção de portfólio online.

#### 3.2 Motivação

Em geral, algoritmos amplamente utilizados no contexto de seleção de portfólios *online*, como por exemplo *Exponential Gradient* (EG) e *Online Gradient Descent* (OGD), adotam a ideia de uma negociação baseada no seguimento de tendência, ou seja, assume que o preço seguirá a mesma tendência que o último preço relativo, assim, ações que obtiveram um bom desempenho na negociação passada tendem a permanecer desta forma nas negociações que se seguirem. Embora bastante intuitivo, em muitas situações de negociação de curto prazo, os preços das ações podem não seguir tendências anteriores, como empiricamente evidenciado em trabalhos como [28, 29]. Neste trabalho, seguimos uma premissa oposta, onde, empiricamente, assume-se que uma ação não terá crescimento constante em todas as negociações. Por outro lado, uma ação em queda, em média, não irá permanecer tendo este comportamento repetidamente, caso contrário, não será mais negociada. O método utilizado baseia-se na ideia de negociação de reversão à média, que no contexto de seleção de carteiras implica que as ações com bom desempenho tendem a apresentar desempenho pior do que outras nos períodos de negociação subsequentes, e as ações com baixo desempenho tendem a desempenhar melhor. Portanto, se quisermos maximizar o próximo retorno do portfólio, busca-se minimizar o retorno esperado em relação ao preço relativo de hoje, já que o próximo preço relativo tende a reverter. Segundo Lo e MacKinlay [28], a efetividade da reversão à média se deve às autocovariâncias cruzadas positivas entre os ativos. Utilizando dados do mercado de ações americano, Li et al. [7]

mostraram que a reversão à média é de fato verificada na prática.

Além disso, grande parte das abordagens de seleção *online* exploram apenas informações sobre o retorno das ações, enquanto, segundo Li et al. [7], informações sobre a volatilidade também podem ser levadas em consideração. Este estudo nos baseia-se tanto em informações sobre o retorno quanto de sua variância.

Além disto, o trabalho utilizou a implementação do algoritmo CWMR, proposto por Li et al. [7], que combina características importantes do aprendizado Ponderado pela Confiança (CW) [13, 30], com princípios empíricos da reversão à média. Para explorar as informações tanto dos retornos quanto da variância, o vetor de portfólio é modelado como uma distribuição gaussiana, em seguida, é atualizado sequencialmente de acordo com a ideia de reversão à média. Diferentemente da estratégia *Constant Rebalanced Portfolio*, apresentada na seção 6.1 e amplamente utilizada como referência em seleção de portfólios *online*, o CWMR explora ativamente a propriedade de reversão à média dos mercados financeiros suportado por um método de aprendizado poderoso.

## 4 Formulação do Problema

O vetor de portfólio é modelado para o  $i$  –ésimo dia de negociação como uma distribuição Gaussiana com média  $\mu \in \mathbb{R}^m$  e a matriz de covariância diagonal  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  de variáveis não correlacionadas. O valor  $\mu_j$  representa o conhecimento do ativo  $j$  no portfólio. O termo da matriz de covariância diagonal  $\Sigma_{jj}$  ou  $\sigma_j^2$  representa a confiança que temos no valor médio do portfólio  $\mu_j$ .

No início do dia de negociação  $i$ , o portfólio  $\mathbf{b}_i$  é construído com base na distribuição  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ ,  $\mathbf{b}_i \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ . Então, depois que o preço relativo  $\mathbf{x}_i$  é revelado, o portfólio aumenta sua riqueza por um fator de  $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i$ . O retorno diário do portfólio pode ser visto como uma variável aleatória de uma distribuição gaussiana univariada,  $D \sim \mathcal{N}(\mu \cdot \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^\top \Sigma \mathbf{x}_i)$ . A média do retorno diário do portfólio é o retorno do vetor médio do portfólio e a variância é proporcional ao comprimento da projeção de  $\mathbf{x}_i$  em  $\Sigma$ . De acordo com a ideia de negociação de reversão à média, a probabilidade de uma carteira lucrativa para o próximo dia de negociação  $b$  em relação a um limite de reversão à média  $\epsilon$  é definida como,

$$\Pr_{\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)}[\mathbf{D} \leq \epsilon] = \Pr_{\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)}[\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i \leq \epsilon] \quad (2)$$

Para fins de simplificação, podemos escrever  $\Pr[\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i \leq \epsilon]$ . A distribuição é atualizada para garantir que a probabilidade de uma carteira lucrativa seja maior do que um nível de confiança  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\Pr[\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i \leq \epsilon] \geq \theta \quad (3)$$

Se o retorno esperado do preço  $x_i$  for menor que um limite com alta probabilidade, o retorno real para o dia de negociação  $i + 1$  tende a ser alto com uma probabilidade correspondentemente alta, uma vez que o preço tende a se inverter. Então, o CWMR escolhe a distribuição mais próxima da distribuição atual  $\mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_i)$ . Como resultado, no dia de negociação  $i + 1$ , o algoritmo define os parâmetros da distribuição resolvendo o problema conhecido como otimização bruta CWMR, a saber:

$$\begin{aligned} (\mu_{t+1}, \Sigma_{t+1}) &= \arg \min D_{\text{KL}}(\mathcal{N}(\mu, \Sigma) \parallel \mathcal{N}(\mu_t, \Sigma_t)) \\ \text{s. a. } &\Pr[\mathbf{b}^\top \mathbf{x}_t \leq \epsilon] \geq \theta \\ &\mu \in \Delta_m(4) \end{aligned}$$

O problema de otimização acima reflete a motivação da estratégia. Por um lado,  $\mu_t$  atual é a reversão à média lucrativa, ou seja, a primeira restrição é satisfeita, o CWMR escolhe a mesma distribuição, resultando em uma estratégia de CRP passiva. Por outro lado, se  $\mu_t$  não satisfaz a restrição, então o CWMR busca uma nova distribuição que seja lucrativa e próxima da distribuição atual.

### 4.1 CAPM variante no tempo

Com base no modelo clássico proposto por Markowitz em [2], os trabalhos [31, 32] iniciaram um modelo de precificação de ativos de capital classicamente denominado CAPM (*Capital Asset Price Model*). Até meados da

década de 1950, o consenso era que o desempenho deveria ser medido pelo retorno ao longo de um período sem ajuste de risco. Estudos sobre a relação risco-retorno na década de 1960 contribuíram para o desenvolvimento do modelo [32–34]. O CAPM introduziu duas novas premissas no modelo clássico de Markowitz: o de expectativas homogêneas e taxa livre de risco. A suposição de expectativas homogêneas afirma que os investidores têm as mesmas perspectivas sobre retornos esperados, desvio padrão e covariância de ativos (suposição de mercado eficiente). O pressuposto da taxa livre é que exista um investimento no mercado em que sua remuneração seja assegurada exatamente conforme o esperado, fatores econômicos e cíclicos não têm a capacidade de afetar a liquidez de tal investimento.

Analiticamente, dado um portfólio  $c$  e assumindo um portfólio  $p$  com  $w_f$  aplicado à taxa livre de risco e  $w_c = 1 - w_f$  aplicado ao portfólio  $c$ , teremos:

$$E[R_p] = w_f R_f + (1 - w_f)E(R_c) \quad (5)$$

$$\sigma_p = (1 - w_f)\sigma_c \quad (6)$$

Onde  $E[R_p]$  e  $\sigma_p$  representam o retorno esperado e o desvio padrão da carteira, respectivamente. Usando as equações 5 e 6, podemos escrever a relação linear entre o retorno esperado da carteira e o risco associado como:

$$E[R_p] = R_f + \left( \frac{E(R_c) - R_f}{\sigma_c} \right) \sigma_p \quad (7)$$

$$E[R_i] - R_f = \beta_i (E(R_m) - R_f) \quad (8)$$

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} \quad (9)$$

Onde  $E(R_m)$  é o retorno esperado da carteira de mercado e  $R_f$  é a taxa de retorno do ativo livre de risco.

A relação entre retorno e risco no CAPM, que existe na relação entre o retorno do mercado e o do ativo subjacente no cálculo do  $\beta$ , construiu o alicerce que estruturou a teoria de análise de investimentos e, mais especificamente, avaliação de desempenho métodos.

Esta relação entre o retorno alcançado versus o risco incorrido pode ser estendida para avaliar o desempenho da carteira. Para analisar seu desempenho, é necessário comparar a carteira em questão com outras alternativas disponíveis no mercado.

Claro que existem críticas ao modelo, sendo a mais notável a sensibilidade de  $\beta$  em relação ao período de estimação. É razoável supor que o risco de uma determinada empresa muda com o tempo e que essa percepção do investidor é muito difícil de prever.

Para incorporar esse aspecto, alguns autores propõem o uso de modelos estruturais sendo  $\beta$  uma variável latente no tempo. Ou seja, seu valor não é observado diretamente sendo necessário estimá-lo. Para estimar tais modelos estruturais, uma ferramenta amplamente utilizada são os filtros de Kalman, onde, sob certas hipóteses de normalidade das observações é possível propor uma estrutura para a dinâmica de  $\beta$  dos ativos e extraí-la com algoritmos de otimização [35].

Para estimar o  $\beta$  de cada ativo, usamos um modelo de espaço de estado onde  $\beta$  é uma variável latente. Assumimos que o  $\beta$  em cada momento é um passeio aleatório com choques gaussianos, gerando um modelo de nível estocástico.

O problema é formulado da seguinte forma. O retorno de um ativo específico  $i$  no período  $t$  é dado por

$$\mathbf{r}_t^i = \beta_t^i r_t^m + r_t^{lr} + \varepsilon_t^i, \quad (10)$$

onde  $r_t^m$  é o retorno do mercado no período  $t$  e  $r_t^{lr}$  é a taxa livre de risco no período  $t$  e  $\varepsilon_t^i$  é um idiossincrático choque no período  $t$  no ativo  $i$  com média zero e variância  $\sigma_i^2$ . Além disso,  $\beta_t^i$  segue um processo de passeio aleatório, ou seja,

$$\beta_{t+1}^i = \beta_t^i + \nu_t^i, \quad (11)$$

onde  $\nu_i$  é uma variável aleatória gaussiana com média e variância zero  $\sigma_{\beta_i}^2$ .

Os parâmetros do modelo  $\sigma_i^2$ ,  $\sigma_{\beta_i}^2$  e a condição inicial  $\beta_0^i$  podem ser estimados pela máxima verossimilhança e pelo vetor de estado  $\beta_t^i$  de cada ativo  $i$  pode ser estimado usando as equações recursivas do filtro de Kalman.

Para o modelo proposto, as equações de atualização do filtro de Kalman são dadas por

$$\epsilon_t^i = r_t^i - \hat{r}_t^i, \quad (12)$$

$$F_t = P_t + \sigma_i^2, \quad (13)$$

$$\beta_{t|t}^i = \beta_t^i + P_t r_t^m F_t^{-1} \epsilon_t^i, \quad (14)$$

$$P_{t|t} = P_t - P_t F_t^{-1} P_t, \quad (15)$$

onde  $K_t = P_t F_t^{-1}$  é o ganho de Kalman. As equações de previsão são

$$\beta_{t+1}^i = \beta_{t|t}^i, \quad (16)$$

$$P_{t+1} = P_{t|t} + \sigma_{\beta_i}^2, \quad (17)$$

$$\hat{r}_{t+1}^i = \beta_{t+1}^i + r_t^{lr}. \quad (18)$$

e  $P_t, P_{t|t}$  são a covariância prevista e atualizada do estado  $\beta_t$ .

## 4.2 Métricas de avaliação de risco

A fim de comparar o desempenho do risco entre diferentes estratégias, faremos uso de duas medidas amplamente adotadas, o *Value at Risk* (VaR) e o *Conditional Value at Risk* (CVaR). O VaR é a avaliação da perda potencial máxima a que um investidor estaria exposto ao longo de um determinado horizonte de tempo, para um intervalo de confiança especificado ( $\alpha$  nível de confiança), ou seja, tenta resumir a perda máxima esperada em apenas um número dentro de um horizonte de tempo, com um certo grau de confiança estatística. O VaR pode ser interpretado como o valor pelo qual as perdas não excederão  $(1 - \alpha)\%$  dos cenários. De modo geral, o VaR de uma carteira representa um quantil maior da perda estimada da carteira (ou um quantil de retorno menor). Artzner et al. [36] definem o valor de VaR determinado nível de confiança na forma:

$$VaR = -\inf\{r | P(R \leq r) > \alpha\}$$

onde,  $r$  é o retorno pertencente à distribuição do portfólio,  $\inf\{r | A\}$  é o limite inferior de  $r$  dado um evento  $A$ , e  $\inf\{r | P(R \leq r) > \alpha\}$  indica o menor percentil da distribuição de retorno.

O CVaR é uma medida que indica a perda média que ultrapassa o VaR, ou seja, dada uma probabilidade  $\alpha$ , o CVaR é definido como a média dos retornos menor que o quantil  $(1 - \alpha)$  da distribuição dos retornos.

Se todos os cenários tiverem a mesma probabilidade de ocorrência, o CVaR é calculado como o retorno esperado do cenário de pior caso  $(1 - \alpha)\%$ . O CVaR de nível  $\alpha$  pode ser formalizado como [37]:

$$CVaR_\alpha = E[r | r \geq VaR_\alpha(r)]$$

Onde  $r$  representa o conjunto de retorno do portfólio, e  $VaR_\alpha(r)$  é VaR com nível de confiança de  $100 * (1 - \alpha)\%$ .

## 5 Detalhes da implementação

### 5.1 Algoritmo CWMR $\beta$

O algoritmo proposto procede a busca pela solução baseando-se em técnicas típicas de otimização convexa assim como proposto por [7]. As soluções para as otimizações são mostradas nas Etapas 1 & 2, a serem descritas. Um maior detalhamento do desenvolvimento é descrito em [7]

**Etapa 1.**

1. A solução para o problema de otimização final da variância é expressa como:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - \lambda_{i+1} \Sigma_i \left( \frac{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i \mathbf{1}}{\mu_i \cdot \mathbf{x}_i} \right),$$

$$\Sigma_{i+1}^{-1} = \Sigma_i^{-1} + 2\lambda_{i+1} \phi \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$$

onde  $\lambda_{i+1}$  corresponde ao multiplicador Lagrangeano .

**Etapa 2.**

2. A solução para o problema de otimização final do desvio padrão é expresso como:

$$\mu_{i+1} = \mu_i - \lambda_{i+1} \Sigma_i \frac{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i \mathbf{1}}{\mu_i \cdot \mathbf{x}_i},$$

$$\Sigma_{i+1}^{-1} = \Sigma_i^{-1} + \lambda_{i+1} \phi \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top}{\sqrt{U_i}}$$

onde  $V_i = \mathbf{x}_i^\top \Sigma_i \mathbf{x}_i$  e  $\sqrt{U_i} = \frac{-\lambda_{i+1} V_i \phi + \sqrt{\lambda_{i+1}^2 V_i^2 \phi^2 + 4V_i}}{2}$  denotam a variação do retorno do portfólio para o  $i$ -ésimo e  $\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{1^\top \Sigma_i \mathbf{x}_i}{1^\top \Sigma_i \mathbf{1}}$  representa a média ponderada de confiança do preço relativo  $i$ . Inicialmente, sem nenhuma informação disponível para a tarefa de seleção *online*, simplesmente inicializamos a média do portfólio  $\mu_1$  para o portfólio uniforme e a matriz de covariância do portfólio  $\Sigma_1$  para o desvio padrão igualmente  $\frac{1}{m}$ , ou variância equivalente  $\frac{1}{m^2}$ .

Na configuração padrão do algoritmo CWMR, um problema remanescente é que o  $b_n$  resultante poderia ser negativo, uma vez que a forma padrão não considera a restrição de não negatividade na solução. Uma solução possível para este problema seria simplesmente projetar o  $\mu$  resultante em um domínio *simplex* para garantir factibilidade da restrição na qual o somatório de  $b_1, b_2, \dots, b_n = 1$ . Alternativamente, para solucionar este problema, definimos o conjunto de alocações possíveis  $\mathcal{B}$  como

$$\mathcal{B} = \left\{ b \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n b_i = 1, \quad b \geq 0 \right\} \tag{19}$$

Desta forma, não é permitido que o algoritmo assuma posições vendidas ou alavancagem e toda riqueza deverá ser alocada em cada período. Neste ponto, destacamos que o algoritmo sempre tem a opção de alocar riqueza nos títulos livres de risco, o que implica que a alocação de toda a riqueza em todos os períodos não é restritiva como parece à primeira vista. O algoritmo funciona então da seguinte maneira; a cada passo atualizamos a distribuição do portfólio da mesma forma que o algoritmo tradicional, na forma descrita na etapa 5 do Algoritmo 1; atualizamos então o vetor de alocação e projetamos no conjunto viável usando uma métrica apropriada, neste caso, a norma euclidiana.

Para controlar o risco usando  $\beta$  do portfólio, assumimos intervalos  $[\beta_{min}, \beta_{max}]$  que o portfólio deve obedecer. Como o índice  $\beta$  é linear em relação ao retorno de cada ativo, o  $\beta$  de todo o portfólio é uma combinação linear do  $\beta$  de cada ativo, ponderado pelo respectivo valor destinado ao ativo. Portanto,

$$\mathcal{B}_\beta = \left\{ b \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n b_i \beta_t^i \in [\beta_{min}, \beta_{max}], \quad \sum_{i=1}^n b_i = 1, \quad b \geq 0 \right\}, \tag{20}$$

onde  $\beta_t^i$  é o  $\beta$ , variável no tempo, do  $i$ -ésimo ativo no tempo  $t$ . É importante notar que não está claro se  $\mathcal{B}_\beta$  não está vazio. Por exemplo, a interseção de  $\sum b_i \beta_t^i \leq \beta_{max}$  e  $\sum b_i \eta_t^i \geq \beta_{min}$  está vazia se não houver nenhum ativo  $i$  no período  $t$  tal que  $\beta_t^i \geq \beta_{min}$  ou não há nenhum ativo  $i$  no período  $t$  tal que  $\beta_t^i \leq \beta_{max}$ .

Para remover qualquer tipo de viés de antecipação, a estimativa de  $\beta_t^i$  para o investimento em  $t + 1$  pode usar apenas a informação disponível de  $t = 1, \dots, t$ . Portanto, não apenas o algoritmo em si, mas também a estimativa

do espaço de estados deve ser adaptada à filtragem  $F_t$  gerada por  $\{r_i\}_{i=1}^t$ . O pseudo-código é apresentado em (1)

---

**Algorithm 1:** CWMR  $\beta$

---

**input** :  $x$  = retorno ativos,  $b_0$  = alocação inicial

**for**  $t = 1, \dots, T$  **do**

- 1: Gere o portfólio  $\mathbf{b}_t$  a partir de  $\mathcal{N}(\mu_t, \Sigma_t)$ ;
- 2: Receba o preço relativo das ações  $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tm})$ ;
- 3: Calcule o retorno diário e o retorno cumulativo:  $\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_{t-1} \times (\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t)$ ;
- 4: Calcule as seguintes variáveis:

$$M_t = \mu_t \cdot \mathbf{x}_t, \quad V_t = \mathbf{x}_t^\top \Sigma_t \mathbf{x}_t, \quad \bar{\mathbf{x}}_t = \frac{\mathbf{1}^\top \Sigma_t \mathbf{x}_t}{\mathbf{1}^\top \Sigma_t}$$

- 5: Atualize a distribuição do portfólio:

$$\text{Variância} \begin{cases} \lambda_{t+1} \\ \mu_{t+1} = \mu_t - \lambda_{t+1} \Sigma_t \frac{\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}_t \mathbf{1}}{M_t} \\ \Sigma_{t+1} = (\Sigma_t^{-1} + 2\lambda_{t+1} \phi \text{diag}^2(\mathbf{x}_t))^{-1} \end{cases}$$

$$\text{Desvio padrão} \begin{cases} \lambda_{t+1} \\ \sqrt{U}_t = \frac{-\lambda_{t+1} \phi V_t + \sqrt{\lambda_{t+1}^2 \phi^2 V_t^2 + 4V_t}}{2} \\ \mu_{t+1} = \mu_t - \lambda_{t+1} \Sigma_t \frac{\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}_t \mathbf{1}}{M_t} \\ \Sigma_{t+1} = \left( \Sigma_t^{-1} + \phi \frac{\lambda_{t+1}}{\sqrt{v_r}} \text{diag}^2(\mathbf{x}_t) \right)^{-1} \end{cases}$$

- 6: Projete o conjunto viável tal como

$$\mathbf{b}_{i(t+1)} = \arg \min_{b \in \mathcal{B}_\beta} \|b - x_t\|;$$

**end**

---

## 6 Experimentos

### 6.1 Conjunto de dados e estratégias de comparação

Em geral, para testar a reversão à média, a frequência real de negociação é um parâmetro-chave. Embora os pesquisadores em finanças frequentemente testem dados semanais, optamos por desconsiderar custos de transação e realizamos os testes com dados em frequência diária.

Para avaliar o desempenho do algoritmo proposto, foram utilizados dados do mercado acionário brasileiro, de empresas que fazem parte da carteira teórica da Bovespa (IBOVESPA), coletados por meio do banco de dados do software Economática. A base de dados do IBOVESPA contém observações dos retornos das ações de 59 empresas, esse número inclui as empresas que deixaram de fazer parte do índice, bem como as empresas que integraram o índice de 1º de janeiro de 1998 a 28 de dezembro de 2017.

O IBOVESPA é o mais tradicional índice brasileiro, tendo em sua carteira teórica ações de empresas com alto volume de negociação.

Para estimar o modelo CAPM para o IBOVESPA, considerou-se como ativo livre de risco a média aritmética ponderada da rentabilidade intrínseca dos títulos da Dívida do Tesouro Nacional de emissão do Tesouro Nacional em poder do Tesouro Nacional do Banco Central do Brasil. Como retorno de mercado utilizamos o IBRX-100. Todos os resultados foram comparados com o Índice de referência do mercado e com a carteira seguindo a estratégia UCRP - *Uniform Constant Re-Balanced Portfolio* [38].

### 6.2 Resultados

Inicialmente, analisamos o comportamento do algoritmo CWMR sem qualquer alteração em sua etapa de projeção originalmente proposta. Em relação às configurações de parâmetros do CWMR, existem dois principais, a saber,  $\phi$  e  $\epsilon$ . O parâmetro  $\phi$  se refere a confiança e  $\epsilon$  é o parâmetro de sensibilidade. Em geral, os melhores parâmetros dependem do conjunto de dados analisados. No experimento, sensibilizamos os parâmetros, variando dentro do intervalo  $[0, 10]$ , assim como no trabalho [7]. Como resultado, para o mercado brasileiro, observamos que o parâmetro  $\phi$  de confiança tem resultado quase nulo no desempenho do algoritmo, optamos portanto, em



mantê-lo no mesmo valor proposto em [7], 0.5. Com relação ao parâmetro  $\epsilon$ , após a sensibilização, foi possível concluir que valores inferiores a 0.953 levaram o algoritmo a construir carteiras que investem parte significativa do portfólio em ativos com abrupta desvalorização, levando a uma perda tão rápida de capital que levam o portfólio a valores próximos de zero, não sendo possível recuperar as perdas. Por outro lado, valores superiores a 1.589 são capazes de construir portfólios capazes de superar as estratégias de comparação UCRP e índice BOVESPA. Em particular, ajustamos o parâmetro de confiança  $\phi$  para 2,394, ou o nível de confiança equivalente a 956, pois após este valor não são mais percebidos aumento no retorno dos portfólios. Na Figura 1 apresentamos a evolução do crescimento da riqueza para os parâmetros  $\epsilon$  variando de 0.953 a 2,394.

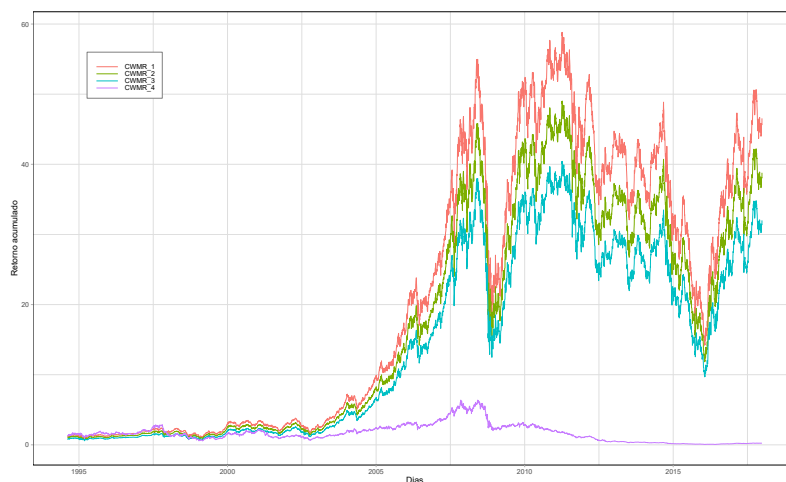


Figure 1. Comparação entre os portfólios construídos pelo algoritmo CWMR com parâmetros variando entre 0.953 e 2.39.

Analisando o perfil de risco VaR e CVaR dos portfólios construídos com cada um dos parâmetros  $\epsilon$  sensibilizados. É possível perceber que a medida que aumentamos o valor de  $\epsilon$  em um patamar superior a 1.589, temos retornos cada vez maiores, porém associamos a um grau de risco cada vez maior.

Afim de comparar o resultado obtido pelo CWMR com estratégias adotadas pelo mercado, implementamos o algoritmo UCRP. Na Figura 2, plotamos o portfólio construído pelo algoritmo CWMR utilizando parâmetro  $\epsilon$  que obteve o maior retorno acumulado, o Índice BOVESPA e a estratégia de investimento UCRP. Em termos de retorno acumulado podemos aferir que o desempenho do algoritmo CWMR é consideravelmente superior ao *benchmark* utilizado, entretanto, como podemos verificar na Tabela 1, o risco associado ao portfólio construído pelo CWMR é da mesma forma mais elevado. De fato, avaliando graficamente, é fácil deduzir que a estratégia possibilitou dois momentos de queda demasiadamente abrupta. Isso ocorre pois o algoritmo persiste na compra de ativos que estão se desvalorizando no momento da queda, comprando ações de companhias que apresentem um desempenho ainda pior do que o mercado, acentuando as perdas da carteira.

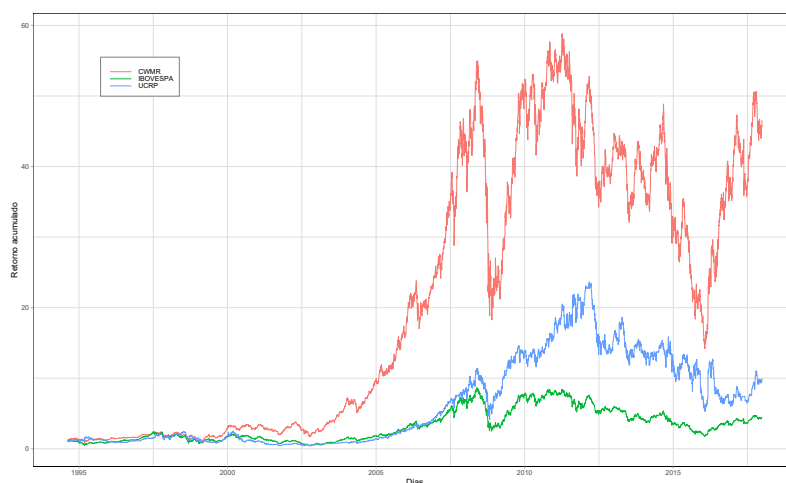


Figure 2. Comparação entre o portfólio construído pelo algoritmo CWMR, UCRP e o IBOVEPA

Table 1. Risco portfólios CWMR, UCRP e o IBOVEPA

	CWMR		I_Bovespa		UCRP	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.0686739	-0.0434964	-0.0389916	-0.0397507	-0.0486473	-0.0325524
CVaR	-0.0938140	-0.0511346	-0.0691797	-0.0494233	-0.0847651	-0.0474781

Para validar a hipótese de que é possível controlar a qualidade do portfólio utilizando as premissas do modelo CAPM através da restrição imposta na etapa de projeção do algoritmo, realizamos inicialmente testes impondo como restrição que o  $\beta$  da carteira esteja dentro do intervalo variando entre  $0.25 \leq \beta \leq 0.5$ . Desta forma, esperamos a construção de um portfólio menos arriscado do que a carteira de mercado. De fato, na Tabela 2, vemos que o risco do portfólio selecionado pelo algoritmo CWMR- $\beta$  é inferior ao selecionado pelo CWMR. Em termos de retorno acumulado, é possível aferir na Figura 3 que o desempenho do algoritmo CWMR- $\beta$  foi capaz de superar tanto o índice de referência quanto a estratégia UCRP. Especificamente, quando comparamos o retorno acumulado do CWMR com o CWMR- $\beta$ , vemos que o último, mesmo apresentando valores absolutos inferiores, possui um crescimento de riqueza mais contante e suave.

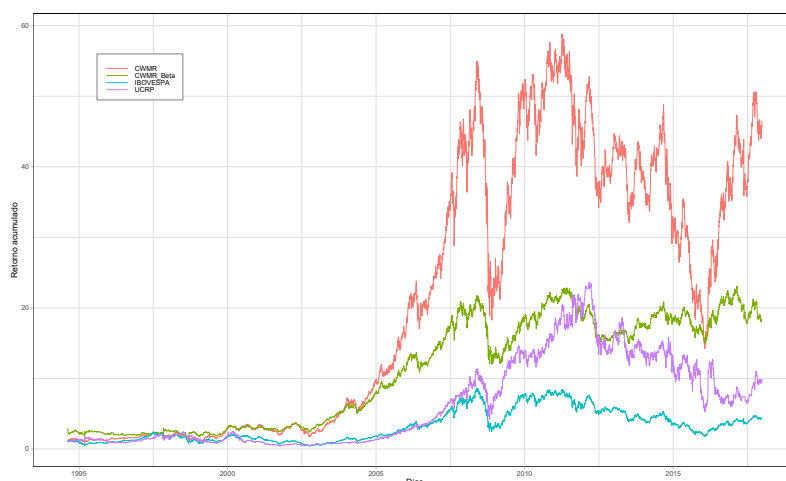


Figure 3. Comparação entre o portfólio construído pelo algoritmo CWMR, CWMR- $\beta$  e UCRP e o IBOVEPA

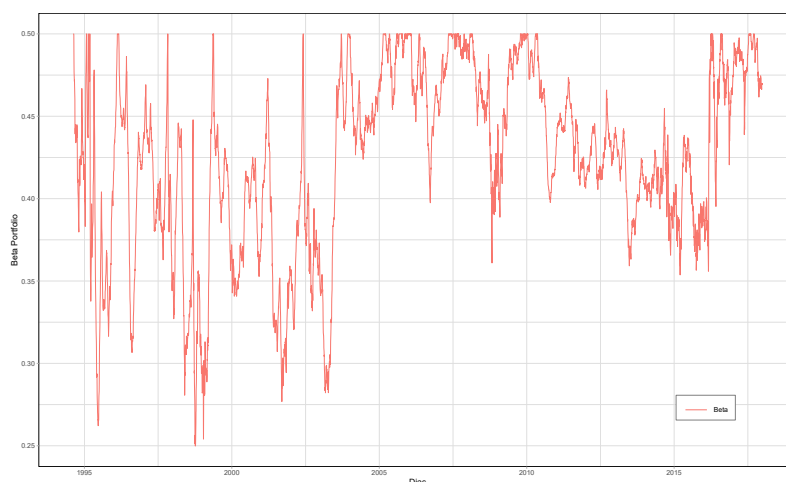


Figure 4. Beta portfólio CWMR- $\beta$  variando entre  $0.25 \leq \beta \leq 0.5$

Alternativamente, testamos a hipótese de capacidade de controle da qualidade dos ativos definindo um intervalo de  $\beta$  variando entre 0.9 e 2. Pelas premissas teóricas do modelo CAPM, seria esperado construir uma carteira disposta a correr riscos superiores aos do mercado. De fato, pela Figura 5, podemos constatar que o portfólio

selecionado pelo algoritmo CWMR- $\beta$  possui forte correlação com o mercado, superando a estratégia do CWMR em todo período de análise. É interessante destacar que em períodos onde a composição da carteira conseguiu selecionar portfólios com  $\beta > 1$  estão associados a períodos de ganhos elevados. Este fato pode ser observado na 6. Avaliando o risco de cada uma das estratégias neste cenário, observamos na Tabela 3 um perfil de risco muito similar, indicando que estratégia do algoritmo CWMR foi mais eficiente considerando a relação entre retorno e risco.

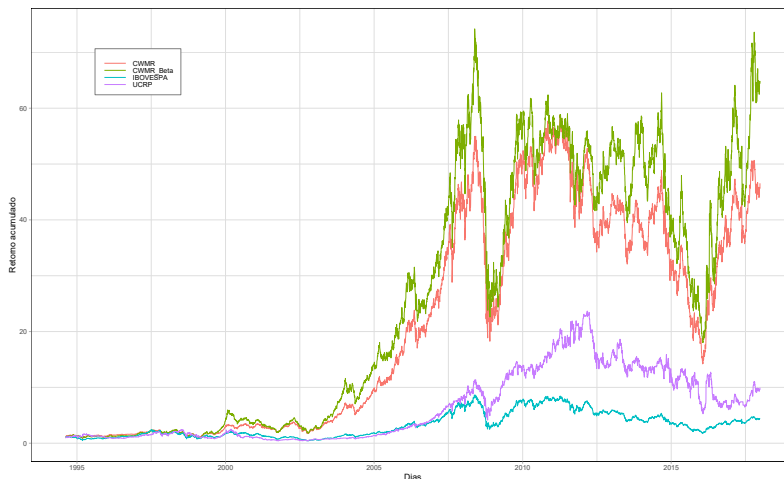


Figure 5. Comparação entre o portfólio construído pelo algoritmo CWMR, CWMR-Beta e UCRP e o IBOVEPA

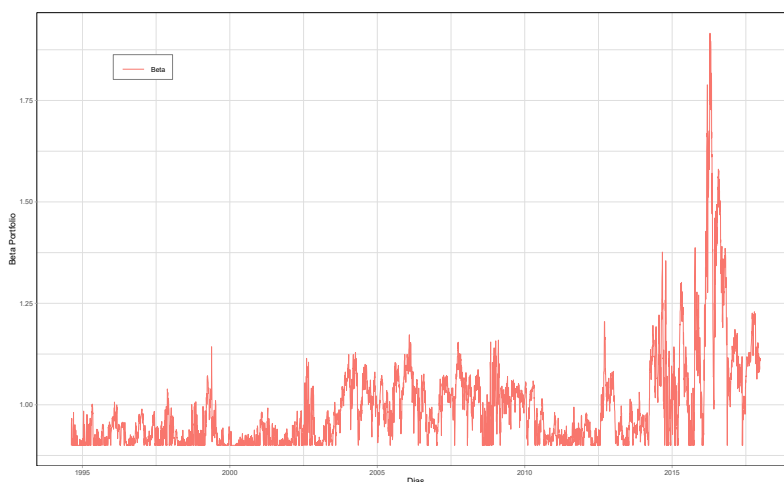


Figure 6. Beta portfólio CWMR-Beta variando entre 0.9 e 2

Table 2. Comparação risco portfólios CWMR e CWMR-Beta com beta restrito entre 0.25e0.5

	CWMR		CWMR Beta	
	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.0586739	-0.0334964	-0.039074	-0.0216806
CVaR	-0.0838140	-0.0511346	-0.058553	-0.0337573

Table 3. Comparação risco portfólios CWMR e CWMR-Beta com beta restrito entre 0.9 e 2

	CWMR		CWMR Beta	
	1%	5%	1%	5%
VaR	-0.0586739	-0.0334964	-0.0680864	-0.0347814
CVaR	-0.0838140	-0.0511346	-0.0810739	-0.0524091

## 7 Conclusão

Neste trabalho, foram explorados os benefícios de combinar um controle de risco do portfólio com o algoritmo CWMR. Trabalhar com o  $\beta$  variante no tempo foi fundamental para capturar adequadamente a correlação de cada ativo com o mercado.

Verificamos que a estratégia de investimento do algoritmo CWMR pode construir portfólios com risco elevado. Esse efeito mantém a estratégia de compra de ativos que estão se desvalorizando em patamares superiores a média. Em momentos de crise acentuada, seguir essa estratégia pode trazer perdas irreparáveis.

Foi possível concluir que o uso da técnica de controlar o risco com o uso do cálculo do  $\beta$  na etapa de projeção é uma estratégia eficiente. O algoritmo proposto, CWMR- $\beta$ , foi capaz de superar os índices de referência selecionando carteiras com perfil de risco mais desejável.

Como direção de pesquisas futuras, pode-se propor o uso de funções de aprendizado dinâmico para definir o melhor intervalo de beta para o momento, possibilitando a aplicação da técnica em diferentes cenários dentro do mercado.

**Agradecimentos.** Os autores agradecem ao CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

**Authorship statement.** Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho e que todo o material aqui incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) de os autores ou tem a permissão dos proprietários para serem incluídos aqui.

## References

- [1] Li, B. & Hoi, S. C., 2012. On-line portfolio selection with moving average reversion. *arXiv preprint arXiv:1206.4626*.
- [2] Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *The journal of finance*, vol. 7, n. 1, pp. 77–91.
- [3] Kelly, J. L., 1956. A new interpretation of information rate. *Bell Labs Technical Journal*, vol. 35, n. 4, pp. 917–926.
- [4] Bell, R. M. & Cover, T. M., 1980. Competitive optimality of logarithmic investment. *Mathematics of Operations Research*, vol. 5, n. 2, pp. 161–166.
- [5] Bell, R. & Cover, T. M., 1988. Game-theoretic optimal portfolios. *Management Science*, vol. 34, n. 6, pp. 724–733.
- [6] Algoet, P. H. & Cover, T. M., 1988. Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, pp. 876–898.
- [7] Li, B., Hoi, S. C., Zhao, P., & Gopalkrishnan, V., 2013. Confidence weighted mean reversion strategy for online portfolio selection. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, vol. 7, n. 1, pp. 1–38.
- [8] Borodin, A., El-Yaniv, R., & Gogan, V., 2004. Can we learn to beat the best stock. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pp. 345–352.
- [9] Cover, T. M., 1991. Universal portfolios. *Mathematical finance*, vol. 1, n. 1, pp. 1–29.
- [10] Ha, Y. & Zhang, H., 2019. Liquidity risks, transaction costs and online portfolio selection. *Transaction costs and Online Portfolio Selection (April 26, 2019)*.
- [11] Guan, H. & An, Z., 2019. A local adaptive learning system for online portfolio selection. *Knowledge-Based Systems*, vol. 186, pp. 104958.
- [12] Crammer, K., Dekel, O., Keshet, J., Shalev-Shwartz, S., & Singer, Y., 2006. Online passive-aggressive algorithms. *Journal of Machine Learning Research*, vol. 7, n. Mar, pp. 551–585.
- [13] Dredze, M., Crammer, K., & Pereira, F., 2008. Confidence-weighted linear classification. In *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*, pp. 264–271.

- [14] Cover, T. M. & Ordentlich, E., 1996. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, n. 2, pp. 348–363.
- [15] Helmbold, D. P., Schapire, R. E., Singer, Y., & Warmuth, M. K., 1998. On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance*, vol. 8, n. 4, pp. 325–347.
- [16] Gaivoronski, A. A. & Stella, F., 2000. Stochastic nonstationary optimization for finding universal portfolios. *Annals of Operations Research*, vol. 100, n. 1, pp. 165–188.
- [17] Zinkevich, M., 2003. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent. In *Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning (ICML-03)*, pp. 928–936.
- [18] Agarwal, A., Hazan, E., Kale, S., & Schapire, R. E., 2006. Algorithms for portfolio management based on the newton method. In *Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, pp. 9–16. ACM.
- [19] Hazan, E., 2012. The convex optimization approach to regret minimization. *Optimization for machine learning*, pp. 287.
- [20] Luo, H., Wei, C.-Y., & Zheng, K., 2018. Efficient online portfolio with logarithmic regret. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pp. 8235–8245.
- [21] De Bondt, W. F. & Thaler, R., 1985. Does the stock market overreact? *The Journal of finance*, vol. 40, n. 3, pp. 793–805.
- [22] Lehmann, B. N., 1990. Fads, martingales, and market efficiency. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 105, n. 1, pp. 1–28.
- [23] Moon, S.-H., Kim, Y.-H., & Moon, B.-R., 2019. Empirical investigation of state-of-the-art mean reversion strategies for equity markets. *arXiv preprint arXiv:1909.04327*.
- [24] Li, B., Zhao, P., Hoi, S. C., & Gopalkrishnan, V., 2012. Pamr: Passive aggressive mean reversion strategy for portfolio selection. *Machine learning*, vol. 87, n. 2, pp. 221–258.
- [25] Gao, L., Zhang, W., & Tang, Q., 2013. Passive aggressive algorithm for online portfolio selection with piecewise loss function. In *International Conference on Advanced Data Mining and Applications*, pp. 360–371. Springer.
- [26] Huang, D., Zhou, J., Li, B., Hoi, S. C., & Zhou, S., 2016. Robust median reversion strategy for online portfolio selection. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 28, n. 9, pp. 2480–2493.
- [27] Lin, X., Zhang, M., Zhang, Y., Gu, Z., Liu, Y., & Ma, S., 2017. Boosting moving average reversion strategy for online portfolio selection: a meta-learning approach. In *International conference on database systems for advanced applications*, pp. 494–510. Springer.
- [28] Lo, A. W. & MacKinlay, A. C., 1990. When are contrarian profits due to stock market overreaction? *The review of financial studies*, vol. 3, n. 2, pp. 175–205.
- [29] Jegadeesh, N., 1990. Evidence of predictable behavior of security returns. *The Journal of finance*, vol. 45, n. 3, pp. 881–898.
- [30] Crammer, K., Dredze, M., & Pereira, F., 2009. Exact convex confidence-weighted learning. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pp. 345–352.
- [31] Sharpe, W. F., 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, vol. 19, n. 3, pp. 425–442.
- [32] Lintner, J., 1965. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, pp. 13–37.
- [33] Treynor, J. L., 1965. How to rate management of investment funds. *Harvard business review*, vol. 43, n. 1, pp. 63–75.
- [34] Mossin, J., 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 768–783.
- [35] Durbin, J. & Koopman, S. J., 2012. *Time series analysis by state space methods*, volume 38. OUP Oxford.
- [36] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, vol. 9, n. 3, pp. 203–228.
- [37] Acerbi, C. & Tasche, D., 2002. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes*, vol. 31, n. 2, pp. 379–388.
- [38] Li, B. & Hoi, S. C., 2014. Online portfolio selection: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 46, n. 3, pp. 35.