

# O Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta e Técnica de Superposição de Domínio aplicado a problemas de Helmholtz em meios suavemente heterogêneos

H. M. Barcelos<sup>1</sup>, C. F. Loeffler<sup>2</sup>, L. O. C. Lara<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO  
Av. Nossa Sra. Das Graças, 50 - Xerém, Duque de Caxias, 25250-020, Rio de Janeiro, Brasil  
engercules@gmail.com*

<sup>2</sup>*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, UFES  
Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras, Vitória, 29075-910, Espírito Santo, Brasil  
loefflercarlos@gmail.com, castrolara@hotmail.com*

**Abstract.** This paper presents the coupling between the Direct Interpolation Boundary Element Method (DIBEM) and the Domain Superposition Technique (DST) addressing problems governed by the inhomogeneous Helmholtz's Equation. Specifically, here are approached cases in which the constitutive medium property varies smoothly according to a known function. As the constitutive properties can be located in piecewise sectors, the Domain Superposition Technique (DST) is used as a way to compute the different properties, preserving the particularities of the Boundary Elements Method (BEM). Inhomogeneous problems are usually solved by domain numerical techniques, but using the DIBEM formulation the domain integral generated by the non-homogeneity of the medium can be accurately transformed into a boundary integral. Numerical tests are implemented in two-dimensional problems, with regular and irregular domains, imposing, in the latter case, numerical difficulties on the proposed method. Simulations using the Finite Element Method are used to generate the reference solutions.

**Keywords:** Boundary Element Method, Inhomogeneous Helmholtz's Problems, Direct Interpolation Boundary Element Method, Domain Superposition Technique, Radial Basis Functions.

## 1 Introdução

Existem muitos esforços despendidos na obtenção de formulações mais abrangentes, as quais podem tornar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) uma alternativa atraente para resolver alguns problemas que são preferencialmente abordados por técnicas de domínio. Problemas importantes, nos quais a propriedade física varia espacialmente de acordo com uma função conhecida ou estimada, como: percolação ou difusão em meios porosos, análise de fluxo de lubrificantes em mancais hidrodinâmicos e também a transferência de calor em materiais com gradação funcional.

Em trabalho recente [1], foi apresentada uma nova abordagem do MEC para resolver problemas de Laplace suavemente heterogêneos, usando duas técnicas inovadoras do MEC: o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) e a Técnica de Superposição de Domínio (TSD). Essas técnicas permitem que as variações de propriedades em cada setor sejam representadas exclusivamente por quantidades nodais de contorno e sejam facilmente computadas em um sistema matricial que representa o domínio como um todo.

O MECID [2] é uma técnica que utiliza funções de base radial [3] para aproximar o núcleo das integrais de domínio, colaborando com a conversão do domínio para o contorno. É semelhante à técnica de Dupla Reciprocidade (MECDR) [4], mas é conceitualmente mais simples. O MECID foi aplicado com sucesso em trabalhos anteriores [5-7]. Também não é tão restritivo em relação ao tipo de função radial utilizada, apesar de muitas funções utilizadas na formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) sem malha [8,9] não serem

eficazes [10]; considerando as poucas informações fornecidas pela literatura [11], o MECID também funciona melhor em problemas tridimensionais [12].

No que diz respeito a problemas homogêneos por partes, a principal técnica do MEC para abordar esse tipo de problema é a bem conhecida Técnica de Sub-região (TSR) [13]. Sua ideia, inicialmente exposta por Rizzo e Shippy [14], é simples e robusta, o que justificou, que por muitos anos relativamente poucos modelos foram propostos como uma alternativa eficaz à abordagem TSR. Porém, mais recentemente, destacam-se os trabalhos de Cavalcanti e Telles [15,16] e Luiz e Telles [17,18] que utilizam uma ideia baseada na superposição de uma heterogeneidade média do material e seu desvio, utilizando células internas para resolver integrais de domínio.

Loeffler e Mansur [19] apresentaram uma nova técnica do MEC focada em problemas homogêneos por partes, denominada Técnica de Superposição de Domínios (TSD).

O princípio da TSD é completamente diferente da TSR e outros; o problema por partes é modelado como uma superposição de um domínio completo homogêneo e outros subdomínios com propriedades diferentes. Particularmente, os princípios de energia apoiam o procedimento proposto e todos os setores são matematicamente conectados por meio de coeficientes de influência [20]. Deve-se enfatizar que o objetivo da TSD está implícito na abordagem MECDR para resolver o problema de Poisson com distribuição setorial de fontes, conforme exposto por Loeffler e Mansur [21]. Aplicações bem-sucedidas da TSD podem ser encontradas em trabalhos anteriores [22,23].

Neste trabalho, as frequências naturais são obtidas por solução dos problemas de autovalor em meios suavemente heterogêneos, dado pelo problema de Helmholtz em duas dimensões. A propriedade dentro de cada setor será representada por uma função suavemente heterogênea. O DIBEM e o DST já foram associados recentemente, resolvendo frequências naturais em casos bidimensionais e tridimensionais com domínios por partes [24], mas nesses trabalhos a propriedade dentro de cada setor é considerada homogênea.

Considerando a complexidade do problema, não há solução analítica, portanto as soluções de referência são fornecidas pelo Método dos Elementos Finitos.

## 2 Equação de Governo e o desenvolvimento do MEC com TSD

A equação de governo abordada neste trabalho envolve o problema de Helmholtz em meios suavemente heterogêneos por partes, sendo representada por [25]:

$$[K(X)u_i(X)]_i = -w^2\rho(X)u(X). \quad (1)$$

Na Eq. (1),  $K(X)$  representa a difusividade ou rigidez, enquanto  $\rho(X)$  representa a densidade do material;  $K(X)$  e  $\rho(X)$  serão consideradas funções suaves e isotrópicas, válidas no domínio completo  $\Omega(X)$ ; não haverá fontes nesse modelo; e  $u(X)$  é a amplitude espacial da resposta do sistema estacionário à excitação harmônica, com frequência  $w$ .

Considerando procedimentos matemáticos bem conhecidos de MEC, usando uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$ , que é a solução fundamental de Poisson estacionária, a forma integral forte da Equação de Helmholtz pode ser considerada:

$$\int_{\Omega(X)} [K(X)u_i(X)]_i u^*(\xi; X) d\Omega(X) + w^2 \int_{\Omega(X)} \rho(X)u(X)u^*(\xi; X) d\Omega(X) = 0. \quad (2)$$

Por conveniência, para apresentar as características da TSD, é assumido um domínio arbitrário composto por duas regiões com propriedades físicas distintas, como mostra a Fig. 1. Assim, o domínio completo  $\Omega(X)$  é composto pela soma dos domínios  $\Omega(X)^{sur}$  (sobrescrito “sur” significa domínio circundante) e  $\Omega(X)^{int}$  (sobrescrito “int” significa domínio interno);  $K(X)^{sur}$ ,  $K(X)^{int}$ ,  $\rho(X)^{sur}$  e  $\rho(X)^{int}$  são propriedades físicas, presume-se que variem suavemente, obedecendo a uma função conhecida dentro de cada domínio, agora definida de acordo com a convenção mencionada.

A Eq. (2) pode ser reescrita com base no conceito de divisão de domínio descrito anteriormente, ou seja:

$$\int_{\Omega(X)} \{ [K(X)^{sur}u_i(X)]_i + w^2\rho(X)^{sur}u(X) \} u^*(\xi; X) d\Omega(X) = \int_{\Omega(X)^{int}} \{ [\bar{K}(X)^{int}u_i(X)]_i + w^2\bar{\rho}(X)^{int}u(X) \} u^*(\xi; X) d\Omega(X)^{int}. \quad (3)$$

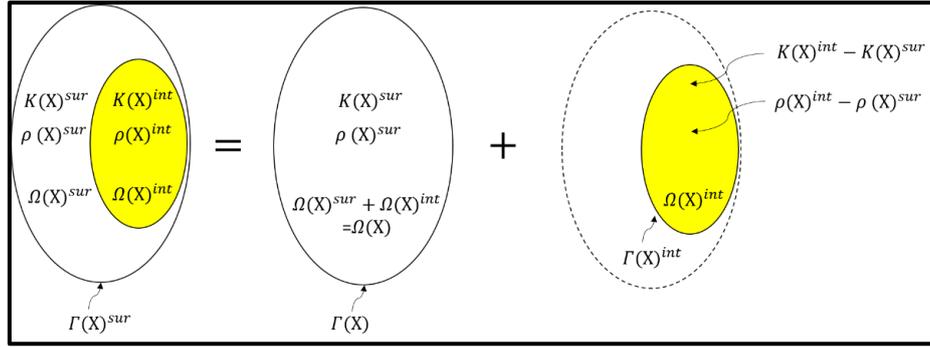


Figura 1. Representação da Técnica de Superposição de Domínios.

Supondo que  $\bar{K}(X)^{int} = K(X)^{sur} - K(X)^{int}$  e  $\bar{\rho}(X)^{int} = \rho(X)^{sur} - \rho(X)^{int}$  e considerando procedimentos matemáticos bem conhecidos do MEC, incluindo a aplicação do Teorema da Divergência, a seguinte equação integral pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
 & c(\xi)u(\xi)K(\xi)^{sur} + \int_{\Gamma(X)} u(X)K(X)^{sur} q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma(X)} q(X)K(X)^{sur} u^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \\
 & \int_{\Omega(X)} u(X)K_{,i}(X)^{sur} u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega(X) - w^2 \int_{\Omega(X)} \rho(X)^{sur} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega(X) = c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi)^{int} + \\
 & \int_{\Gamma(X)^{int}} u(X)\bar{K}(X)^{int} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{int} - \int_{\Omega(X)^{int}} u(X)\bar{K}_{,i}(X)^{int} u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega(X)^{int} - \\
 & w^2 \int_{\Omega(X)^{int}} \bar{\rho}(X)^{int} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega(X)^{int}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Na Eq. (4)  $q(X)$  é a derivada normal do potencial escalar e  $q^*(\xi; X)$  é a derivada normal da solução fundamental. A Eq. (4) também contém quatro integrais de domínio, duas referentes ao domínio circundante e duas referentes ao subdomínio interno. Para ambas as regiões, em cada par de integrais de domínio, uma parcela diz respeito à variação das propriedades constitutivas e a outra refere-se ao efeito de inércia. Todas essas integrais de domínio serão transformadas em integrais de contorno por meio do MECID.

### 3 Formulação Integral MECID

De acordo com os fundamentos do MECID, todo o núcleo da integral do domínio é aproximado usando um conjunto de funções de base radial. Assim, uma singularidade surge na Eq. (4) quando o ponto fonte e o ponto campo são coincidentes. Por evitar essa singularidade nos dois lados da Eq. (4), é implementada uma estratégia que consiste em adicionar duas integrais que se auto-compensam, sendo chamada de procedimento de regularização, uma vez que se baseia no conceito apresentado por Hadamard [26].

Assim, a Eq. (4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & -u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{sur}} K(X)^{sur} q^*(\xi; X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma(X)^{sur}} u(X)K(X)^{sur} q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \\
 & \int_{\Gamma(X)^{sur}} q(X)K(X)^{sur} u^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Omega(X)^{sur}} [u(X) - u(\xi)]K_{,i}(X)^{sur} u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega(X) - \\
 & w^2 \int_{\Omega(X)^{sur}} [\rho(X)^{sur} u(X) - \rho(\xi)^{sur} u(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega(X) - w^2 \rho(\xi)^{sur} u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{sur}} G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) d\Gamma(X) = \\
 & -u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{int}} \bar{K}(X)^{int} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{int} + \int_{\Gamma(X)^{int}} u(X)\bar{K}(X)^{int} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{int} - \int_{\Omega(X)^{int}} [u(X) - \\
 & u(\xi)]\bar{K}_{,i}(X)^{int} u_{,i}^*(\xi; X) d\Omega(X)^{int} - w^2 \int_{\Omega(X)^{int}} [\bar{\rho}(X)^{int} u(X) - \bar{\rho}(\xi)^{int} u(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega(X)^{int} - \\
 & w^2 \bar{\rho}(\xi)^{int} u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{int}} G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) d\Gamma(X)^{int}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Com o objetivo de converter a integral do domínio em uma integral de contorno, o procedimento MECID utiliza uma função de base radial primitiva  $\Psi^j(X^j; X)$  relacionada à função de interpolação  $F^j(X^j; X)$ . Onde a distância euclidiana  $r(X^j; X)$ , caracteriza as posições dos pontos de base  $X^j$  em relação aos pontos de campo genéricos  $X$ .

Em trabalho anterior [1], onde o problema de Laplace setorialmente heterogêneo foi abordado, todas as etapas matemáticas são apresentadas com ainda mais detalhes. De modo que, todos os termos nas equações governantes são compostos apenas por integrais de contorno, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & -u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{sur}} K(X)^{sur} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{sur} + \int_{\Gamma(X)^{sur}} u(X) K(X)^{sur} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{sur} - \\
 & \int_{\Gamma(X)^{sur}} q(X) K(X)^{sur} u^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{sur} - \int_{\Gamma(X)^{sur}} \xi^i \alpha^j \eta^j(X^i; X) d\Gamma(X)^{sur} - \\
 & w^2 \int_{\Gamma(X)^{sur}} \xi^i \beta^j \eta^j(X^i; X) d\Gamma(X)^{sur} - w^2 \rho(\xi)^{sur} u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{sur}} G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) d\Gamma(X)^{sur} = \\
 & -u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{int}} \bar{K}(X)^{int} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{int} + \int_{\Gamma(X)^{int}} u(X) \bar{K}(X)^{int} q^*(\xi; X) d\Gamma(X)^{int} - \\
 & \int_{\Gamma(X)^{int}} \xi^i \bar{\alpha}^j \eta^j(X^i; X) d\Gamma(X)^{int} - w^2 \int_{\Gamma(X)^{int}} \xi^i \bar{\beta}^j \eta^j(X^i; X) d\Gamma(X)^{int} - \\
 & w^2 \bar{\rho}(\xi)^{int} u(\xi) \int_{\Gamma(X)^{int}} G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) d\Gamma(X)^{int}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Onde  $G^*(\xi; X)$  é o Tensor de Galerkin e  $\xi^i \alpha^j$  e  $\xi^i \beta^j$  coeficientes de influência.

Usando uma álgebra adequada, têm-se matrizes unidas em uma matriz inercial [M] e o sistema discreto completo é dado por:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \tag{7}$$

## 4 Experimentos numéricos

O modelo proposto resolve dois exemplos de autovalores. Os dados numéricos correspondem às frequências naturais, e a avaliação da precisão é feita por comparação com os resultados obtidos com o MEF, usando malhas mais finas com elementos finitos lineares isoparamétricos. Nas simulações aqui realizadas, devido ao seu bom desempenho em diversas aplicações com o MEC [7, 10], é utilizada a função de base radial  $r^2(X^i, X) \ln r(X^i, X)$  e considerando o suporte completo. O erro relativo será representado por ER% nos gráficos.

### 4.1 Primeiro Exemplo

A Figura 2 mostra as características do primeiro exemplo que consiste em uma folha fina com cantos acentuados no contorno. Para esse problema, ao longo da linha horizontal inferior, são aplicadas condições nulas de Dirichlet; em todas as outras partes da fronteira, condições nulas de Newman são prescritas.

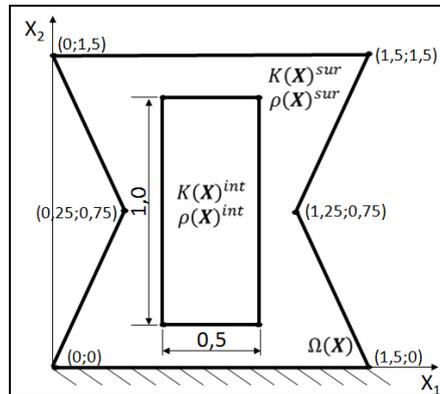


Figura 2. Modelo heterogêneo do primeiro exemplo.

As características da rigidez e massa específica do domínio podem ser coletadas na Tabela 1.

Os erros percentuais relativos obtidos com as três malhas MECID é mostrado na Fig. 3. Os valores da frequência natural são discretos; eles são unidos por linhas retas para facilitar a visualização dos resultados. Pode-se notar uma melhoria sucessiva nos resultados com o refinamento da malha e inserção de pontos internos, buscando um nível satisfatório de erros. A malha de elementos finitos usada aqui para avaliar a precisão das frequências naturais calculadas possui 5730 elementos lineares triangulares e 2978 nós.

Tabela 1. Rigidez e densidade correspondente ao modelo heterogêneo do primeiro exemplo.

Domínio	Rigidez	Gradiente de Rigidez		Densidade
Envolvente	$K(X)^{sur} = (x_2 - 3)^2$	$\frac{\partial K(X)^{sur}}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial K(X)^{sur}}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3)$	$\rho^{sur}(X) = 1$
Interno	$K^{int}(X) = 0,1(x_2 - 3)^2$	Não exigido	Não exigido	$\rho^{int}(X) = 0,1$
	$\bar{K}^{int}(X) = 0,9(x_2 - 3)^2$	$\frac{\partial \bar{K}^{int}(X)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial \bar{K}^{int}(X)}{\partial x_2} = 1,8(x_2 - 3)$	$\bar{\rho}^{int}(X) = 0,9$

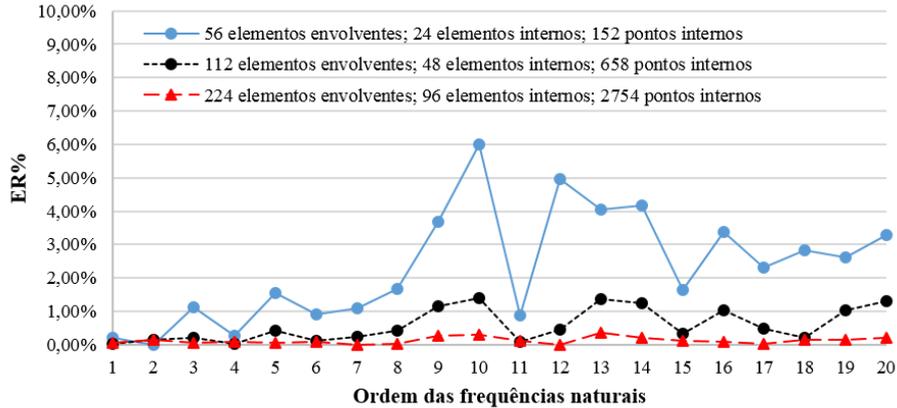


Figura 3. Curva de erro do MECID com FBR placa fina.

O efeito do refinamento da malha produziu uma redução na curva de erro relativo em praticamente toda a faixa de frequência examinada. Assim, os resultados alcançados podem ser considerados satisfatórios.

Como esperado, o nível de erros aumenta para frequências mais altas [12]. Esse fenômeno no MECID é bem compreendido, uma vez que sempre são esperadas algumas variações na precisão de certas frequências quando a posição dos pontos de interpolação é alterada. Além disso, o arranjo dos pontos de interpolação internos em cada malha é alterado e não pode ser apropriado para uma descrição precisa de certos modos de vibração e, conseqüentemente, de suas frequências associadas.

#### 4.2 Segundo Exemplo

No segundo exemplo resolve-se o problema de autovalor em uma estrutura bidimensional similar a um pórtico, contendo dois domínios internos, onde o primeiro  $\Omega(X)^{int1}$  apresenta uma função suave de rigidez e o segundo  $\Omega(X)^{int2}$  corresponde a um vazio. Observe o modelo deste exemplo na Fig. 4. As condições nulas de Dirichlet prescritas são aplicadas na linha horizontal inferior. Todos os outros contornos são submetidos a condições nulas de Neumann.

As características da rigidez e massa específica do domínio podem ser coletadas na Tabela 2.

Como no primeiro exemplo, três malhas foram usadas e o número de pontos nodais no contorno externo e interno é aumentado, assim como a quantidade de pontos base no interior. A malha de Elementos Finitos usada aqui para avaliar a precisão das frequências naturais calculadas possui 3700 elementos lineares triangulares e 2022 nós.

Os resultados de erro percentual para as três malhas são apresentados no gráfico mostrado na Fig. 5.

Como observado no exemplo anterior, há uma redução sucessiva nos valores da curva de erro percentual com o refinamento da malha e a inserção de pontos internos. Comparativamente ao exemplo anterior, a qualidade dos resultados foi pior, mas esse comportamento era esperado, pois as características geométricas mais pronunciadas do segundo exemplo produzem efeitos numéricos mais prejudiciais. O quociente entre a fronteira e o domínio também é claramente desfavorável à análise MEC.

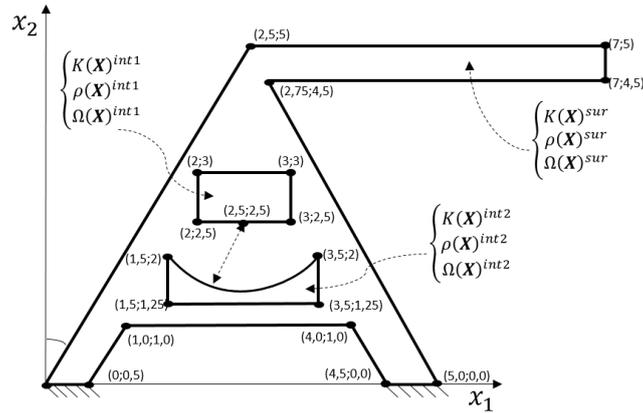


Figura 4. Modelo heterogêneo do segundo exemplo.

Tabela 2. Rigidez e densidade correspondente ao modelo heterogêneo do segundo exemplo.

Domínio	Rigidez	Gradiente de Rigidez		Densidade
Envolvente	$K(X)^{sur} = (x_2 - 3)^2$	$\frac{\partial K(X)^{sur}}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial K(X)^{sur}}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3)$	$\rho^{sur}(X) = 3$
Interno 1	$K^{sur}(X) = 1 + 0,5x_2$	$\frac{\partial K^{sur}(X)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial K^{sur}(X)}{\partial x_2} = 0,5$	$\rho^{int1}(X) = 1,5$
	$K^{int1}(X) = 1,618e^{(x_1/x_2)} + 0,5e^{(x_2/2)}$	Não exigido	Não exigido	$\bar{\rho}^{int1}(X) = 1,5$
Interno 2	$\bar{K}^{int1}(X) = 1 + 0,5x_2 - (1,618e^{(x_1/x_2)} + 0,5e^{(x_2/2)})$	$\frac{\partial \bar{K}^{int1}(X)}{\partial x_1} = -1/x_2 (1,618e^{(x_1/x_2)})$	$\frac{\partial \bar{K}^{int1}(X)}{\partial x_2} = 0,5 - \left\{ -x_1/x_2^2 [1,618e^{(x_1/x_2)}] + 1/2 [0,5e^{(x_2/2)}] \right\}$	$\rho^{int2}(X) = 0$
	$K^{int2}(X) = 0$	Não exigido	Não exigido	$\bar{\rho}^{int2}(X) = 3$

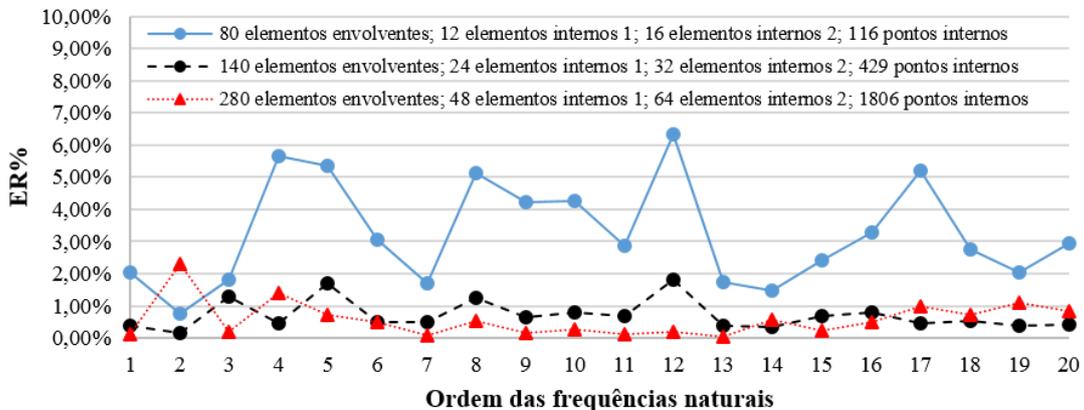


Figura 5. Curva de erro do MECID com FBR placa fina.

## 5 Conclusões

O objetivo de aplicar o MEC para resolver problemas preferencialmente abordados por métodos de domínio, utilizando técnicas de novas e mais abrangentes de contorno, foi alcançado. Os resultados obtidos com o MECID associado a TSD para resolver problemas bidimensionais de autovalor envolvendo meios heterogêneos podem ser considerados satisfatórios. As dificuldades numéricas impostas pelos problemas devem ser levadas em consideração, pois sua geometria apresenta irregularidades e formas delgadas. Essas dificuldades são ampliadas especialmente na análise dinâmica, onde a qualidade das frequências calculadas está fortemente relacionada à capacidade do modelo numérico de representar adequadamente a conformação geométrica elaborada associada aos modos de vibração mais altos.

Esse fator aparece claramente nos três exemplos resolvidos: certos modos de vibração não podem ser adequadamente representados para um determinado arranjo de pontos de interpolação. Como a posição dos

pontos de interpolação internos precisa ser alterada se a malha de contorno for refinada, uma oscilação na curva de erro percentual das frequências é esperada.

**Agradecimentos.** Os autores agradecem à colaborações das instituições INMETRO e UFES pelo apoio à pesquisa.

**Declaração de autoria.** Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído como parte do presente trabalho é de propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

## Referências

- [1] H. M. Barcelos, C. F. Loeffler. The direct interpolation boundary element method applied to smoothly inhomogeneous Laplace's problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 105, n. 1, p. 155-164, 2019.
- [2] C. F. Loeffler, A. L. Cruz, A. Bulcão. Direct Use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 50, n.1, p. 97-108, 2015.
- [3] M. D. Buhmann. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, Giessen, 2003.
- [4] D. Nardini, C. A. Brebbia. *Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method*. In: C.A. Brebbia ed, *Proceedings of BEM*, p. 719-730, 1983.
- [5] C. F. Loeffler, H. M. Barcelos, W. J. Mansur, A. Bulcão. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 61, p. 218-225, 2015.
- [6] C. F. Loeffler, P. V. M. Pereira, L. O. C. Lara, W. J. Mansur. Comparison between the formulation of the boundary element method that uses fundamental solution dependent of frequency and the direct radial basis boundary element formulation for the solution of Helmholtz problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 79, p. 81–87, 2017.
- [7] C. F. Loeffler, A. L. C. Frossard, L. O. C. Lara. Testing complete and compact radial basis functions for solution of eigenvalue problems using the boundary element method with direct integration. *Int J Comput Methods Eng Sci Mech*, v. 19, n. 2, p. 117–128, 2018.
- [8] S. N. Atluri, T. L. Zhu. *New Concepts in Meshless Methods*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v. 47, p. 537-556, 2000.
- [9] J. G. Wang, G. R. Liu. A Point Interpolation Meshless Method based on Radial Basis Functions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v.54, p. 1623-1648, 2002.
- [10] C. F. Loeffler, L. Zamprogno, W. J. Mansur, A. Bulcão. Performance of compact radial basis functions in the direct interpolation boundary element method for solving potential problems. *CMES*, 113 (3), p. 387–412, 2017.
- [11] F. R. Bueno, P. W. Partridge. A study of dual reciprocity for three dimensional models applied to the Solution of Pennes Bioheat Equation, In: *Proceedings of XII BETEQ, Albuquerque and Aliabadi Edit.*, Brasília, p. 182-189, 2011.
- [12] J. P. Barbosa, C. F. Loeffler, L. O. C. Lara. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 108, p. 295-300, 2019.
- [13] C. A. Brebbia, J. Dominguez. *Boundary elements – an introductory course*. WIT Press; 1992.
- [14] F. J. Rizzo, D. J. Shippy. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *Int. J. Solids and Structures*, v. 4, n.12, p. 1161-1179, 1968.
- [15] M. C. Cavalcanti, J. C. F. Telles. Biot's consolidation theory - application of BEM with time independent fundamental solutions for poro-elastic saturated media. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 27, n.1, p. 145-157, 2003.
- [16] J. C. F. Telles. *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.
- [17] T. F. Luiz, J. C. F. Telles. Application of the Boundary Element Method to Three-Dimensional Potential Problems in Heterogeneous Media. *Computational Mechanics*, 42, p. 431-440, 2008.
- [18] T. F. Luiz, L. S. Miers, J. C. F. Telles. An Application of the OMLS Method to Domain Integrals of Potential Problems in Heterogeneous Media. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 34, p. 920-926, 2010.
- [19] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 71, p.169-173, 2016.
- [20] L. O. C. Lara, C. F. Loeffler, J. P. Barbosa, W. J. Mansur. The technique of domain superposition to solve piecewise homogeneous elastic problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 94, p. 1-9, 2018.
- [21] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. New General Boundary Element Approach for solving Problems with Domain Forces (in portuguese) In: *Proceedings of VIII Congresso Latino Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, 1987, Rio de Janeiro: PUC/ RJ, 1987, v. B. p. 347-362.
- [22] C. F. Loeffler, J. P. Barbosa, H. M. Barcelos. Performance of BEM superposition technique for solving sectorially heterogeneous Laplace's problems with non-regular geometry. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 93, p. 105-111, 2018.
- [23] J. P. Barbosa, L. O. C. Lara, C. F. Loeffler. The Domain Superposition Technique for solving three-dimensional piecewise homogeneous Laplace Problems. *Int. J. Solids and Structures*, v. 199, p. 85-94, 2020.
- [24] J. P. Barbosa, C. F. Loeffler. Application of Boundary Element Method superposition technique for solving natural frequencies in piecewise homogeneous domains. *Comput. Math. with Applications*, 79, p. 1131–1144, 2020.
- [25] K. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. New York Dover Publications, 1991.
- [26] R. V. Pessolani. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *J Braz Soc Mech Sci.*, 24(1), p. 23–45, 2002.