

The three-dimensional isogeometric Boundary Element Method for concentrated boundary conditions

Matheus Rocha¹, Edson D. Leonel¹

¹*Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil*

Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590, São Paulo, Brazil
rocha.matheus@usp.br, edleonel@sc.usp.br

Abstract. The Isogeometric Boundary Element Method (IGABEM) is a recent and robust strategy for the mechanical modelling of solids. One remarkable advantage of the isogeometric approach is the direct mechanical analysis from geometries modelled by Computer-Aided Design (CAD) software, in which complex geometries can be accurately represented. In this context, the non-uniform rational B-splines (NURBS) surfaces approximate both geometry and mechanical fields. Besides, the non-requirement of the domain mesh contributes to the coupling IGA and BEM, once CAD surfaces are the mesh itself. However, the application of concentrated boundary conditions in IGABEM is quite challenging, because of two main aspects: the extension of the NURBS curves and the singular nature of the fundamental solutions. Commonly, few NURBS surfaces are necessary to represent the entire boundary and trimming these curves is not an easy task. Besides, boundary conditions over small areas may require small NURBS, which is non-sense in this domain. Additionally, the use of small elements may lead to the ill-positioned algebraic system of equations, due to the small distance between the source points. Therefore, this study presents an IGABEM formulation (IGABEM) to account such boundary conditions in three-dimensional solids. Concentrated loads and supports are introduced by the addition of the Dirac Delta function over the traction mechanical field. One application demonstrates the accuracy of the proposed formulation, in which its results are compared against the responses of Finite Element equivalent model. The proposed IGABEM approach predicts the mechanical behaviour accurately, which proves the accuracy and robustness of the proposed improvements.

Keywords: Isogeometric analysis, Boundary Element Method, Three-dimensional modelling.

1 Introdução

A precisa análise mecânica de sólidos é um tópico de grande interesse para a engenharia, pois, a partir de modelos robustos para predição de deslocamentos e tensões em estruturas, é possível aliar segurança e economia, dois aspectos desejados em projeto. No entanto, é comum a utilização de componentes mecânicos de geometria complexa na indústria mecânica, aeronáutica, naval, civil, entre outras. Para tais sólidos, modelos analíticos são inexecutáveis, dada a complexidade na descrição dos campos mecânicos do sólido. Nesse contexto, os métodos numéricos surgem como uma alternativa relevante para suplantarem as dificuldades presentes em modelos simplificados ou analíticos.

Dentre os métodos numéricos, há o Método dos Elementos de Contorno (MEC), em que o comportamento mecânico do sólido é descrito por meio de equações escritas somente em termos de grandezas na superfície do corpo. Assim, a dimensionalidade da discretização requerida é reduzida. Por exemplo, em análises tridimensionais, malhas bidimensionais (superfícies) são suficientes para a análise mecânica pelo MEC. Além disso, é amplamente difundida a utilização de *software* CAD (*Computer Aided Design*) para projetos de engenharia estrutural. Tais *software* utilizam funções base do tipo *Non-Uniform Rational B-Splines* (NURBS), pois tais curvas são excelentes na descrição de geometrias complexas. Nesse cenário, a introdução das curvas e superfícies NURBS em conjunto ao MEC é promissora, como apresentado em Simpson et al. [1], Simpson et al. [2] e Cordeiro e Leonel [3], pois alia as vantagens do MEC com a importação direta de malhas provenientes de *software* CAD.

Diante do panorama apresentado, é importante ressaltar que o MEC em sua abordagem isogeométrica ainda não possui uma funcionalidade comum para o Método dos Elementos Finitos (MEF): a aplicação de condições de contorno concentradas. Tal idealização mecânica das solicitações é bastante comum e amplamente difundida

em soluções analíticas baseadas na Teoria da Elasticidade, bem como também é utilizada para investigações sobre comportamento mecânico de diversas estruturas e materiais. Devido a isso, o presente trabalho propõe a incorporação de carregamentos e apoios pontuais no MEC isogeométrico tridimensional, por meio da adição da função Delta de Dirac ao campo mecânico de forças de superfície. É demonstrada a incorporação da parcela proveniente desse acréscimo ao método, assim como a precisão e robustez da formulação proposta a partir de um exemplo numérico.

2 Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico

O MEC é um método numérico que utiliza em sua formulação as equações integrais escritas para o contorno Γ do sólido tridimensional em estudo. Sua dedução detalhada, considerando a aproximação lagrangiana da geometria e campos mecânicos, pode ser encontrada em Brebbia [4] e em Aliabadi [5]. São conhecidos, para este corpo, os deslocamentos ao longo do contorno Γ_u e as forças de superfície no contorno Γ_p , de modo que $\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$. Por outro lado, são desconhecidos os deslocamentos em Γ_p e as forças de superfície em Γ_u , sendo essas as incógnitas do problema. Para a obtenção dessas grandezas, no âmbito da elasticidade linear, é utilizada a Identidade Somigliana, e um processo limite é aplicado de modo a relacionar as grandezas no contorno do sólido. Tal processo consiste em considerar o ponto de colocação \mathbf{x}^s sobre o contorno e estender esse contorno em uma semi-esfera de raio ε , tomando $\varepsilon \rightarrow 0$. Desse modo, obtém-se a equação integral em deslocamentos, considerando ausentes forças de volume:

$$\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s) u_k(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} P_{\ell k}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{\ell k}^* p_k d\Gamma \quad (1)$$

em que \mathbf{x}^s é o ponto de colocação, u_k e p_k são, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície atuantes no contorno do sólido. A primeira integral é imprópria e avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy, em que, no caso tridimensional, utiliza-se o Método de Guiggiani [6] para sua determinação. O termo livre $\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s)$ vale $0,5\delta_{\ell k}$ quando o ponto de colocação é posicionado sobre contornos suaves, isto é, com versor normal definido. Já $U_{\ell k}^*$ e $P_{\ell k}^*$ correspondem à Solução Fundamental de Kelvin, sendo:

$$\begin{aligned} U_{\ell k}^* &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{\ell k} + r_{,\ell}r_{,l}] \\ P_{\ell k}^* &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} [(1-2\nu)\delta_{\ell k} + 3r_{,\ell}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,\ell}n_k + r_{,k}n_{\ell}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

em que r é o módulo da distância entre o ponto de colocação e o ponto campo sobre o contorno \mathbf{x}^f , \mathbf{n} é o versor normal ao ponto campo e $\delta_{\ell k}$ é o Delta de Kronecker. μ e ν são, respectivamente, o Módulo de Elasticidade Transversal e coeficiente de Poisson.

É possível discretizar o contorno em superfícies definidas por meio de funções paramétricas. Neste trabalho, são utilizadas superfícies NURBS (Cottrell et al. [7], Piegl e Tiller [8]), obtidas a partir do produto tensorial entre funções NURBS univariadas. Já as funções NURBS são escritas tomando-se as funções B-Splines, incluindo-se pesos associados aos pontos de controle. Nesse cenário, uma curva NURBS $R_{i,p}$ de grau p correspondente ao ponto de controle i é definida a partir dos seus n pontos de controle e pesos associados $\omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, e também do vetor de knots $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, sendo, portanto:

$$\begin{aligned} N_{i,0}(\xi) &= \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \\ N_{i,p}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \\ R_{i,p}(\xi) &= \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \end{aligned} \quad (3)$$

Um aspecto relevante na construção de curvas NURBS está associado ao fato delas serem caracterizadas por segmentos internos, os *knot-span*. Assim, o intervalo entre dois knots distintos consecutivos $\xi_t \leq \xi < \xi_{t+1}$ define um *knot-span*. Com isso, uma única curva permite a descrição de uma linha extensa, mesmo com descontinuidades e quinas.

A superfície NURBS $S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ é obtida pelo produto tensorial entre a função NURBS univariada $N_{i,p}(\xi)$, de grau p , com n pontos de controle e vetor de knots $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ e a função $M_{j,q}(\eta)$, de grau q , com m pontos de controle e vetor de knots $\mathbf{N} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$:

$$S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m N_{k,p}(\xi) M_{\ell,q}(\eta) w_{k,\ell}} \quad (4)$$

Nesse cenário, as funções $S_{i,j}^{p,q}$ são adotadas para aproximação da geometria e dos campos mecânicos do corpo em estudo, sendo, na superfície NURBS bivariada P de graus $n(P)$ e $m(P)$:

$$\begin{aligned} x_k(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{n(P)} \sum_{j=1}^{m(P)} S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) x_k^{con(i,j,P)} \\ u_k(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{n(P)} \sum_{j=1}^{m(P)} S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) d_k^{con(i,j,P)} \\ p_k(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{n(P)} \sum_{j=1}^{m(P)} S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) t_k^{con(i,j,P)} \end{aligned} \quad (5)$$

em que os parâmetros d_k e t_k , associados aos pontos de controle, não possuem significado físico. Já $con(i,j,P)$ é uma função de conectividade que relaciona as coordenadas locais i e j da NURBS P com a posição dos parâmetros em relação a ordenação global dos pontos de controle.

Adicionalmente, uma estratégia de colocação é requerida, dado que os pontos de controle não estão necessariamente posicionados sobre o contorno. Nesse contexto, é adotada a estratégia das abscissas de Greville [9]. Além disso, o reposicionamento dos pontos de arestas e quinas é efetuado para que se mantenha o parâmetro $\alpha_{\ell k}(\mathbf{x}^s) = 0,5 \delta_{\ell k}$, conforme procedimento apresentado em Cordeiro e Leonel [3].

Para integração, utiliza-se o espaço de integração $\{[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \Lambda \mid \Lambda = [-1; 1] \times [-1; 1]\}$ para que seja possível aplicar quadraturas convencionais. Nesse cenário, a integração ao longo da superfície NURBS é subdividida entre células definidas pelo produto tensorial dos *knot-span* de cada direção. O total de *knot-span* em cada direção é denotado por s_ξ e s_η , para as direções ξ e η de uma dada superfície P . Desse modo, é definida uma transformação de variáveis de ξ em $\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}$, $\xi_i < \xi_{i+1}$ para $\hat{\xi} \in [-1; 1]$, e analogamente para η . Assim, dois jacobianos são utilizados na transformação do diferencial de contorno $d\Gamma_P$ da NURBS para a integração: J_1 relaciona o diferencial de área com o diferencial no espaço paramétrico (do vetor de knots), enquanto J_2 relaciona o diferencial de contorno do espaço paramétrico com o espaço de integração. Portanto, tal correlação pode ser expressa como $d\Gamma_P = J_1 J_2 d\Lambda$.

Assim, aplicando a aproximação dos campos mecânicos por meio das superfícies NURBS para as grandezas no contorno, e também para o ponto de colocação, a equação integral para \mathbf{x}^s resulta em:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n(P(\mathbf{x}^s))} \sum_{j=1}^{m(P(\mathbf{x}^s))} 0,5 S_{i,j}^{p,q}(\xi(\mathbf{x}^s), \eta(\mathbf{x}^s)) d_\ell^{con(i,j,P(\mathbf{x}^s))} \\ & + \sum_{P=1}^{NP} \left[\sum_{u=1}^{s_\xi} \sum_{v=1}^{s_\eta} \sum_{i=inc_\xi(u)}^{inc_\xi(u)+p} \sum_{j=inc_\eta(v)}^{inc_\eta(v)+q} \int_{\Lambda} F_{\ell k}^* S_{i,j}^{p,q} J_1 J_2 d\Lambda d_k^{con(i,j,P)} \right] \\ & = \sum_{P=1}^{NP} \left[\sum_{u=1}^{s_\xi} \sum_{v=1}^{s_\eta} \sum_{i=inc_\xi(u)}^{inc_\xi(u)+p} \sum_{j=inc_\eta(v)}^{inc_\eta(v)+q} \int_{\Lambda} U_{\ell k}^* S_{i,j}^{p,q} J_1 J_2 d\Lambda t_k^{con(i,j,P)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

em que NP é o número de superfícies NURBS utilizadas na discretização, enquanto inc_ξ e inc_η retornam a numeração local do ponto de controle da superfície P considerando a célula integrada (definida pelos *knot-span* u e v). A aplicação da Equação 6 para todos os pontos de colocação utilizados resulta em um sistema na forma $\mathbf{Hd} = \mathbf{Gt}$. Aplicando as condições de contorno por meio da operação de trocas de colunas, é obtido um sistema linear no formato $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Assim, com a determinação dos parâmetros incógnitos \mathbf{x} , os campos mecânicos ao longo do contorno e no domínio do sólido podem ser definidos. Por fim, destaca-se que o presente trabalho utiliza

a técnica de sub-regiões para análise de sólidos não-homogêneos acoplados por interfaces em que há aderência perfeita [10].

3 Incorporação das condições de contorno concentradas

A proposição deste trabalho consiste em incorporar o efeito mecânico de condições de contorno concentradas no âmbito do MEC isogeométrico. Para tanto, é efetuado o acréscimo da força concentrada multiplicada pelo Delta de Dirac à aproximação das forças de superfície, como:

$$p_k(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n(P)} \sum_{j=1}^{m(P)} S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) t_k^{con(i,j,P)} + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^c) F_k(\mathbf{x}^c) \quad (7)$$

em que $F_k(\mathbf{x}^c)$ é a força concentrada aplicada na direção k no ponto da carga \mathbf{x}^c . A incorporação da parcela adicional na Equação 1 resulta em uma integral avaliada a partir da propriedade da filtragem da função Delta de Dirac:

$$\int_{\Gamma} U_{\ell k}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^c) F_k(\mathbf{x}^c) d\Gamma = U_{\ell k}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^c) F_k(\mathbf{x}^c) \quad (8)$$

Portanto, a força concentrada é contabilizada pela avaliação da solução fundamental $U_{\ell k}^*$ entre o ponto de colocação e o ponto da carga. Destaca-se que essa parcela não deve ser incorporada quando o ponto de colocação e o ponto da carga estejam em sub-domínios distintos. A aplicação da Equação 8 para todos os pontos de colocação resulta no vetor \mathbf{b}^c , e contribui ao sistema no vetor do lado direito. Desse modo, o sistema algébrico resultante assume o formato $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{b}^c$. Para cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos, o vetor \mathbf{b}^c deve ser calculado considerando o ponto fonte interno ao domínio.

Já para a imposição de deslocamentos prescritos pontuais \bar{u}_k^c , a reação de apoio associada se torna uma incógnita adicional. Por outro lado, dado que o deslocamento pontual é conhecido, é possível escrevê-lo em função dos deslocamentos ao longo da superfície NURBS, como:

$$\bar{u}_k^c(\xi^c, \eta^c) = \sum_{i=1}^{n(P^c)} \sum_{j=1}^{m(P^c)} S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) d_k^{con(i,j,P^c)} \quad (9)$$

em que ξ^c e η^c são as coordenadas paramétricas do ponto carga. Nesse sentido, o rearranjo do sistema algébrico para contabilizar a presença de deslocamentos prescritos pontuais se torna:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}^c \\ \mathbb{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

em que para cada ponto com deslocamento prescrito aplicado, é acrescida uma linha à sub-matriz \mathbb{S} com base no apresentado na Equação 9. Já as contribuições oriundas da parcela $U_{\ell k}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^c)$ são incorporadas à matriz de coeficientes do sistema na sub-matriz \mathbf{A}^c , trocando seu respectivo sinal. O sub-vetor \mathbf{F} incorpora as reações incógnitas, e $\bar{\mathbf{u}}$ se refere aos valores de deslocamentos pontuais prescritos. A influência dos apoios concentrados nos campos mecânicos internos é efetuada de forma análoga à força concentrada, agora utilizando a reação de apoio resultante da resolução do sistema algébrico.

4 Exemplo de aplicação

A validação da formulação apresentada no presente trabalho é efetuada por um exemplo de aplicação. Para tanto, analisa-se mecanicamente a metade de um tronco de cone, em que geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 1(a). As propriedades mecânicas dos dois materiais existentes são: $E_1 = 1.000,0$ (unidades de tensão), $\nu_1 = 0,00$, $E_2 = 2.000,0$ (unidades de tensão) e $\nu_2 = 0,30$. A força $\mathbf{F}_1 = \{0,0; 10,0; 50,0\}^T$ atua em

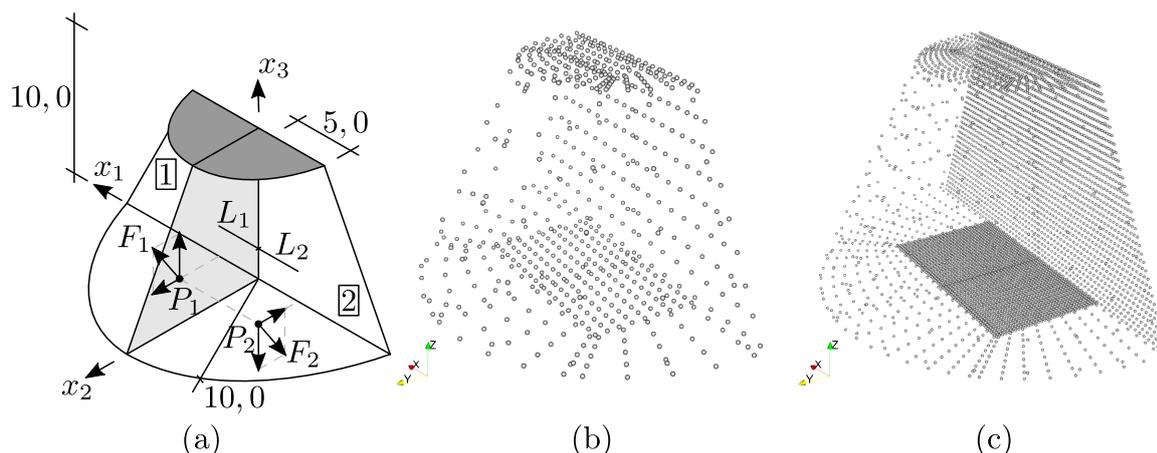


Figura 1. Geometria, condições de contorno e posição dos pontos de colocação do exemplo de aplicação.

$P_1 = (3,0; 3,0; 0,0)$ e $F_2 = -F_1$ é aplicada em $P_2 = (-3,0; 3,0; 0,0)$. Em cinza é destacada a interface, sobre a qual aderência perfeita é considerada entre os dois materiais, pela técnica de sub-regiões.

São utilizadas duas malhas isogeométricas para descrição de geometria e campos mecânicos do exemplo de aplicação, possuindo 18 superfícies NURBS de grau 2 nas duas direções. A primeira discretização, denominada Malha A e ilustrada na Figura 1(b) possui 624 pontos de controle e 674 pontos de colocação. Já a Malha B, Figura 1(c) contém 5440 pontos de controle e 5490 pontos de colocação. A análise foi efetuada em cerca de 50 segundos e 10 minutos, para as malhas A e B, respectivamente.

Um modelo numérico equivalente foi desenvolvido pelo MEF, no software *Ansys*[®]. A malha adotada, apresentada na Figura 2, possui 81.503 nós e 57.017 elementos sólidos tetraédricos e hexaédricos de aproximação quadrática (SOLID 186).

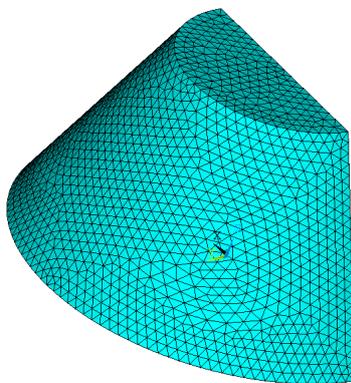


Figura 2. Malha do modelo em MEF do exemplo de aplicação.

O campo de deslocamentos determinados via MEC isogeométrico, é ilustrado na Figura 3, em cuja deformada é magnificada 100 vezes.

As respostas numéricas são confrontadas em termos de tensões no domínio do sólido. No contexto do MEC, tais dados são calculados como pós-processamento, a partir das respostas do contorno. Essa comparação é efetuada ao longo do segmento delimitado por $-5,0 \leq x_1 \leq 5,0$, $x_2 = 5,0$ e $x_3 = 5,0$. São utilizados 20 pontos internos espaçados em 0,5 unidades de comprimento na direção x_1 no modelo em MEC, sem considerar o ponto sobre $x_1 = 0,0$. Nesse cenário, a comparação das tensões normais e cisalhantes é apresentada na Figura 4.

Com base nos resultados apresentados na Figura 4, nota-se a convergência entre os resultados do MEC isogeométrico e o MEF com o refino da discretização adotada. Desse modo, é comprovada a validade da formulação apresentada para incorporação de condições de contorno concentradas no MEC isogeométrico tridimensional.

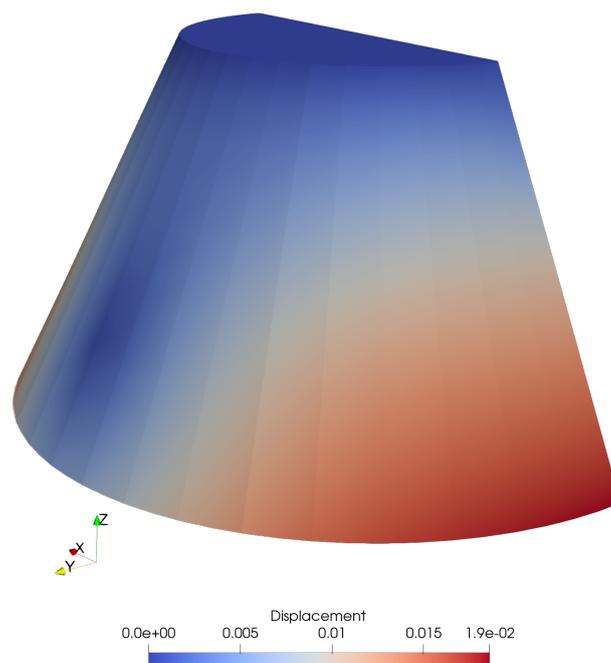


Figura 3. Campo de deslocamentos para a estrutura deformada, malha B.

5 Conclusões

Este trabalho propôs a incorporação das condições de contorno concentradas no Método dos Elementos de Contorno em sua abordagem isogeométrica. Tal abordagem considera a aproximação da geometria e dos campos mecânicos por meio de superfícies NURBS, de modo a melhorar a representação dessas grandezas devido à melhor capacidade de representação de geometrias complexas por essa parametrização. As forças concentradas foram incorporadas ao campo mecânico de forças de superfície com auxílio da função Delta de Dirac. Essa proposta permitiu que a influência de forças concentradas fosse contabilizada com uma simples adição ao vetor do lado direito. Para apoios concentrados, foi necessário introduzir equações de compatibilidade, já que as forças se tornam incógnitas do problema. A precisão da formulação discutida foi apresentada por meio de um exemplo numérico, confrontado com um modelo equivalente em elementos finitos. Dessa forma, foi demonstrada a incorporação de uma idealização mecânica comum na engenharia estrutural para o MEC isogeométrico, o que permite a análise mecânica de geometrias complexas a partir de uma formulação robusta e mais completa.

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e com suporte principal do processo nº 2019/18795-6, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Simpson, R. N., Bordas, S. P., Trevelyan, J., & Rabczuk, T., 2012. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 209, pp. 87–100.
- [2] Simpson, R. N., Bordas, S. P., Lian, H., & Trevelyan, J., 2013. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2d implementation aspects. *Computers & Structures*, vol. 118, pp. 2–12.
- [3] Cordeiro, S. G. F. & Leonel, E. D., 2018. Mechanical modelling of three-dimensional cracked structural components using the isogeometric dual boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 63, pp. 415–444.

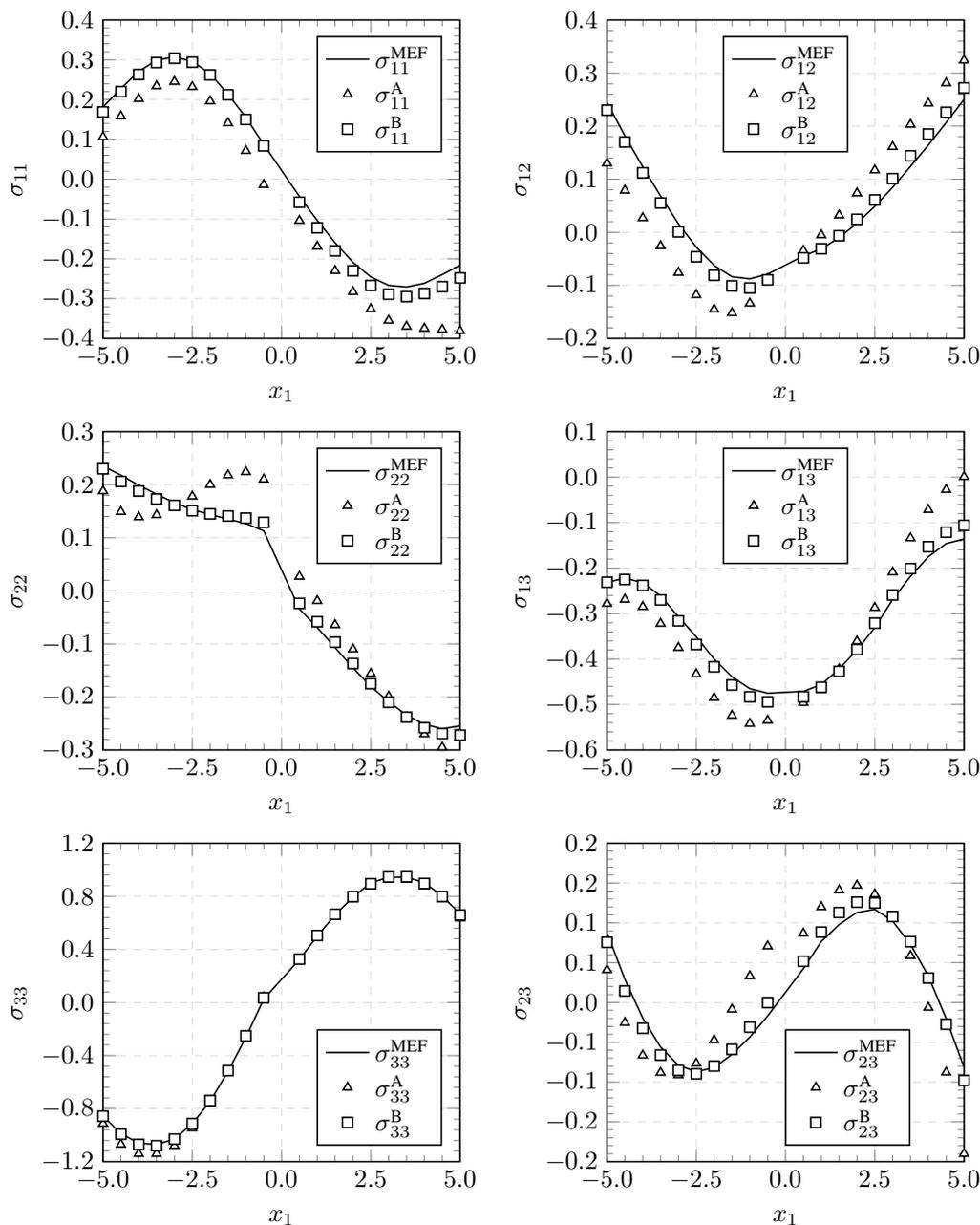


Figura 4. Componentes cartesianas de tensão: MEC isométrico e MEF.

- [4] Brebbia, C. A., 1980. *The boundary element method for engineers*. Number BOOK. Pentech press.
- [5] Aliabadi, M. H., 2002. *The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures*, volume 2. John Wiley & Sons.
- [6] Guiggiani, M. & Gigante, A., 1990. A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, n. 4, pp. 906–915.
- [7] Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y., 2009. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons.
- [8] Piegl, L. & Tiller, W., 2012. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media.
- [9] Greville, T., 1964. Numerical procedures for interpolation by spline functions. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis*, vol. 1, n. 1, pp. 53–68.
- [10] Rizzo, F. & Shippy, D., 1968. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 4, n. 12, pp. 1161–1179.