

BE analysis of composite bars having generic cross sections and variable rigidity subjected a nonuniform torsion

Maicon José Hillesheim

maicon@unemat-net.br

Universidade do Estado do Mato Grosso, Ph.D. student at Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Nove, nº 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Gabriel ViecelliRenostro

viecellieng@gmail.com

Sc. M. student at Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Nove, nº 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Francisco Célio de Araújo

dearaujofc@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Nove, nº 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Abstract. In this paper, a robust and efficient algorithm is presented to solve composite bars with variable cross-section and subjected to nonuniform torsion. The bar may be subjected to concentrated or distributed twist loads and is under general boundary (end) conditions. Torsion problems are often encountered in engineering practice as in members of spatial frames, in curved bridges, in rigid building cores, etc.. In this class of problem, the warping of a given cross section is described by the known Laplace/Poisson equation, while the angle of twist along the beam is described by a fourth-order differential equation with variable coefficients. In the present strategy, the boundary-element subregion-by-subregion (BE SBS) technique, developed in previous works, is employed to solve the coupled boundary-value problems (BVPs) related to the cross section. An important detail of the BE SBS technique is the use of Krylov iterative solvers, which allows the elimination of operations with the large blocks of zeroes existing in the coupled system of equations. For the solution of the global differential equation of equilibrium in the beam, which describes the angle of twist along the beam, a strategy based on the weighted residual method is developed. Complex composite cross sections under torsion are analyzed to show the performance of the whole solution process.

Keywords: Nonuniform torsion problems; bars with generic composite cross-sections; generic subregioning technique.

1 Introdução

Grande parte das estruturas de engenharia civil são compostas de sistemas espaciais reticulados, cuja solução se dá por meio do Método da Rigidez Direta (MRD). Em pórticos espaciais, barras submetidas a esforço torcional decorrente da iteração com as demais barras que compõe a estrutura estão presentes na grande maioria dos casos, e estão sujeitas às mais diversas condições de contorno e de carregamento. Para esses casos, a taxa de deslocamento angular ao longo do eixo da barra deixa de ser constante, e então a barra está submetida ao que se denomina torção não uniforme. Para análise de barras submetidas a torção não-uniforme, três problemas de valor de contorno são considerados no presente trabalho: PVC (1) equação diferencial parcial que descreve o empenamento primário, PVC(2) equação diferencial que descreve o empenamento secundário e PVC (3) equação diferencial ordinária que descreve o ângulo de torção ao longo da barra. O PVC (1) e PVC (2) são problemas descritos através da conhecida teoria do potencial, ou seja, correspondem às equações diferenciais parciais de Laplace/Poisson e são convenientemente solucionados empregando formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Outro aspecto relevante é que essas barras podem ter seção composta de diversos materiais e ainda variar ao longo do comprimento. Para tratar de heterogeneidade, uma estratégia robusta de sub-região é empregada e adaptada para o problema. Diversas pesquisas têm sido realizadas nos últimos anos buscando soluções, cada vez mais sofisticadas, para o problema da torção. Athanasiadis [01] em 1987, utiliza o MEC para analisar barras sujeitas a torção a partir da formulação de Saint-Venant, deduzida sob a consideração de que seções transversais das barras sofrem empenamento quando os elementos estão sob torção. Poucos anos posteriores, Sapountzakis [02, 03 e 04] utilizam também uma formulação baseada em MEC para solução da EDO correspondente ao PVC (3). A cerca do aprimoramento e aplicação do MEC, em 2003, Araújo et al. [5] apresentaram a primeira versão da BE SBS (*BE subregion-by-subregion* technique) baseada em solvers iterativos de Krylov, voltada para problemas de acústica dependente do tempo. É importante salientar que o uso dos solvers iterativos permitem dispensar o armazenamento e a manipulação de grandes blocos de zeros existentes nas matrizes do MEC quando se trabalha com várias sub-regiões. Durante anos, várias melhorias foram implementadas na técnica BE SBS, tais como aperfeiçoamento dos solvers empregados e técnicas de integração inerentes ao MEC. E por fim, em 2019, Araújo et al [6] aplicaram a técnica para o problema de valor de contorno associado ao empenamento primário, onde seções transversais com um grande número de sub-regiões foram analisadas, demonstrando a eficiência e robustez da técnica. No sentido de ampliar a capacidade de análise do Método da Rigidez Direta (MRD), um elemento de pórtico com 16 graus de liberdade por nó foi desenvolvido por Sapountzakis e colaboradores (citar aqui papers dele), levando em conta diversos efeitos, como deformações de cisalhamento, empenamento generalizado (shear lag effects) e efeitos devido as ambas a flexões e efeitos decorrentes da torção de forma acoplada. Os resultados das análises se mostraram bastante precisos. No presente trabalho, a BE-SBS é novamente empregada para resolver, além do PVC (1), o PVC (2), em que determina-se empenamento secundário de uma seção qualquer, Além disso uma formulação alternativa baseada no Método das Forças combinada com aproximação polinomial do bimomento é desenvolvida para obtenção da solução do PVP (3) e então, um elemento finito de barra é desenvolvido, onde são considerados os efeitos da torção não uniforme.

2 Descrição do problema da torção

Na formulação de Saint-Venant, o problema é analisado para uma seção transversal isolada da barra e o problema de elasticidade tridimensional é convertido em um problema bidimensional descrito pela equação diferencial de Laplace (1), referenciada ao centro de torção.

$$\nabla^2 \psi(xy) = 0, \quad (1)$$

sob a condições de contorno descrita pela equação (2),

$$p(\mathbf{x}) = \nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Em se tratando de barras com seção heterogênea e composta de diversos materiais, o centro de torção é desconhecido, demandando referenciar a barra em um sistema de referência global arbitrário \overline{XYZ} , paralelo ao sistema de referência com origem localizado no centro de torção XYZ , como é exemplificado na Figura 01

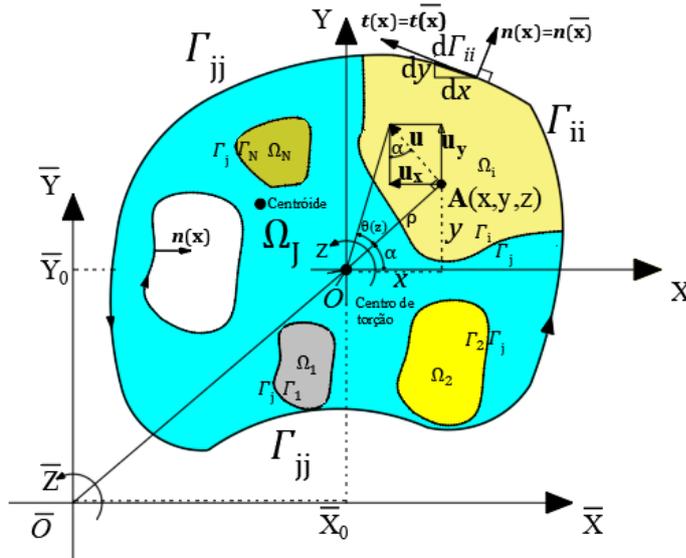


Figura 1: Componentes de deslocamentos de um ponto A(X,Y,Z) em uma seção arbitrária heterogênea. O campo de deslocamentos da equação (1) então é reescrito conforme equações (3),

$$\begin{aligned} u_x &= -\theta' \bar{z}(\bar{y} - \bar{y}_0), \\ u_y &= \theta' \bar{z}(\bar{x} - \bar{x}_0), \\ u_z &= \theta' \psi(\bar{x} - \bar{x}_0, \bar{y} - \bar{y}_0), \end{aligned} \quad (3)$$

onde θ' corresponde taxa de rotação por unidade de comprimento e $\psi(\bar{x} - \bar{x}_0, \bar{y} - \bar{y}_0)$ é a função de empenamento escrita em termos do sistema de referência $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$. O problema de valor de contorno é então descrito pelas equações (4)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\psi} &= 0, \text{ em } \bar{x} \in \Omega_i, i = 1, ns, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{n}} &= \bar{\mathbf{p}}_{ii} = \bar{\mathbf{x}} \mathbf{t}, \text{ em } \bar{x} \in \Gamma_{ii}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$G_i [\bar{\mathbf{p}}_{ij} - (\bar{\mathbf{x}} \mathbf{t}(\mathbf{x}))_{ij}] = G_j [\bar{\mathbf{p}}_{ji} - (\bar{\mathbf{x}} \mathbf{t}(\mathbf{x}))_{ji}], \text{ em } \bar{x} \in \Gamma_{ij},$$

idêntico ao problema de valor de contorno descrito pela equação (1), sob as condições de contorno da equação (2). A equação (5), relaciona as funções de empenamento estabelecidas nos dois sistemas de referência. Tem-se

$$\bar{\psi} = \psi + \bar{y}_0 \bar{x} - x_0 \bar{y} + c, \quad (5)$$

sendo ψ referenciado no centro de torção, O , e $\bar{\psi}$ referenciado em um ponto qualquer \bar{O} .

2.1 Torção não uniforme

Quando a barra possui restrição ao empenamento nas extremidades, como no caso da Figura 02, onde mostra um perfil I engastado em uma extremidade e submetido a um momento torçor em outra, a taxa de deslocamento angular $\theta'(z) = d\theta/dz$ deixa de ser constante e então está presente a curvatura torcional, caracterizando a torção não uniforme. Além disso, como o ângulo $\theta'(z)$, deixa de ser constante, ou seja, existe a derivada $\theta''(z)$, observa-se flexão das mesas, ocasionando tensões normais $\sigma_z \neq 0$. Vale salientar que além da restrição ao empenamento nas extremidades, variação da seção transversal ao longo do comprimento, e momento torçor distribuído, produzem torção não uniforme.

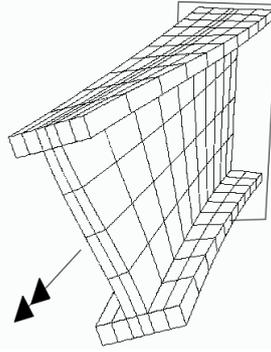


Figura 02 - Perfil I submetido a torção não uniforme

Para descrever matematicamente uma barra submetida a torção não uniforme, possibilitando uma análise quantitativa do fenômeno, inicia-se reescrevendo o campo de deslocamentos segundo as equações 25,

$$\begin{aligned} u_z(x, y, z) &= \theta'(z)\psi(x, y), \\ u_x(x, y, z) &= -x\theta(z), \\ u_y(x, y, z) &= y\theta(z), \end{aligned} \quad (06)$$

onde $\psi(x, y)$ é a função de empenamento referenciada no centro de torção. Para o caso da torção não uniforme, além das distorções de cisalhamento, existe a deformação normal, em que considerando o coeficiente de Poisson nulo, pode ser escrita conforme equação 26,

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \theta''(z)\psi(x, y), \quad (07)$$

aplicando -se a lei de Hook, tem-se a componente de tensão normal σ_z , equação 08

$$\sigma_z = E\theta''(z)\psi(x, y). \quad (08)$$

Levando -se em conta a equação 08, a equação de equilíbrio da Teoria da Elasticidade é escrita segundo a equação 09,

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (09)$$

em que introduzindo as tensões de cisalhamento da formulação de Saint-Venant, equações 10,

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= G_i\theta' \left(\frac{\partial \psi^p(x, y)}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zx} &= G_i\theta' \left(\frac{\partial \psi^p(x, y)}{\partial y} + x \right), \end{aligned} \quad (10)$$

e a tensão normal (equação 08), na equação 09, e fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se na relação expressa pela equação 11,

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{E\theta'''(z)}{G\theta'(z)}\psi(x, y), \quad (11)$$

onde $\theta'(z)$ e $\theta'''(z)$ são a primeira e a terceira derivada do ângulo de torção $\theta(z)$ a longo do comprimento. No entanto, deve-se notar que na equação 11, há uma inconsistência, pois no lado esquerdo da igualdade, as tensões dependem do empenamento, que é dependente apenas das coordenadas x e y , e no lado direito, tem-se $\theta'(z)$ e $\theta'''(z)$ dependentes da coordenada Z . Essa incompatibilidade é removida, conforme em Sapountzakis [03], dividindo-se as tensões τ_{zx} e τ_{zy} em duas parcelas, onde tem-se as tensões primárias (τ_{zx}^p e τ_{zy}^p) associadas ao empenamento de Saint-Venant $\psi^p(x, y)$, portanto dependentes apenas de x e y , e as tensões secundárias (τ_{zx}^s e

τ_{zy}^s), associadas ao empenamento secundário $\psi^s(x, y, z)$. Deste modo, a equação equilíbrio da teoria da elasticidade, equação 09, passa a ser reescrita no formato da equação 12,

$$\frac{\partial \tau_{zx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

A equação 12 então é dividida entre a equação 13,

$$\frac{\partial \tau_{zx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^p}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

e a equação 14,

$$\frac{\partial \tau_{zx}^s}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^s}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (14)$$

Onde substituindo-se as tensões primárias e secundárias, equações 10 e equações 15 respectivamente, e as tensões normais, equação 08,

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^s &= G \frac{\partial \psi^s(x, y, z)}{\partial x}, \\ \tau_{zy}^s &= G \frac{\partial \psi^s(x, y, z)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (15)$$

nas equações 13 e 14, chega-se ao conhecido problema de valor de contorno, equação 16, PVP (1),

$$\nabla^2 \psi^p = \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial y^2} = 0, \quad (16)$$

associada ao empenamento primário, sob as condições de contorno descritas pela equação 02, e o empenamento secundário, equação 17, PVP (2)

$$\nabla^2 \psi^s = \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial y^2} = -\frac{E \theta'''(z)}{G} \psi^p, \quad (17)$$

sob as condições de contorno dado pelas expressões 18,

$$\frac{\partial \psi^s}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (18)$$

A equação 17, como o termo do lado direito não é nulo, ela é também conhecida como equação diferencial parcial de Poisson.

2.2 Equilíbrio global da barra

A distribuição das tensões de cisalhamento primária e secundária são ilustradas na Figura 03.

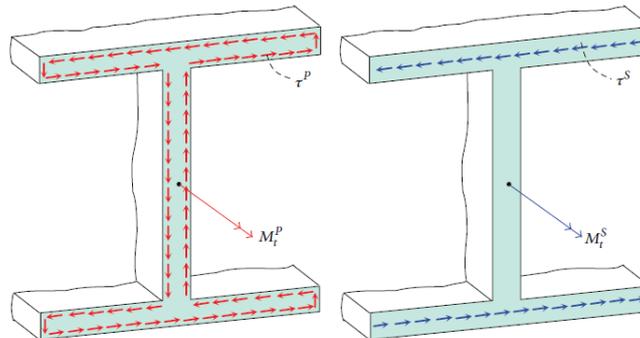


Figura 03 - Aspecto das tensões de cisalhamentos primárias e secundárias
Fonte: Sapontzakis [04]

Observando a Figura 03, sabe-se que o momento torçor atuando na seção transversal é obtido pela integral expressa na equação 19,

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) d\Omega, \quad (19)$$

e lembrando que as tensões de cisalhamento foram divididas entre tensões de cisalhamento primárias e tensões de cisalhamento secundárias, conseqüentemente tem-se o momento torçor composto também de duas parcelas: o momento primário M_p , e o momento torçor secundário M_s , relacionados conforme a equação 20,

$$M_t = M_p + M_s. \quad (20)$$

Com M_t^P sendo a parcela correspondente ao momento torçor primário, então escreve-se a equação 21,

$$M_p = \int_{\Omega} (\tau_{zy}^P x - \tau_{zx}^P y) d\Omega, \quad (21)$$

tem-se o momento torçor primário M_t^P sumarizado na equação 22, escrito em termos unidimensionais, apenas em função de z ,

$$M_p = GI_t \theta'. \quad (22)$$

Com relação ao momento torçor secundário, (equação 23),

$$M_s = \int_{\Omega} (\tau_{zy}^S x - \tau_{zx}^S y) d\Omega, \quad (23)$$

substituindo-se as equações 23 na equação 19, tem-se a equação 24,

$$M_s = \int_{\Omega} \left[x \left(G \frac{\partial \psi^S}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial \psi^S}{\partial y} \right) \right] d\Omega. \quad (24)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas usando a segunda identidade de Green, e chamando de constante de empenamento C_w , relação 25,

$$C_w = \int_{\Omega} \psi^p{}^2 d\Omega, \quad (25)$$

tem-se finalmente a parcela do momento torçor secundário, em termos da coordenada z apenas, conforme equação 26.

$$M_s = -EC_w \theta'''. \quad (26)$$

Como na torção não uniforme, as tensões normais $\sigma_z \neq 0$, embora os momentos fletores e esforços normais sejam nulos, sendo assim, uma grandeza chamada de bimomento é conceituada em decorrência da resultante de tensões normais ao longo da seção transversal, sendo avaliada de acordo com a expressão 27,

$$M_w = - \int_{\Omega} \psi^p \sigma_z d\Omega, \quad (27)$$

e substituindo a expressão $\sigma_z = E\theta''(z)\psi(x, y)$ na equação 27, tem-se a expressão do bimomento em termos de $\theta''(z)$,

$$M_w = -EC_w \theta''(z). \quad (28)$$

Além disso, o bimomento M_w , correlaciona-se com o momento torçor secundário M_t^S através da relação diferencial 29,

$$\frac{dM_w}{dz} = -EC_w \theta''' = M_t^S. \quad (29)$$

Substituindo-se as equações 21 e 23 na equação 20, e fazendo o equilíbrio para infinitésimo de uma barra sujeita a um momento torçor distribuído ao longo do comprimento, tem-se a relação diferencial, expressão 30,

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial z} dz - M_t + m_t dx = 0. \quad (30)$$

Levando-se em conta a relação de equilíbrio $\frac{\partial M_t}{\partial z} = -m_t$, chega-se finalmente na equação diferencial que governa o problema da torção não uniforme para barras prismáticas, a equação 31.

$$EC_w \frac{d^4 \theta}{dz^4} + -GI_t \frac{d^2 \theta}{dz^2} = m_t \quad (31)$$

e a equação 31 então toma a forma expressa em 32, para barras de seção variável.

$$EC_M \frac{d^4 \theta}{dz^4} + 2E \frac{dC_w}{dz} \frac{d^3 \theta}{dz^3} + E \frac{d^2 C_w}{dz^2} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - GI_t \frac{d^2 \theta}{dz^2} - G \frac{dI_t}{dz} \frac{d\theta}{dz} = m_t. \quad (32)$$

A equação 32 é uma equação diferencial ordinária, de quarta ordem, de coeficientes não constantes, e não homogênea e corresponde ao PVP (3). Esse tipo de equação na maioria dos casos não possui solução analítica e pode estar sujeita as mais variadas formas de condições de contorno. Essa dificuldade é superada nesse trabalho com o desenvolvimento de uma estratégia baseada na aproximação polinomial das grandezas como momento primário, momento secundário e bimomento ao longo da viga.

2.3 Solução aproximada para o deslocamento angular

Para obter uma solução aproximada da equação 32, as grandezas (momento primário, momento secundário e bimomento) ao longo do comprimento da barra são aproximadas por polinômios de ordem baixa, e as propriedades da seção transversal I_t e C_w , são interpoladas por polinômios de grau 3. A escolha de funções polinomiais justifica-se pelo aspecto suave que tais grandezas apresentam, quando o comprimento da barra é curto em relação as dimensões da seção transversal, como pode ser visto na Figura 04.

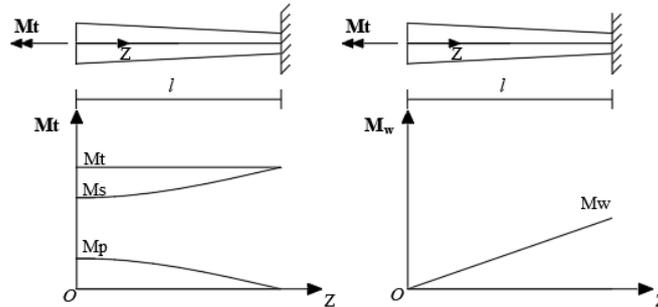


Figura 04 - Esforços torcionais para um elemento curto

Para o desenvolvimento da presente estratégia, adota-se inicialmente a barra engastada e livre, submetida a um momento torçor concentrado na extremidade livre. O momento primário (M_p) e momento secundário (M_s) são aproximados por um polinômio de grau 3 obedecendo o a relação ($M_p = M_t - M_s$) e bimomento (M_w) por um polinômio de grau 4, obedecendo a relação diferencial ($\frac{dM_w}{dz} = M_t^s$),

$$M_s \cong az^3 + bz^2 + cz + d, \quad (33)$$

$$M_p \cong M_t - (az^3 + bz^2 + cz + d), \quad (34)$$

$$M_w \cong a \frac{z^4}{4} + b \frac{z^3}{3} + c \frac{z^2}{2} + dz + e. \quad (35)$$

Os polinômios utilizados possuem 5 incógnitas (a , b , c , d e e) resultando em um sistema de equações de ordem (5x5). Para obter as equações verifica-se que na estrutura exemplificada na Figura 04, tem-se em $z = 0$, momento torçor diferente de zero (M_t^1) e um bimomento nulo (M_w^1), permitindo-se escrever a equação 36,

$$M_w(0) \cong a \frac{0^4}{4} + b \frac{0^3}{3} + c \frac{0^2}{2} + d0 + e = M_w^1. \quad (36)$$

Entretanto não se conhece as respectivas parcelas dos momentos primários e secundários em $z = 0$, porém é possível observar as relações 37, 38 e 39.

$$\frac{d\theta(0)}{dz} = \frac{M_p(0)}{GI_t(0)} = \frac{M_t(0) - (a0^3 + b0^2 + c0 + d)}{GI_t(0)} = \frac{M_t(0) - d}{GI_t(0)}, \quad (37)$$

$$-\frac{dM_s}{dz} = EC_w \frac{d^4\theta}{dz^4} + 2E \frac{dC_w}{dz} \frac{d^3\theta}{dz^3} + E \frac{d^2C_w}{dz^2} \frac{d^2\theta}{dz^2} \cong -(3az^2 + 2bz + c), \quad (38)$$

$$-\frac{dM_p}{dz} = GI_t \frac{d^2\theta}{dz^2} - G \frac{dI_t}{dz} \frac{d\theta}{dz}. \quad (39)$$

Substituindo em 32, tem-se a equação 40,

$$\underbrace{EC_w \frac{d^4\theta}{dz^4} + 2E \frac{dC_w}{dz} \frac{d^3\theta}{dz^3} + E \frac{d^2C_w}{dz^2} \frac{d^2\theta}{dz^2}}_{-\frac{dM_s(0)}{dz} \cong -c} \cong GI_t \underbrace{\frac{d^2\theta(0)}{dz^2}}_{-\frac{M_w^1}{EC_w(0)}} + G \frac{dI_t}{dz} \frac{M_t - d}{GI_t(0)} + \overbrace{m_t(0)}^0. \quad (40)$$

Em $z = l$, no engaste, a totalidade do momento torçor se dá na forma de momento secundário, então escreve-se,

$$M_s = al^3 + bl^2 + cl + d \cong Mt. \quad (41)$$

Em $z = l/2$ é possível escrever a seguinte relação

$$\begin{aligned} & \frac{dM_s}{dz} \\ & - \left(\frac{3}{4}al^2 + \frac{b}{2}l + c \right) \cong \\ & = GI_t \left[\frac{\overbrace{\left(a \frac{l^4}{64} + b \frac{l^3}{24} + c \frac{l^2}{8} + d \frac{l}{2} + e \right)}^{\theta''}}{EC_w} \right] + G \frac{dI_t}{dz} \left[\frac{\overbrace{M_t - \left(\frac{al^3}{8} + \frac{bl^2}{4} + \frac{cl}{2} + d \right)}^{\theta'}}{GI_t} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Além das relações anteriores, sabe-se que o $\frac{d\theta}{dz}$ relativo entre $z = 0$ e $z = l$ corresponde a relação 37, de onde é possível escrever a equação.

$$\int_0^l \frac{d^2\theta}{dz^2} dz = \int_0^l \frac{M_w(z)}{EC_w(z)} dz = \int_0^l \frac{a \frac{z^4}{4} + b \frac{z^3}{3} + c \frac{z^2}{2} + dz + e}{EC_w(z)} dz \cong \frac{M_t - d}{GI_t(0)} = \frac{d\theta(0)}{dz} \quad (43)$$

As equações 36, 40, 41,42 e 43, são linearmente independentes e podem ser resolvidas simultaneamente, obtendo-se as incógnitas, a , b , c , d e e , conseqüentemente as equações do bimomento M_w , momento secundário M_s e momento primário M_p , dadas em 33,34 e 35 respectivamente.

De posse do momento primário, pode se escrever a equação 44,

$$\frac{d\theta(z)}{dz} \cong \frac{M_t(z) - (az^3 + bz^2 + cz + d)}{GI_t(z)}. \quad (44)$$

Uma vez que está estabelecido $\frac{d\theta}{dz}$ ao longo da viga, integrando o mesmo ao longo do comprimento da

barra, tem-se o deslocamento angular relativo θ entre $z = 0$ e $z = l$, e θ' é obtido naturalmente pela relação $\frac{M_t(0)-d}{GI_t(0)}$, já que $M_t(0)$ e $I_t(0)$ são um parâmetros de entrada de dados, e a incógnita “ d ” obtida pela solução do sistema de equações.

Note que as equações são genéricas, podem ser utilizadas quando se tem um bimomento aplicado na extremidade livre, ou ainda caso tenha-se um momento torçor distribuído ao longo do elemento.

É importante salientar que quanto menor for o comprimento da barra em relação as dimensões da seção transversal, mais próximo do exato tendem a ser as funções polinomiais.

9.1 Determinação da matriz de rigidez

Para a determinação da rigidez torsional, considera-se um elemento finito com dois nós de dois graus de liberdades por nó, onde as deslocabilidades são o ângulo θ , e a derivada do angulo θ' , associados ao momento torçor M_t e ao bimomento M_w respectivamente. O aspecto gráfico das deslocabilidades é mostrado na Figura 05, onde as setas com ponta dupla representam momentos torçores e as setas com ponta tripla representam bimomentos. As deslocabilidades d'_1 e d'_3 correspondem a ângulos de torção unitários ($\theta = 1$), e as deslocabilidades d'_2 e d'_4 correspondem a derivadas dos ângulos de torção ($\theta' = 1$).

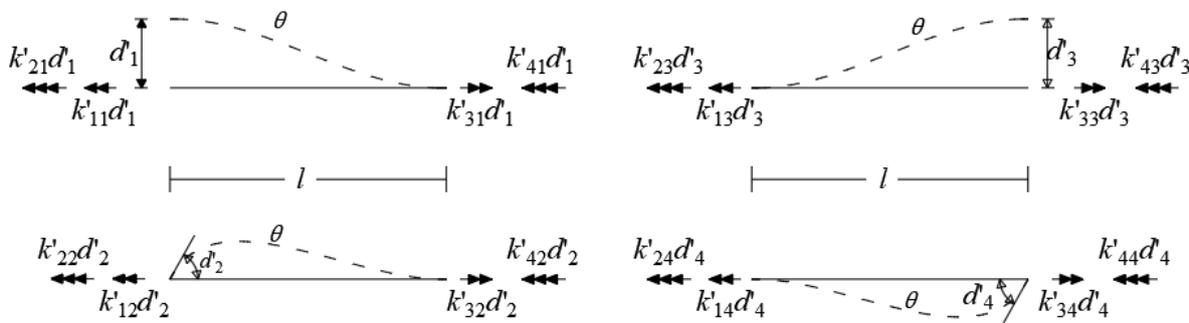


Figura 05 – Deslocabilidades do Elemento Finito

Para obtenção dos respectivos coeficientes de rigidezes, é utilizado o método das forças, onde as barras mostradas na figura acima possuem grau de hiperestaticidade igual a dois. Em decorrência de uma possível variação assimétrica das rigidezes GI_t e EC_w , é escolhido os dois sistemas principais SP, onde são removidos dois vínculos excedentes em cada SP como indicado na Figura 06, de modo a haver condições para usar a estratégia polinomial desenvolvida acima.

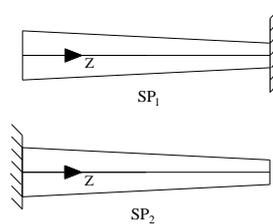


Figura 06 - Sistemas principais em termos do método das forças

Para o SP_1 é aplicado um momento unitário na extremidade livre, onde é calculado o ângulo θ e θ' que correspondem aos coeficientes de flexibilidades δ_{11} e δ_{21} respectivamente, posteriormente é aplicado um bimomento unitário e então é obtido os coeficientes de flexibilidades $\theta' = \delta_{22}$ e $\theta = \delta_{12}$, onde verifica-se o teorema de reciprocidade de Maxuel, ou seja $\delta_{12} = \delta_{21}$. Tratando a deslocabilidade $d'_1 = 1$ como deslocamento

prescrito, chega-se ao sistema de equações,

$$\begin{aligned} \delta_{11}k'_{11} + \delta_{12}k'_{21} &= 1, \\ \delta_{21}k'_{11} + \delta_{22}k'_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Onde k'_{11} corresponde ao momento torçor necessário para que θ seja igual a 1 rad, e k'_{21} corresponde ao bimomento desenvolvido para que θ' equivalha a 0. Uma vez que é conhecido k'_{11} e k'_{21} , substitui-se no sistema de equações dos polinômios acima e obtém-se para a seção do engaste, $z = l$, o momento secundário $M_s(l) = M_t = k'_{31}$ e o momento se bimomento $M_w(l) = k'_{41}$ respectivamente. Repetindo o processo para a deslocabilidade d'_2 no SP1 e para as deslocabilidades d'_3 e d'_4 para o SP2, obtém-se as demais colunas da matriz de rigidez de ordem 4x4, equação 46. Naturalmente a mesma estratégia pode ser usada para a determinação das forças nodais equivalentes f' .

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Ao rodar o programa de elementos finitos com a matriz de local de quatro graus de liberdade, a solução corresponde os deslocamentos angulares θ e θ' respectivamente. Os esforços solicitantes são o momento torçor e o bimomento.

É importante esclarecer que ao transformar o problema de elasticidade 3D em termos unidimensionais, (ângulo de torção dependente apenas do eixo z), o problema é escrito em termos de propriedades da seção transversal da barra, momento de inércia a torção e constante de empenamento. Para obtenção dessas propriedades é necessário que se resolva as equações diferenciais parciais de Laplace, empenamento primário (equações 04). Além disso as tensões de cisalhamentos primárias são escritas em termos do empenamento primário e dependente apenas das coordenadas x e y e de θ' . Já as tensões normais e as tensões de cisalhamento secundárias são dependentes de x,y e z, além das funções de empenamento primária e secundárias. Para obtenção das funções de empenamento primárias e secundárias é que se emprega o MEC. Tendo conhecimento do momento torçor total, da rigidez torcional e de θ' é possível obter o momento torçor secundário e consequentemente o valor de θ''' , necessário para obtenção do empenamento secundário, permitindo finalmente a obtenção das tensões de cisalhamento secundárias através das equações 15.

3 Formulações do MEC

O MEC. consiste basicamente em converter as equações diferenciais parciais que governam um problema, em correspondentes equações integrais, envolvendo apenas valores de contorno. A conversão das equações descritas no domínio em equações integrais de contorno, pode ser acompanhada na bibliografia especializada, como em Brebbia e Dominguez [08], Banerjee e Butterfield [09] entre outros. Basicamente, para equação diferencial parcial de Laplace por exemplo, a que governa o problema da torção primária, a equação integral geral do MEC se dá conforme equação 47

$$c(\xi)\bar{\psi}(\xi) + \oint p^*(\bar{x}, \xi) \bar{\psi}(\bar{x})d\Gamma = \oint \psi^x(\bar{x}, \xi) \bar{p}(\bar{x})d\Gamma, \quad (47)$$

onde \bar{x} , é denominado ponto de campo e o ponto ξ ,é denominado ponto fonte. Os termos $\psi^*(x, \xi)$ e $p^*(x, \xi)$ correspondem à solução fundamental e fluxo fundamental respectivamente, em que para o problema de potencial em formulações bidimensionais são dadas pelas equações 62 e 63 respectivamente,

$$\psi^x(\bar{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad (62)$$

$$p^*(\bar{x}, \xi) = \frac{\partial \psi^x(\bar{x}, \xi)}{\partial n(\bar{x})} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_i n_i}{r} \right), \quad (63)$$

Com $r = \|\bar{r}\| = \|\bar{x} - \xi\|$, sendo a norma do vetor raio, compreendendo a distância entre o ponto de campo

e o ponto fonte e $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial \bar{x}_i} = \frac{r_i}{r}$, correspondente a derivada do raio em relação à \bar{x}_i .

3.1 Técnica de subestruturação genérica de elementos de contorno BE-SBS

Quando se tem barras cuja a seção é constiuída de diversos materiais, é necessário em termos do MEC, uma estratégia de subestruturação. A BE-SBS permite acoplar um numero gnérico de subdomínios permitindo a análise de compositos com alto grau de complexidade. Particularizando para três sub-regiões tem-se o esquema matricial ilustrado na Figura 06, mostrando como seria o sistema de equações fosse montado explicitamente levando em consideração as condições de interfaces entre os materiais existentes na seção. Vale salientar que caso seja usado os solvers diretos, então o sistema de equações é montado explicitamente.

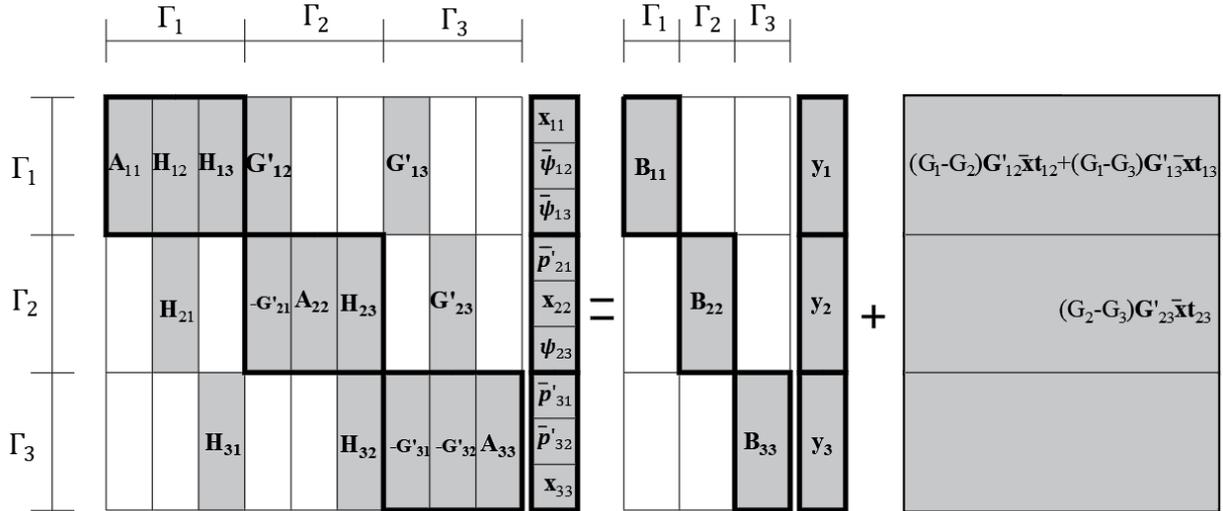


Figura 06 - Sistema global explícito para empenamento primário

Outro aspecto relevante da técnica é que a geração de cada subregião é independente e a busca pelos nós acoplados é automatizada. Uma de suas principais vantagens é o uso dos solvers Iterativos de Krylov, essa característica permite dispensar a montagem explícita do sistema de equações e as operações com os grandes blocos de zeros que são comuns quando se trabalha com sistemas acoplados. Esses detalhes trazem eficiência e robustez ao algoritmo.

É importante notar que as condições de contorno livre Γ_{ii} são apenas fluxos $G_i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = G_i \bar{x}t_{ii}$, fazendo com que o sistema torne-se singular, sendo assim, remove-se a singularidade, impondo para um determinado nó, localizado no contorno livre, um empenamento nulo $\bar{\psi}_i = 0$.

4 Aplicações

Exemplo 01. Trata-se de uma seção caixão homogênea, estudada por Gruttmann e Vagner [10], onde usando uma formulação em elementos finitos, determinaram o empenamento da seção transversal devido a torção, constante de empenamento C_w e inércia a torção I . Mais tarde, os autores estudaram a seção submetida ao esforço cortante, determinando o fluxo de cisalhamento, fator de forma, etc. Outro autor, Sapontzakis [02], também estudou a respectiva seção transversal, porém, incorporada a uma viga biengastada com 55 metros de vão e submetida ao carregamento indicado na Figura 07. Lançando mão de uma formulação do MEC, o autor analisa o sólido, em termos de dois problemas de valor de contorno, um envolvendo o empenamento da seção transversal, e outro envolvendo os deslocamentos angulares ao longo do vão. Para o cálculo da constante de empenamento C_w , e o momento de inércia a torção I , o autor utilizou células de integração para avaliar as integrais inerentes a tais propriedades. Já no presente trabalho, todas as grandezas de interesse da seção, foram calculadas exclusivamente usando integrais de contorno. A cerca das propriedades constitutivas, a única

informada por Sapoznik [02], foi o módulo de elasticidade transversal, no caso $E=30\text{GPa}$. Então no presente trabalho, manteve-se $E = 30\text{GPa}$, e adotou-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$.

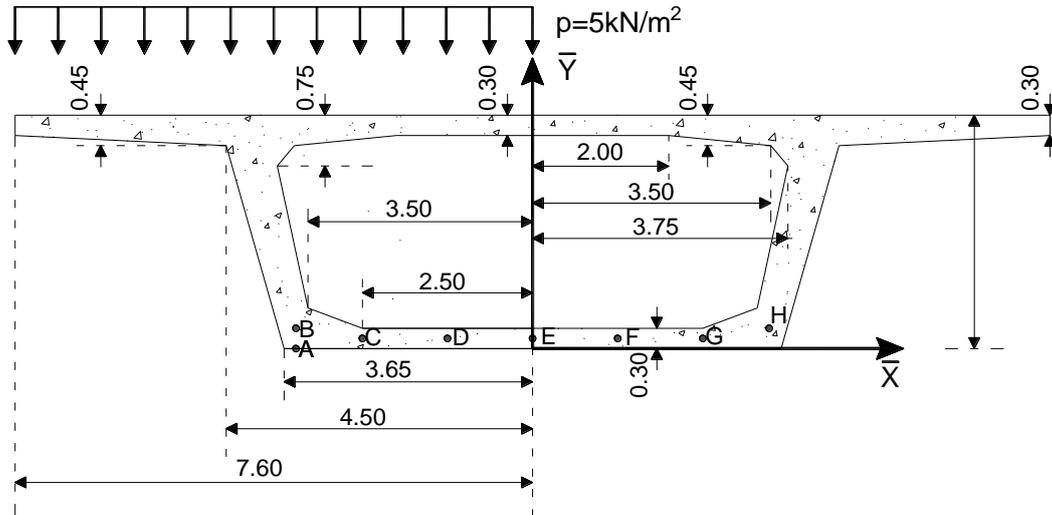


Figura 07 - Seção transversal do exemplo 01

Na BE-SBS, a seção foi modelada com 297 elementos de contorno quadráticos e 594 nós geométricos, tendo o aspecto da malha mostrada na Figura 08.

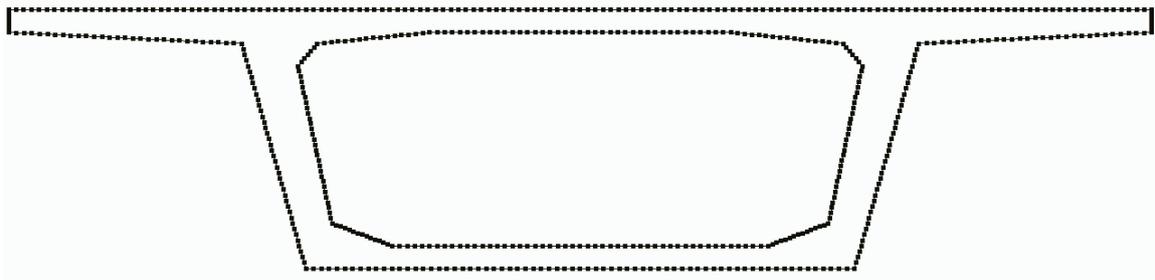


Figura 08 - Malha de elementos de contorno do exemplo 01

A distribuição do empenamento primário ao longo da seção é mostrada na Figura 09, e o empenamento secundário, para cota $Z = 0.0$, é mostrado na Figura 10. Na Figura 09, verifica-se que o empenamento primário máximo obtido pela BE-SBS é $\psi_{m\acute{a}x}^p = 4.871\text{m}^2$, bastante próximo de [09] que tem o valor de $\psi_{m\acute{a}x}^p = 4.914\text{m}^2$.



Figura 09 - Empenamento primário da seção transversal do exemplo 01.

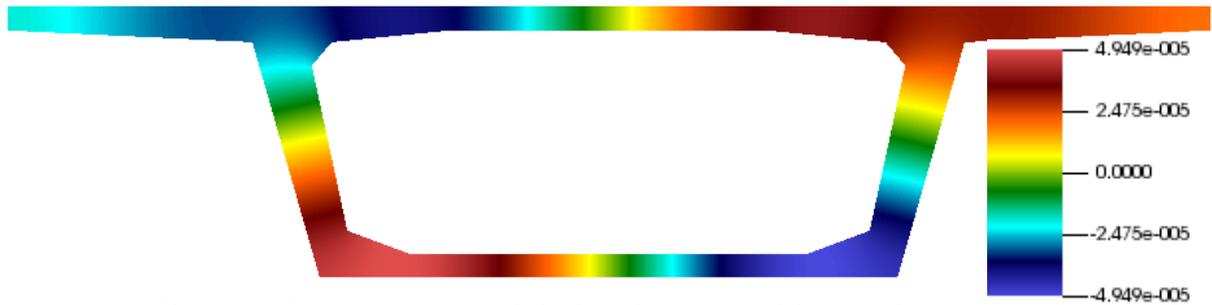


Figura 10 - Empenamento secundário da seção transversal do exemplo 01

Em relação ao empenamento secundário, Spoutazkis [02], obteve $\psi_{m\acute{a}x}^s = 4.9584 \times 10^{-5}m^2$, enquanto a BE-SBS, obteve $\psi_{m\acute{a}x}^s = 4.949 \times 10^{-5}m^2$, resultando e uma divergência de 0.18%, ou seja, muito próximo do divulgado na literatura, aferindo o presente código.

Também se calculou grandezas de interesses, e foram confrontadas com [10] na tabela 01.

Tabela 01- Comparação das propriedades da seção transversal com a literatura

$Y_{\theta}(m)$		$I_t(m^4)$		$C_w(m^6)$	
BE-SBS	[10]	BE-SBS	[10]	BE-SBS	[10]
1.5692	1.5609	42.45849	42.487	62.74519	62.788

Tendo conhecimento das propriedades da seção transversal obtidas pela BE-SBS, usando o elemento finito desenvolvido, obtém se o campo de deslocamento angular θ , e a sua derivada θ' ao longo do vão da viga, e os esforços solicitantes, momento torçor Mt , Bimomento Mw , momento torçor primário Mp e momento torçor secundário Ms . Vale lembrar que para barras prismáticas como é o caso desse exemplo, existe solução analítica para a EDO que governa o problema, sendo assim na Figura 11, Figura 12, Figura 13, Figura 14 respectivamente, mostram-se as grandezas obtidas numericamente em comparação com a resposta analítica.

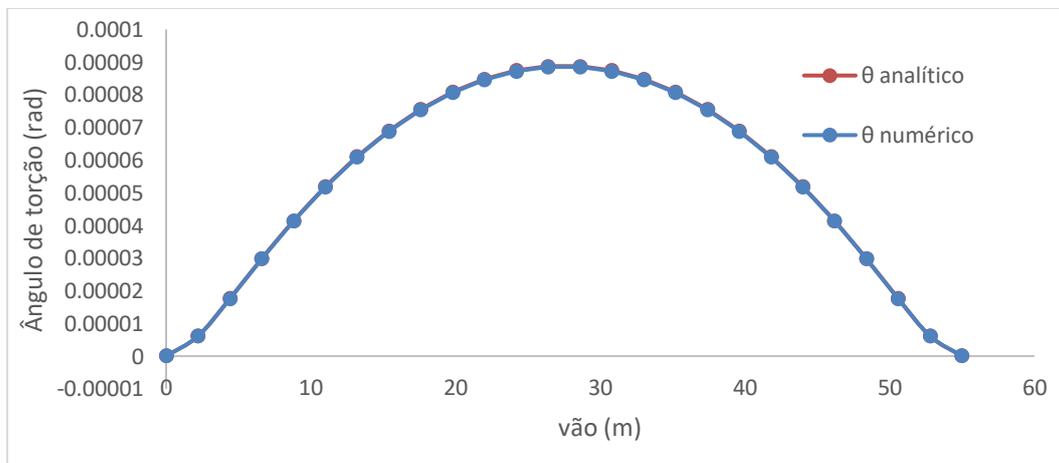


Figura 11 - Deslocamento angular ao longo do vão da viga

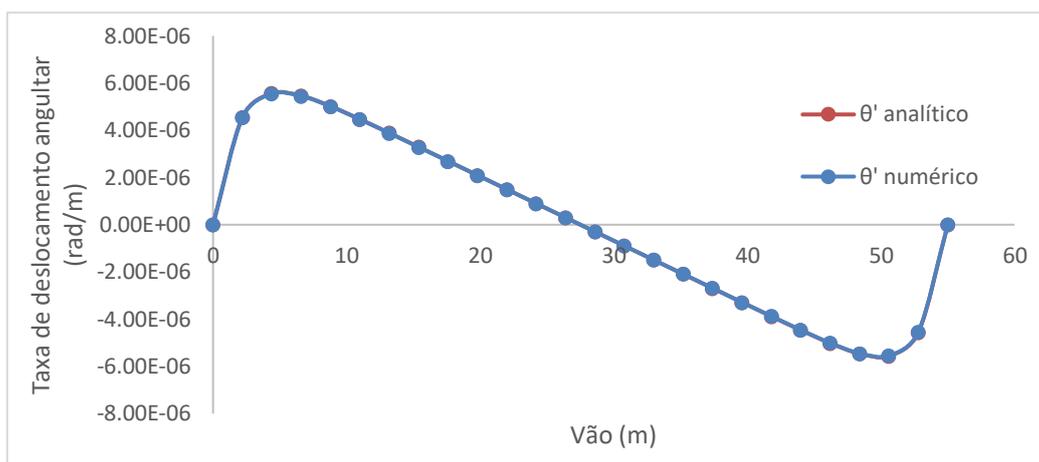


Figura 12 - Taxa de deslocamento angular ao longo do vão da viga

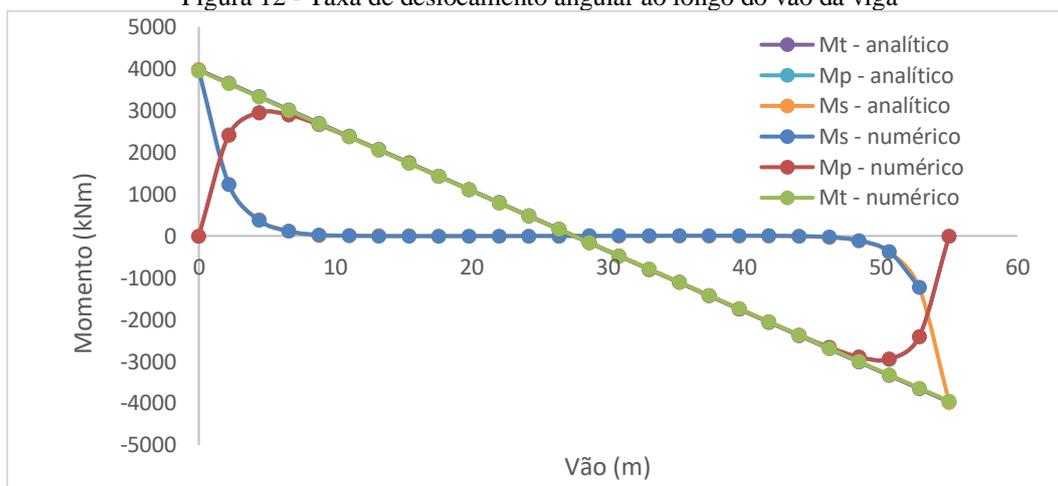


Figura 13 - Momentos torçores

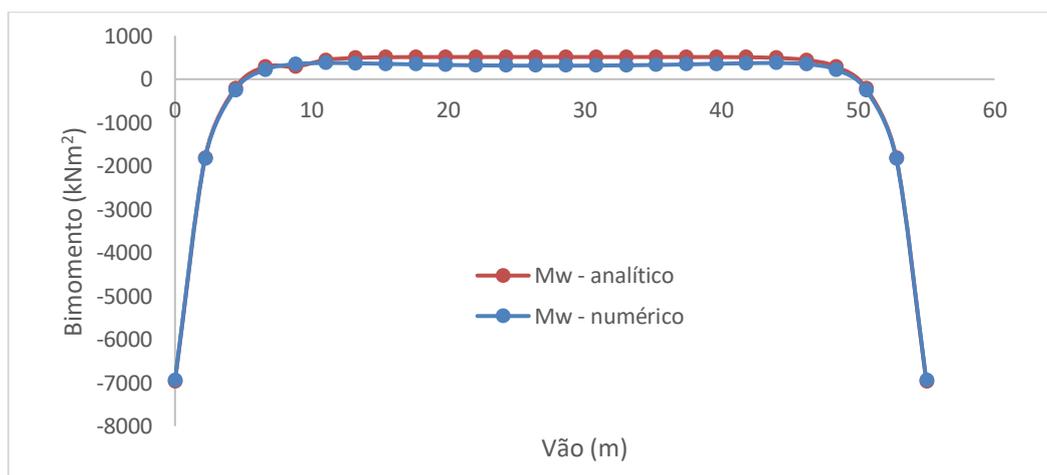


Figura 14 - Bimomento ao longo da viga

A boa convergência com os resultados analíticos indicados observados nos gráficos acima, demonstram o bom desempenho do elemento finito desenvolvido usando as aproximações polinomiais. A cerca do fenômeno da torção secundária, é possível notar na composição dos momentos torçores, como é o esperado, uma maior influência do fenômeno junto aos apoios.

Tendo conhecimento dos esforços solicitantes, calculam-se para a seção localizada na coordenada

$z = 2.2\text{m}$, a distribuição da resultante das tensões de cisalhamento $\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$ em N/m^2 , decorrentes do momento torçor primário de $M_p = 2409.85\text{kNm}$, e decorrentes do momento torçor secundário de $M_s = 1223.48\text{kNm}$, e apresentadas nas Figura 15 e Figura 16, respectivamente, e a resultante da superposição de ambas, é mostrada na Figura 17.

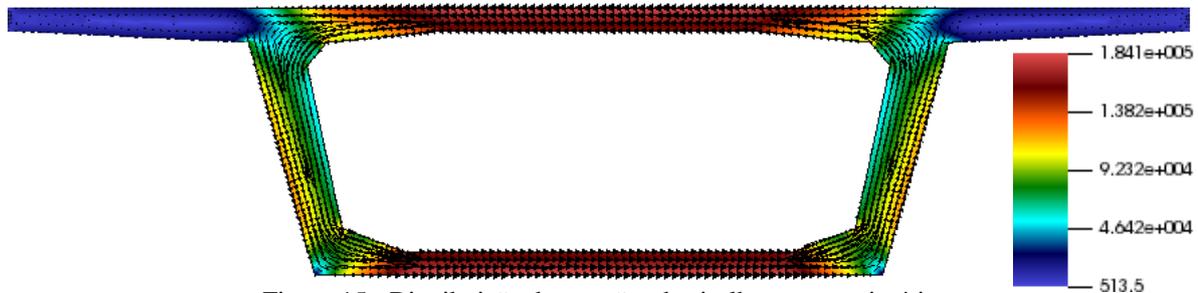


Figura 15 - Distribuição das tensões de cisalhamentos primárias

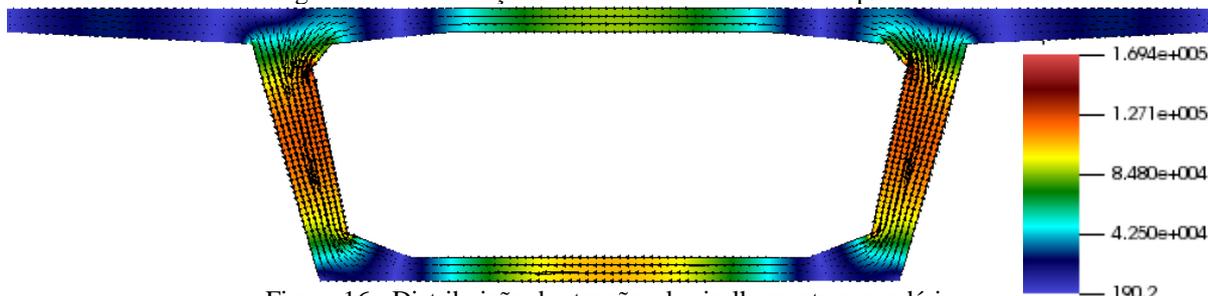


Figura 16 - Distribuição das tensões de cisalhamento secundárias

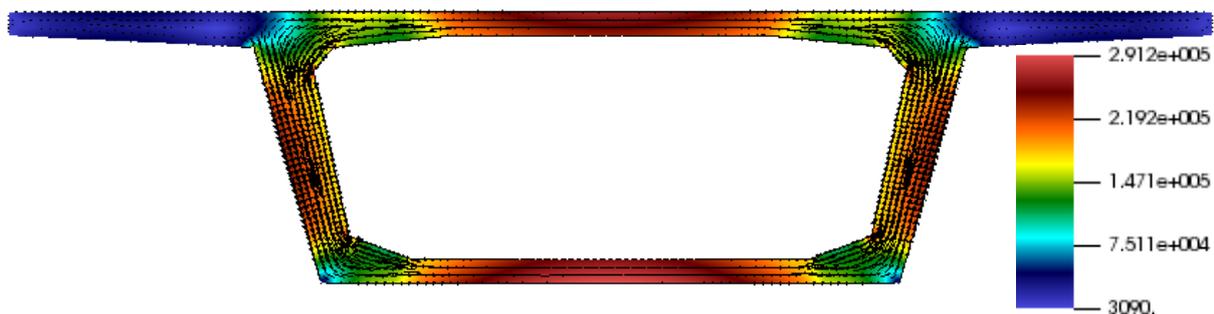


Figura 17 - Tensões de cisalhamento total

Para ponto “I” (4.1634, 1.7167, 0.0) tensão secundária obtida por Sapountzakis [02] é $\tau_i^s = 386.60\text{kPa}$, enquanto que na BE-SBS, obteve-se $\tau_i^s = 383.55\text{kPa}$, representando uma diferença de apenas 0.788%, mostrando que o resultado é bastante convergente com a literatura.

Com a finalidade de ainda mais aferição da presente implementação, confrontou-se as tensões normais σ_z ao longo do vão da viga com os resultados apresentados por [02]. Onde são observadas as tensões no ponto A indicado na seção transversal, com as coordenadas $x = -3.3763$, $y = 0.0$ e $z = 0.0$. Os resultados são mostrados na Figura 18, onde obteve-se, $\sigma_{z,m\acute{a}x}^{\text{empen}} = 538.256\text{ kN/m}^2$ com a presente formulação, e observa-se bastante proximidade com o valor apresentado na literatura, $\sigma_{z,m\acute{a}x}^{\text{empen}} = 543.83\text{ kN/m}^2$, conferindo uma divergência de apenas 1.025%. Além disso, o aspecto dos gráficos ao longo do vão da viga se mostra bastantes concordantes, demonstrando a eficácia da formulação implementada. É preciso mencionar que na Figura 18, as tensões de compressão são consideradas positivas.

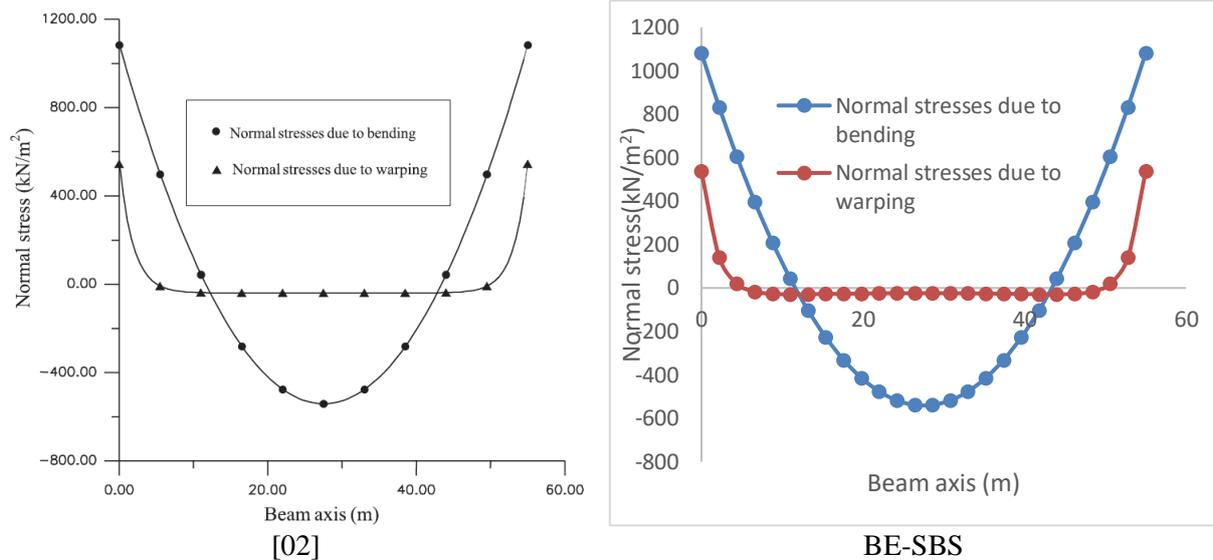


Figura 18 - Tensões normais ao longo do vão da viga modelada como frame

Exemplo 02-Trata-se de uma barra de seção variável e compôsta de aço e concreto, estudada por Sapountazakis [04], tendo o esquema da seção indicado na Figura 19-a, e a variação da seção ao longo do comprimento indicada na Figura 19-b. Sendo a estrutura submetida a um momento torçor distribuído, $M_t=2\text{kNm/m}$, ao longo de todo o comprimento da barra. Sobre a propriedades constitutivas, para o aço adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal $E_s = 2.1 \times 10^8 \text{kPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu_s=0.3$, para o concreto, adotou-se $E_c=1.25 \times 10^8 \text{kPa}$ e $\nu_c=0.2$.

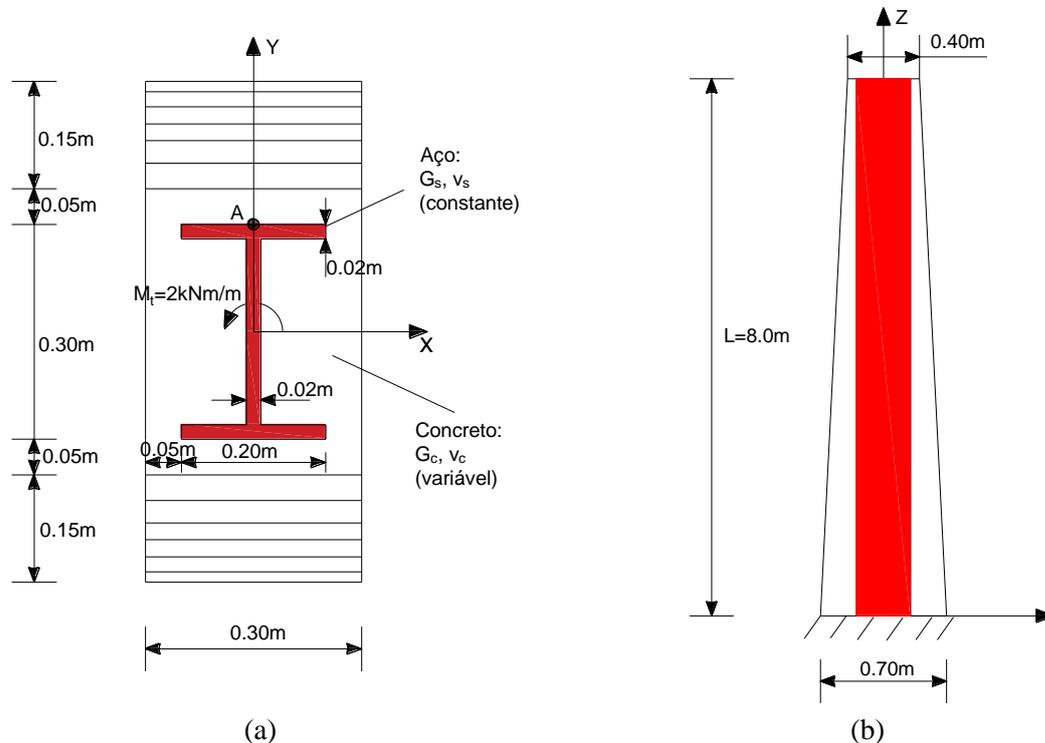


Figura 19 - Estrutura estudada no exemplo 03

Para a modelagem da seção transversal, utilizou-se 118 elementos quadráticos para modelar o concreto e 74 elementos para modelar o perfil de aço. O aspecto da malha de elementos de contorno acoplada, é indicado na Figura 20 para coordenada $z=8$. Cabe esclarecer que embora as dimensões da seção variem, as arestas foram

divididas sempre pela mesma quantidade de elementos.

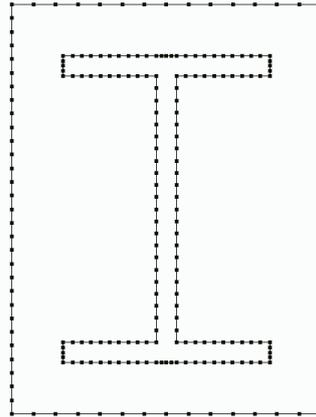
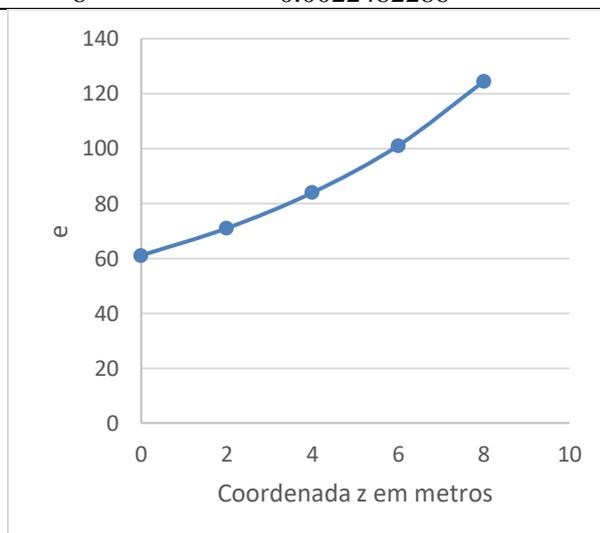


Figura 20 - Malha de elementos de contorno adotada

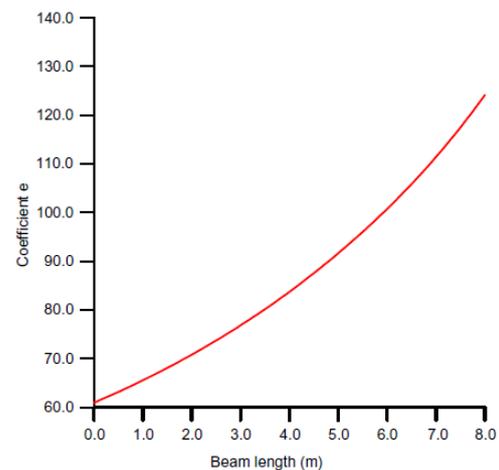
Para resolver o problema, inicialmente avaliou-se as constantes de empenamento C_w , e os momentos de inércia a torção I_t para as seções localizadas nas cotas $z=0.0$, $z=2.0$, $z=4.0$, $z=6.0$ e $z=8.0$, tendo os respectivos valores apresentados na Tabela 02 a partir dos quais avaliou-se o parâmetro, $e = l\sqrt{GI_t/EC_w}$ ao longo eixo z da barra e então apresentado na gráfico da Figura 21.

Tabela 02- Grandezas de interesse ao longo da barra

Coor z (m)	$I_t(m^4)$	$C_w(m^6)$	e
0	0.0047100000	0.0000337000	61.0344
2	0.0040427985	0.0000214153	70.95173
4	0.0033901104	0.0000128348	83.92603
6	0.0027775983	0.0000072588	101.0149
8	0.0022482286	0.0000038706	124.456



BE-SBS



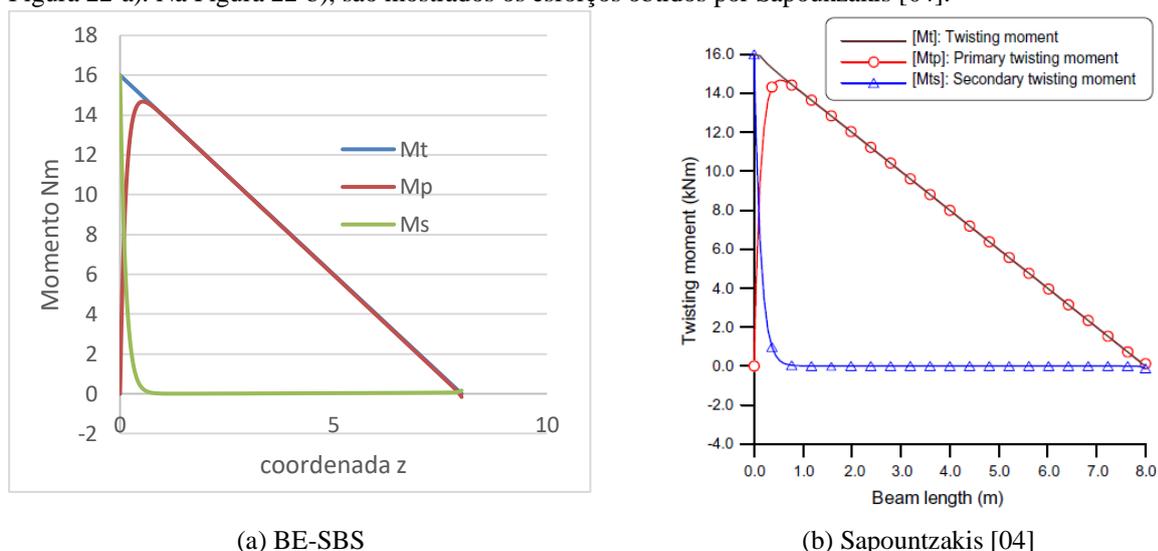
Sapountzakis [50]

Figura 21 - Parâmetro e ao longo da barra

Observando a Figura 21, nota-se bastante semelhança entre os dois gráficos, além disso, os valores extremos do parâmetro e e obtidos pelo autor, $e_{\min} = 60.9251$, e $e_{\max} = 124.1357$, são muito próximos dos valores obtidos pela presente formulação.

Ao longo do comprimento da viga, a análise se deu usando 400 elementos frame, onde os esforços

(momento torçor total, M_t , momento torçor primário, M_p e momento torçor secundário, M_s), são mostrados na Figura 22-a). Na Figura 22-b), são mostrados os esforços obtidos por Sapountzakis [04].



(a) BE-SBS

(b) Sapountzakis [04]

Figura 22 - Distribuição dos esforços solicitantes ao longo da barra

Verifica-se mais uma vez grande semelhança entre os resultados.

Tendo conhecimento dos esforços solicitantes, bem como as grandezas associadas aos deslocamentos torcionais, θ, θ' e θ''' ao longo da barra, avaliou-se os deslocamentos em z relacionados ao empenamento primário $u_z = \psi^p \theta'$, e o secundário ψ^s , para cota $z=4.00\text{m}$, e são apresentados na Figura 23.

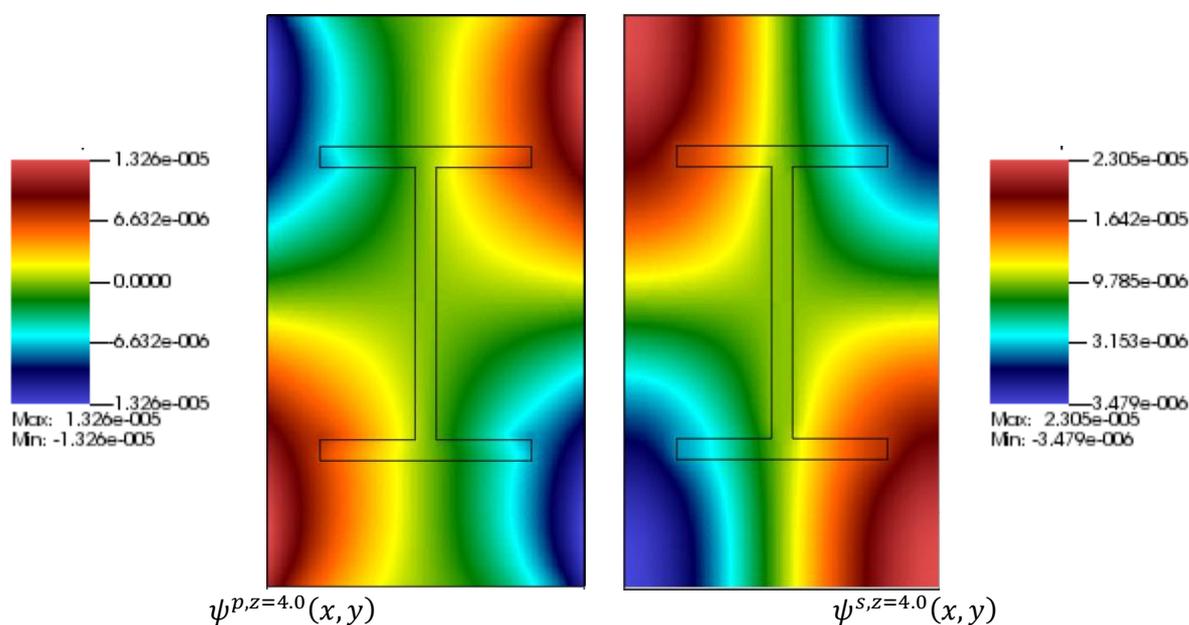


Figura 23 - Tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal

A Figura 24, mostra as tensões de cisalhamento primárias no ponto “A” da seção transversal ao longo do comprimento da barra tanto no aço como no concreto.

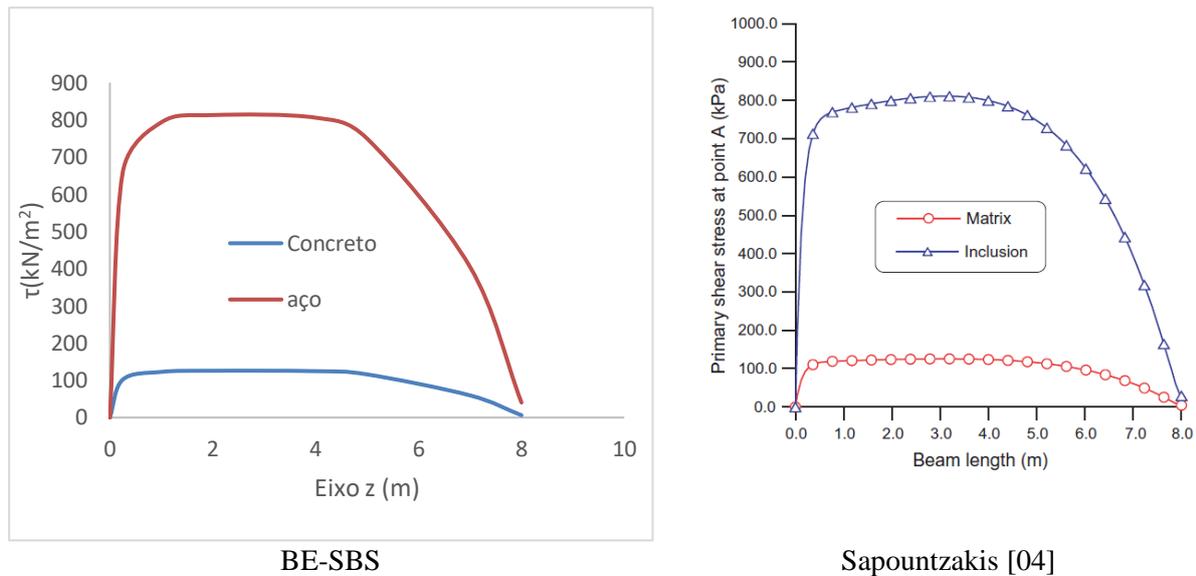


Figura 24 - Tensões de cisalhamento primária ao longo do comprimento da viga

Novamente, verifica-se considerável aproximação dos resultados obtidos com a literatura, embora observe-se ligeira divergência ao longo dos primeiros 4 metros, demonstrando o que elemento frame desenvolvido, no que tange os aspectos de torção, apresenta resultados satisfatórios.

5 Conclusão

Conforme se verifica no exemplo 01, o método dos elementos de contorno apresentou boa performance tanto para obtenção da solução do PVC (01) como do PVC (02), pois tanto o empenamento primário como o empenamento secundário apresentaram bastante concordância com os resultados divulgados na literatura. Com relação ao desempenho do elemento finito desenvolvido, também se verifica sua excelente precisão quando se compara com a resposta analítica. Com relação ao exemplo 02, nota-se também bastante concordância dos resultados obtidos com o algoritmo desenvolvido em relação literatura, aferindo a implementação da BE-SBS, uma vez que se trata de uma seção envolvendo diferentes materiais. Outro aspecto importante é que a matriz de rigidez de elemento finito, desenvolvido com sete graus de liberdade por nó, pode ser facilmente incorporada em um programa computacional de análise de pórtico espacial via MRD, permitindo uma análise mais realista de estruturas espaciais, que inclui a avaliação de tensões resultantes dos efeitos de empenamento não-uniforme, que podem ser bastante significativos próximos aos apoios restringidos.

Agradecimentos. Os autores desse trabalho agradecem a Universidade Federal de Ouro Preto por oferecer o programa de pós-graduação em Engenharia Civil (PROPEC) do qual fazem parte. Agradecem também as instituições CAPES e CNPq por fomentar educação de nível superior no País. Além disso, o primeiro autor faz um especial agradecimento a Universidade do estado de Mato Grosso por cede-lo durante o período do curso de doutorado.

Referências

- [1] Athanasiadis, G. Direkte und indirekte Randelementmethoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes beliebig geformter Staquerschnitte. *Forschung im Ingenieurwesen* Bd. 55 (1989) Nr.2.
- [2] E.J. Sapountzakis. Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method. *Computer and Structures* 77(2000) 659-667.
- [3] E.J. Sapountzakis and V.G. Mokos. Nonuniform torsion of bars of variable cross section. *Computer and Structures* 82 (2004) 703-715.
- [4] Dikaros IC, Sapountzakis EJ. Nonuniform shear warping effect in the analysis of composite beams by BEM. *Engineering Structures* 76(2014) 215-234.
- [5] F.C. Araújo, D.R. Alberto and C. Dors. Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based in iterative solvers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(2003) 705-716
- [6] F.C. Araújo, M.J. Hillesheim and D. Soares. Revisiting the BE SBS algorithm and applying it solve torsion problems in composite bars: Robustness and efficiency study. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 107(2019) 12-24
- [7] Sapontzkis EJ, Dikaros IC. Advanced 3-D bem element including warping and distortionaleffects for the analysis of spatial framed structures. *Engineering Structures* 188(2019) 147-164.
- [8] Brebbia CA, Domingues J. *Boundary elements - naintroduction course*. McGraw Hill Book Company; 1989.
- [9] Banerjee PK, Butterfield R. *Boundary element methods in engineering Science*. London, England: McGraw-Hill Book Company; 1981.
- [10] Gruttmann F, Wagner W, Sauer R. Zur Berechnung von Wölbfunktion and Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der Finiten Elemente. *Bauingenieur* 1998;73(3):138-43.