

A three-dimensional Boundary Element formulation for boundary conditions on small areas

Matheus Rocha¹, Edson D. Leonel¹

¹*Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil*

Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590, São Paulo, Brazil
rocha.matheus@usp.br, edleonel@sc.usp.br

Abstract. The accurate prediction of the mechanical behaviour of solids and structural systems has fundamental importance in structural engineering. This task has been handled by numerical methods, such as the Boundary Element Method (BEM). In this method, integral equations written over the body's boundaries represent the mechanical behaviour. Then, in three-dimensional analyses, the BEM mesh is composed of two-dimensional elements. Nevertheless, the mesh construction depends on the position of the distributed loads and displacements over the boundary. This is a disadvantage when the geometric modelling is performed on Computer Aided Design software, once the boundary conditions representation leads to additional and inconvenient modifications. To overcome such drawback, this study presents a BEM formulation which handles distributed boundary conditions non-coincident to the boundary element mesh. The overlapping element is required, which overlaps the BEM mesh. Both distributed loads and supports are accounted by the proposed scheme. A numerical application demonstrates the accuracy of the proposed scheme, in which its responses are compared against numerical data of an equivalent finite element model. The results demonstrate remarkable accuracy and robustness.

Keywords: Boundary Element Method, Overlapping mesh, Three-dimensional modelling.

1 Introdução

O dimensionamento estrutural ótimo consiste em garantir a máxima economia e a segurança dos componentes. Assim, é fundamental que a análise mecânica dos elementos projetados seja robusta e precisa, de modo que o engenheiro possa promover os ajustes necessários em busca dos aspectos desejados. Nesse sentido, é comum que abordagens analíticas sejam limitadas para boa parte das análises correntes da engenharia, dado que é impraticável efetuar tais formulações em sólidos de geometria, condições de contorno e comportamento material complexos. Essa problemática é ainda mais evidente para sólidos tridimensionais. Diante desse cenário, o advento dos métodos numéricos permitiu um primoroso avanço para a engenharia estrutural, pois assim tornou-se possível efetuar análises robustas e eficientes de componentes mecânicos complexos, com o rigor necessário.

Dentre os métodos numéricos, destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), em que se utiliza apenas uma malha sobre o contorno do sólido para que sejam determinadas as grandezas mecânicas de interesse, como deslocamentos e tensões. Com isso, há a redução na dimensionalidade da malha, isto é, análises tridimensionais requerem malhas de superfície, o que reduz o empenho executado em geração da discretização. No entanto, a construção da malha, para o MEC, é vinculada à distribuição das condições de contorno. Por isso, é exigido que as superfícies estejam previamente segmentadas para a aplicação das vinculações e carregamentos. Essa questão emerge como uma desvantagem quando há o interesse em utilizar malhas oriundas de desenhos efetuados em *software CAD Computer Aided Design*, pois exige uma atenção adicional na etapa de desenho da peça.

Nesse panorama, este trabalho propõe uma formulação para aplicação das condições de contorno distribuídas, de modo a reduzir a exigência sobre a malha pré-construída. Tal estratégia consiste em adicionar um comportamento mecânico esperado ou conhecido ao problema a partir do acréscimo de parcelas nas aproximações dos campos mecânicos. Essa abordagem, para o MEC, é recente e bastante promissora, tendo sido aplicada com sucesso para a elasticidade bidimensional em problemas da mecânica da fratura, como nos trabalhos de Simpson e Trevelyan [1], Alatawi e Trevelyan [2] e Hattori et al. [3], por exemplo. Dessa forma, é objetivo deste trabalho desvincular a correlação existente entre a construção da malha e a aplicação das solicitações e vínculos, o que se

mostra um avanço nas funcionalidades do MEC.

2 Método dos Elementos de Contorno

O problema da elasticidade linear é definido para um sólido de domínio Ω e contorno Γ , em que são conhecidos os deslocamentos no contorno Γ_u e as forças de superfície no contorno Γ_p , tal que $\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$. No entanto, os deslocamentos e forças de superfície são incógnitos para Γ_p e Γ_u , respectivamente. Adicionalmente, deslocamentos, deformações e tensões no interior do domínio Ω também são desconhecidos. Nesse panorama, o MEC é um método numérico que determina os campos mecânicos incógnitos no contorno do sólido e, com base nessa resposta, o método permite descrever mecanicamente todas as grandezas de interesse também para o domínio. Para o equacionamento do MEC, é utilizada a Identidade Somigliana [4] sobre a qual é aplicado o processo limite, conforme apresentado em Aliabadi [5], para que seja obtida a equação integral em deslocamentos:

$$\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s) u_k(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} P_{\ell k}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{\ell k}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{\ell k}^* b_k d\Omega \quad (1)$$

em que $\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s)$ é o termo livre, que assume valor $0,5 \delta_{\ell k}$ quando o ponto de colocação \mathbf{x}^s está sobre contorno suave (com vetor normal \mathbf{n} definido), e $\delta_{\ell k}$ quando o ponto de colocação está interno ao domínio, com $\delta_{\ell k}$ sendo o Delta de Kronecker. Já u_k e p_k representam os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente. b_k se refere às forças de domínio atuantes, que serão consideradas nulas no presente trabalho. Além disso, a integral do lado esquerdo da Equação 1 é imprópria e avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy, conforme discutido em Guiggiani e Gigante [6]. Adicionalmente, $U_{\ell k}^*$ e $P_{\ell k}^*$ correspondem à Solução Fundamental de Kelvin, que, para sólidos tridimensionais, é escrita como:

$$\begin{aligned} U_{\ell k}^* &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{\ell k} + r_{,\ell}r_{,k}] \\ P_{\ell k}^* &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} [(1-2\nu)\delta_{\ell k} + 3r_{,\ell}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,\ell}n_k + r_{,k}n_{\ell}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

em que r é a distância entre o ponto de colocação e o ponto campo \mathbf{x}^f sobre o contorno. Já μ e ν representam as propriedades elásticas do material, sendo, respectivamente, o Módulo de Elasticidade Transversal e coeficiente de Poisson.

O MEC utiliza-se de elementos lagrangianos isoparamétricos para a representação aproximada da geometria e dos campos mecânicos no contorno do sólido. Neste trabalho, utilizam-se elementos quadrilaterais lineares. São utilizados elementos contínuos, descontínuos de aresta e descontínuos, ilustrados na Figura 1. A utilização de elementos descontínuos é necessária para que os pontos de colocação estejam sempre sobre contornos suaves, o que permite a utilização de $\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s) = 0,5 \delta_{\ell k}$ em toda a análise.

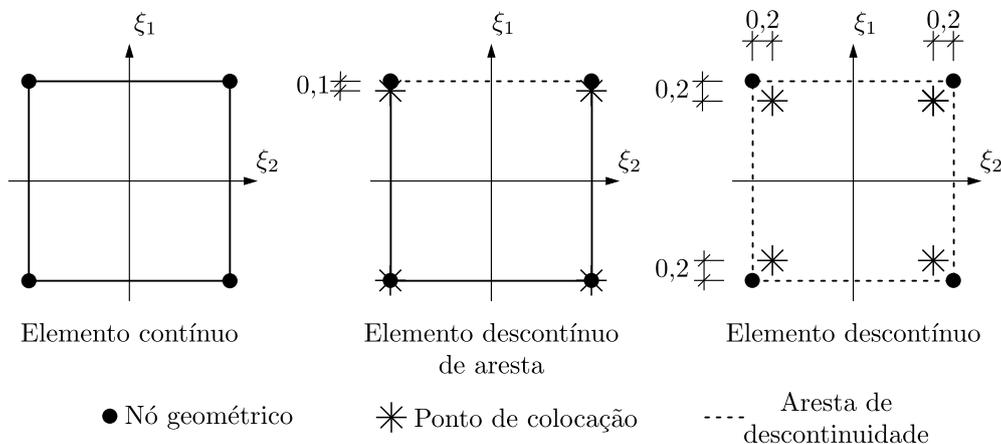


Figura 1. Elementos quadrilaterais lineares isoparamétricos utilizados.

O tipo de elemento utilizado para a aproximação da geometria do sólido é ilustrado na Figura 1(a), em que a função de forma correspondente ao nó i é:

$$M^i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 \quad (3)$$

em que ξ_1 e ξ_2 são as coordenadas adimensionais de um ponto pertencente ao elemento, enquanto os coeficientes c_k^i , $k = 1, \dots, 4$ são calculados pela propriedade do Delta de Kronecker. Dessa forma, a função de forma i calculada sobre o nó j do elemento é $M^i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \delta_{ij}$. Já a aproximação dos campos mecânicos é efetuada por meio de elementos descontínuos de aresta e descontínuos, apresentados na Figura 1(b) e (c). Para tais elementos, a construção da função de forma $N^i(\xi_1, \xi_2)$ é análoga, mas considerando o reposicionamento dos pontos de colocação. Desse modo, a aproximação da geometria e dos campos mecânicos para um dado elemento e é expressa como:

$$\begin{aligned} x_k^e(\xi_1, \xi_2) &= M^{ie}(\xi_1, \xi_2) x_k^{ie} \\ u_k^e(\xi_1, \xi_2) &= N^{ie}(\xi_1, \xi_2) u_k^{ie} \\ p_k^e(\xi_1, \xi_2) &= N^{ie}(\xi_1, \xi_2) p_k^{ie} \end{aligned} \quad (4)$$

Os elementos são convenientemente definidos em um espaço paramétrico $\Lambda = [-1; 1] \times [-1; 1]$, pois neste espaço é possível aplicar quadraturas convencionais de integração. Dessa forma, a relação entre o diferencial de área entre os espaços físico e paramétrico é efetuada por $d\Gamma_e = J^e(\xi_1, \xi_2) d\Lambda$.

Assim, aplicando a aproximação dos campos mecânicos na equação integral em deslocamentos para uma discretização com N_e elementos, e posicionando todos os pontos de colocação sobre o contorno, tem-se:

$$\begin{aligned} 0,5 u_\ell(\mathbf{x}^s) + \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \left[\sum_{i=1}^4 \int_{\Lambda} P_{\ell k}^* N^{ie}(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\Lambda \right] u_k^{\text{con}(e,i)} \right\} \\ = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \left[\sum_{i=1}^4 \int_{\Lambda} U_{\ell k}^* N^{ie}(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\Lambda \right] p_k^{\text{con}(e,i)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

em que $\text{con}(e, i)$ é uma relação de conectividade que retorna a numeração global referente ao nó local i do elemento e . Dessa forma, a aplicação da Equação 5 para todos os pontos de colocação permite a obtenção de um sistema matricial no formato $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p}$. A imposição das condições de contorno conhecidas é efetuada por meio da substituição desses valores nas suas devidas posições dos nós, e, na sequência, é efetuada uma operação de troca de colunas. Assim, obtém-se um sistema algébrico $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que \mathbf{x} armazena todas as grandezas incógnitas. A solução do referido sistema obtém os campos mecânicos em todo o contorno do sólido. Para a obtenção das grandezas internas, utiliza-se a Equação 1 com ponto de colocação no domínio.

3 Condições de contorno em pequenas áreas

A aplicação de condições de contorno no MEC requer a prévia distinção entre Γ_u e Γ_p na geração da malha. Devido a isso, é necessária a construção da malha já considerando as descontinuidades na aplicação das condições de contorno. Além disso, a presença de pontos de colocação proximamente posicionados pode ocasionar instabilidades numéricas no sistema algébrico. Isso ocorre pois as equações geradas para cada ponto de colocação se tornam semelhantes, já que a distância entre ponto fonte e pontos campos é avaliada para a construção do sistema. Nesse cenário, esta pesquisa propõe a aplicação de condições de contorno distribuídas sobre a malha pré-existente. Para isso, a Figura 2 apresenta o elemento de sobreposição, responsável pela imposição das condições de contorno.

As condições de contorno do elemento de sobreposição são incorporadas ao campo mecânico de força de superfície. Denota-se por $\overline{M}^{\beta\bar{e}}$ a função de forma do nó β do elemento de sobreposição \bar{e} , calculada analogamente ao apresentado na Equação 3 para o caso quadrilateral linear, utilizado neste trabalho. Dessa forma, a contribuição à aproximação da força de superfície (Equação 4) se torna:

$$p_k^e(\xi_1, \xi_2) = N^{ie}(\xi_1, \xi_2) p_k^{ie} + \overline{M}^{\beta\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \bar{p}_k^\beta \quad (6)$$

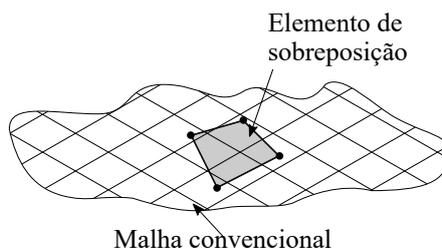


Figura 2. Elemento de sobreposição quadrilateral linear.

quando há intersecção entre o elemento e e o elemento de sobreposição \bar{e} . Já \bar{p}_k^β indica a força de superfície em \bar{e} . O elemento de sobreposição incorporado à aproximação das forças de superfície gera um acréscimo sobre a integral que possui o núcleo $U_{\ell k}^*$. Dessa forma, a substituição de Equação 6 na Equação 5 resulta em:

$$\begin{aligned}
 0,5 u_\ell(\mathbf{x}^s) + \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \left[\sum_{i=1}^4 \int_{\Lambda} P_{\ell k}^* N^{ie}(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\Lambda \right] u_k^{\text{con}(e,i)} \right\} \\
 = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \left[\sum_{i=1}^4 \int_{\Lambda} U_{\ell k}^* N^{ie}(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\Lambda \right] p_k^{\text{con}(e,i)} \right\} \\
 + \sum_{\bar{e}=1}^{N_{\bar{e}}} \left\{ \left[\sum_{\beta=1}^4 \int_{\Lambda} U_{\ell k}^* M^{\beta\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) J^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\Lambda \right] \bar{p}_k^{\text{con}(\bar{e},\beta)} \right\}
 \end{aligned} \quad (7)$$

em que $N_{\bar{e}}$ é o total de elementos de sobreposição e $\text{con}(\bar{e},\beta)$ é a incidência relativa este elemento. Destaca-se que também é utilizada uma transformação de variáveis para que a integração numérica do elemento de sobreposição seja efetuada por quadratura de Gauss. Quando o ponto de colocação está contido em \bar{e} , uma quase-singularidade é observada, em que a aplicação de coordenadas polares é suficiente para a regularização do núcleo. Assim, a aplicação da Equação 7 para a imposição de forças de superfície resulta em um vetor adicional $\bar{\mathbf{b}}$ que é acrescido ao sistema algébrico, que se torna $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}$.

Quando se aplicam deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}$ sobre o elemento de sobreposição, o campo mecânico de forças de superfície na direção k do deslocamento aplicado se torna uma incógnita adicional do problema. Nesse contexto, uma equação de compatibilidade em deslocamentos é aplicada para manter o sistema determinado:

$$\left(\bar{u}_k^\beta \right)^{\bar{e}} = N^{ie} \left(\xi_1^\beta, \xi_2^\beta \right) u_k^{ie} \quad (8)$$

em que se associam os deslocamentos incógnitos do problema u_k^{ie} com os deslocamentos conhecidos do elemento de sobreposição. As coordenadas adimensionais ξ_1^β e ξ_2^β são associadas às coordenadas que o nó β do elemento de sobreposição \bar{e} possui no elemento e da malha pré-existente. Assim, o sistema algébrico é expandido, tornando-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}^e \\ \mathbb{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

em que o vetor $\bar{\mathbf{p}}$ armazena as forças de superfície incógnitas do elemento de sobreposição, $\bar{\mathbf{u}}$ se refere aos deslocamentos prescritos, \mathbb{N} é a matriz que organiza a contribuição referente à Equação 8 e \mathbf{A}^e armazena as informações da integral adicional referente à Equação 7, com o sinal trocado devido a troca de lado na equação. É importante mencionar ainda que pontos de colocação internos a elementos de sobreposição também recebem a condição de contorno do elemento sobreposto.

4 Exemplo de aplicação

O exemplo de aplicação da formulação proposta envolve a análise mecânica de um sólido bi-engastado, em que a geometria e condições de contorno estão apresentadas na Figura 3. Os deslocamentos prescritos são aplicados

a partir do elemento de sobreposição nas direções x_2 e x_3 ao longo da área sombreada, de valor $1,0 \cdot 10^{-2}$. A solicitação aplicada é essencialmente tridimensional, de flexo-torção. As propriedades mecânicas são $E = 1.000$ e $\nu = 0,3$.

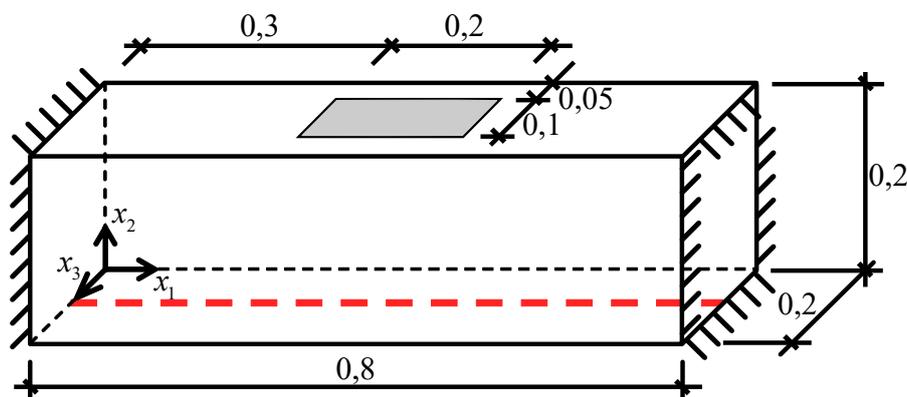


Figura 3. Geometria e condições de contorno do exemplo de aplicação.

Para validação da formulação, toma-se um modelo equivalente calculado pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), e simulado com auxílio do software *Ansys*[®]. Uma análise prévia de convergência dos resultados é efetuada, e se utiliza uma malha com 379.029 nós e 272.298 elementos tetraédricos de interpolação quadrática, conforme apresentado na Figura 4(a). Para atestar a convergência do MEC, três malhas são adotadas, sendo denominadas por A, B e C, apresentadas na Figura 4(b) a (d). O total de pontos de colocação é igual a 597, 2.493 e 8.555 e o total de elementos é 470, 2.222 e 8.043, para as malhas A, B e C, respectivamente. O destaque em azul se refere ao elemento de sobreposição posicionado.

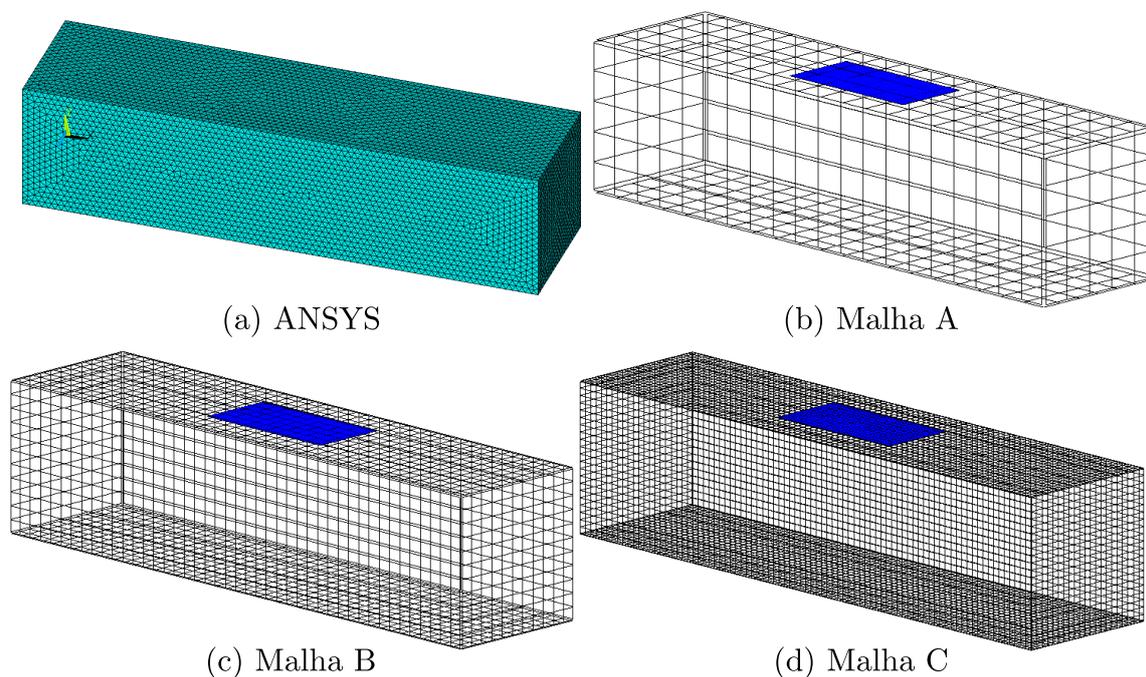


Figura 4. Discretizações adotadas no exemplo de aplicação.

Assim, o campo de deslocamentos totais é apresentado na Figura 5. Para uma comparação numérica, a Figura 6 apresenta os deslocamentos totais ao longo da linha vermelha tracejada da Figura 3 são utilizados, em que tal linha é definida por $0 \leq x_1 \leq 0,8$, $x_2 = 0,0$ e $x_3 = 0,1$.

Além disso, a diferença percentual para os deslocamentos calculados pelas malhas A, B e C no ponto $(0,4; 0,0; 0,1)$, em comparação ao resultado de referência é efetuado, e é apresentado na Figura 7.

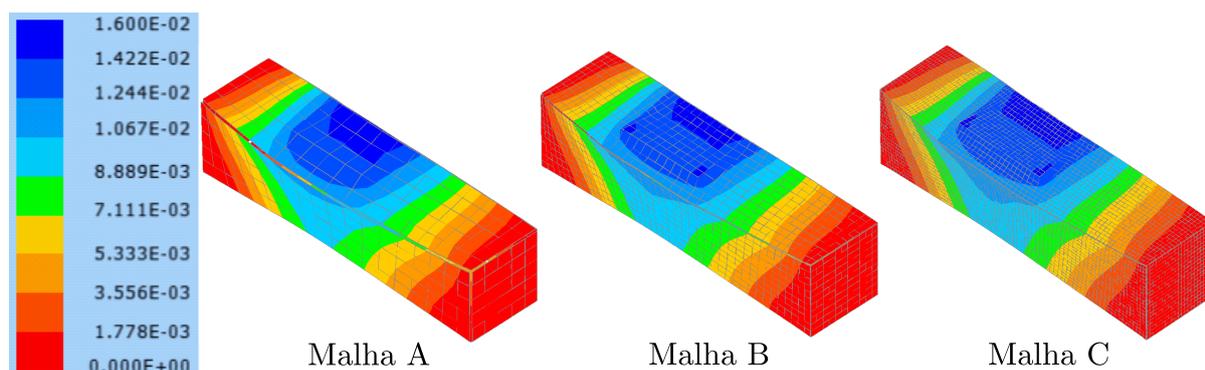


Figura 5. Deslocamentos totais para as três malhas.

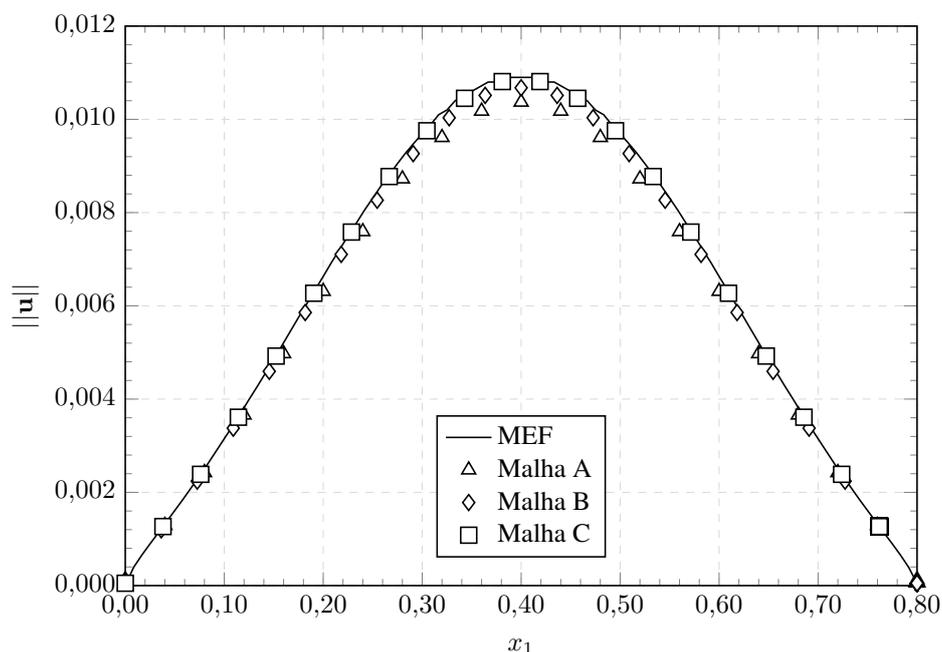


Figura 6. Comparação dos deslocamentos para as três malhas e o MEF na linha destacada da Figura 3

Portanto, com base nos dados apresentados, é atestada uma convergência nos resultados com o refino da malha, além de uma boa concordância em comparação aos resultados numéricos do MEF. Por fim, é evidenciada uma maior dificuldade de convergência para os resultados na direção x_3 , devido ao comportamento à torção ser menos uniforme que à flexão em seções transversais retangulares.

5 Conclusões

Foi discutida uma maneira alternativa para o tratamento de condições de contorno distribuídas para o MEC. Nesta abordagem, é promovido uma expansão sobre o campo mecânico de forças de superfície por meio da utilização do elemento de sobreposição. Dessa forma, a construção de malhas passa a não depender do conhecimento prévio da localização de deslocamentos e forças de superfície conhecidos. A ferramenta sugerida é interessante pois assim é permitida a importação direta de geometrias diversas, bem como a alteração nas vinculações e carregamentos ao longo da análise. Adicionalmente, a formulação apresentada reduz a ocorrência de problemas de instabilidade numérica para as matrizes originais do MEC, pois a ocorrência de pontos de colocação próximos é reduzida. Nesse panorama, a formulação é demonstrada como eficiente e robusta a partir de um exemplo em que a solicitação é essencialmente tridimensional. Os pequenos erros percentuais, assim como a tendência de convergência dos resultados, garantem a precisão da formulação discutida. Nesse contexto, é interesse de pesquisas futuras a aplicação das ideias discutidas no presente trabalho no contexto do MEC isogeométrico, em que a aplicação de condições de contorno é um desafio em desenvolvimento.

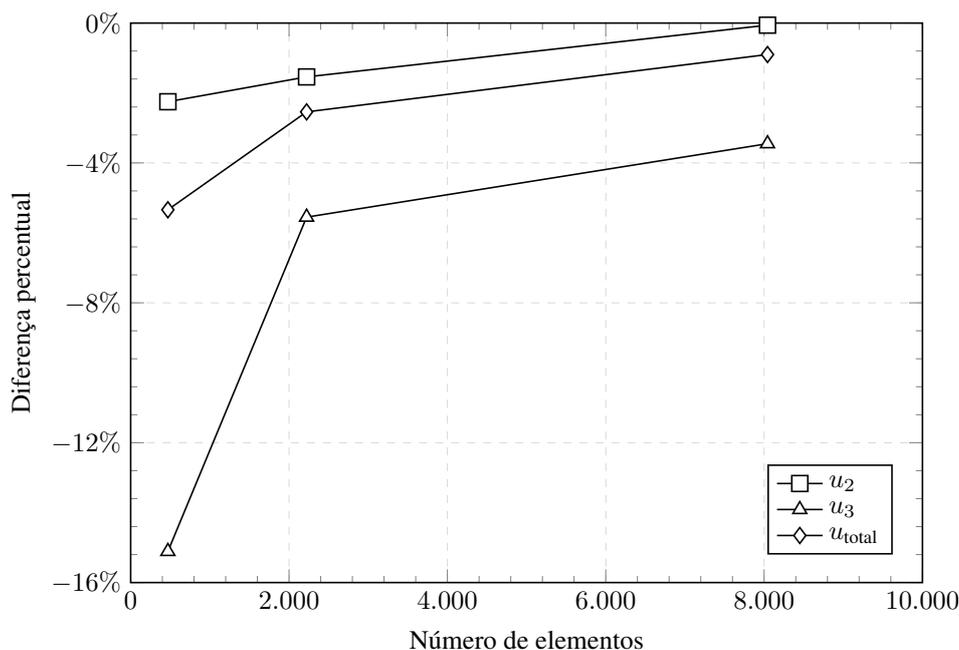


Figura 7. Comparação percentual entre os deslocamentos para as três malhas e a referência (MEF).

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e com suporte principal do processo nº 2019/18795-6, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Simpson, R. & Trevelyan, J., 2011. A partition of unity enriched dual boundary element method for accurate computations in fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n. 1-4, pp. 1–10.
- [2] Alatawi, I. & Trevelyan, J., 2015. A direct evaluation of stress intensity factors using the extended dual boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 52, pp. 56–63.
- [3] Hattori, G., Alatawi, I. A., & Trevelyan, J., 2017. An extended boundary element method formulation for the direct calculation of the stress intensity factors in fully anisotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 109, n. 7, pp. 965–981.
- [4] Somigliana, C., 1887. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, vol. 4, pp. 101–172.
- [5] Aliabadi, M. H., 2002. *The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures*, volume 2. John Wiley & Sons.
- [6] Guiggiani, M. & Gigante, A., 1990. A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, n. 4, pp. 906–915.