

Aplicação do esquema recursivo do Método dos Elementos de Contorno para o cálculo de derivadas direcionais em problemas de potencial resolvidos pelo Método dos Elementos Finitos

H. M. Barcelos¹, C. F. Loeffler², L. O. C. Lara²

¹*Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO
Av. Nossa Sra. Das Graças, 50 - Xerém, Duque de Caxias, 25250-020, Rio de Janeiro, Brasil
engercules@gmail.com*

²*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, UFES
Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras, Vitória, 29075-910, Espírito Santo, Brasil
loefflercarlos@gmail.com, castrolara@hotmail.com*

Abstract. The recursive boundary element technique has been used successfully in scalar problems for recalculation of potential and directional derivatives solutions. It was used for solving problems governed by Laplace, Navier, and Poisson Equations. In the present work, nodal values on the boundary calculated using the Finite Element Method are reused by applying them in the boundary element integral equation, aiming to calculate internal directional derivatives of the basic variable of the problem. It is well known that these internal directional derivatives calculated by the Finite Element Method (FEM) present low accuracy. Here, to confirm the robustness of the proposed model, computational tests are performed, in which the FEM results in the classic form are compared with those obtained by the recursive procedure described former. The solution of problems through the Boundary Element Method is also presented and benchmark problems that have a known analytical solution are chosen for analysis, to better assess the quality of the results.

Keywords: Boundary Element Method, Recursive Scheme, Finite Element Method, Radial Basis Functions.

1 Introdução

Um esforço significativo tem sido despendido na área de pesquisa de métodos numéricos para obtenção de formulações mais abrangentes, capazes de atender aos crescentes desafios da engenharia moderna. Paralelamente, algumas técnicas numéricas tradicionais têm sido objeto de adaptações para alcançar melhor desempenho, aproveitando-se dos avanços contemporâneos da análise e modelagem matemática, do ganho na velocidade de processamento dos computadores atuais e também da sua maior capacidade no armazenamento de dados. Contudo, tais métodos numéricos também podem ser aprimorados através da identificação de certos procedimentos, adotados com sucesso em outros métodos, que podem ser vantajosamente absorvidos e adaptados no seu contexto. Isto ocorreu envolvendo procedimentos relacionados às diversas modalidades de esquemas adaptativos, tais como: realocação de pontos de discretização; refinamento de malha com adensamento de nós; e enriquecimento das funções de forma ou aproximação do campo. Também é destacável a inserção de esquemas de solução iterativa, voltados para melhorar a precisão numérica, e ainda o uso de funções de base radial, usadas na interpolação numérica com o Método dos Elementos de Contorno (MEC) [1,2,3] e atualmente difundido nas formulações alternativas do Método dos Elementos Finitos (MEF) [4,5] atuando como recurso substancial nas diversas formulações meshless para delimitar o raio de ação na interação dos pontos de discretização e substituindo os elementos e sua conectividade [6].

Seguindo essa tendência, o uso recursivo da equação integral de contorno é aqui apresentado como um recurso auxiliar para melhorar o desempenho do MEF no cálculo de derivadas direcionais das variáveis básicas ou primais do problema em regiões internas do domínio em análise. Sabe-se que o cálculo de derivadas direcionais

internas com o MEF em problemas de potencial estacionário, envolvendo fisicamente temperatura, pressão e campo elétrico, entre outras, apresentam baixa precisão numérica no cálculo das grandezas decorrentes, respectivamente fluxos de calor, velocidades e corrente elétrica. Isto se deve ao fato de que, no MEF, tais grandezas são obtidas através de derivadas das funções de aproximação que definem o campo gerado em cada elemento.

O procedimento recursivo não é uma técnica iterativa, mas um procedimento simples de recálculo de variáveis baseado em um esquema típico usado para calcular valores internos com o MEC, onde a equação integral de contorno é reutilizada. A ideia central é que a equação integral do MEC é equivalente a uma sentença de resíduos ponderados e a sua reutilização implica numa nova minimização de erros. Quando se calculam valores internos com o MEC, a equação integral é reutilizada e por essa razão os valores calculados internamente possuem maior precisão do que os valores de contorno [7,8,9].

A proposta do presente trabalho é utilizar os valores de contorno obtidos com o MEF e aplica-los na equação integral do MEC para cálculo das derivadas direcionais internas. Esta equação integral não realiza derivações na aproximação do campo e é correlata a uma sentença de resíduos ponderados, relacionada ao cálculo dos fluxos. Por essa razão, espera-se uma precisão numérica superior ao esquema clássico do MEF.

Para implementar o esquema proposto, é preciso dispor de todos os valores do potencial e derivadas normais no contorno. Os resultados dos potenciais no contorno são obtidos diretamente através do MEF; porém, as derivadas normais ao contorno precisam ser aproximadas e foram obtidas de duas maneiras. A primeira consiste do cálculo clássico das derivadas de funções polinomiais de primeira ordem, utilizadas como funções de aproximação no interior dos elementos de contorno; a segunda, através das derivadas de uma aproximação construída com funções de interpolação de base radial do tipo exponencial. Estas funções serão aplicadas no elemento finito tangente pela sua aresta ao contorno do domínio para os cálculos dos fluxos normais; os demais elementos contribuem para o cálculo das derivadas direcionais no interior do domínio através de seu baricentro.

Serão abordados ao longo deste trabalho dois experimentos numéricos com condições de contorno prescritas do tipo Dirichlet e Neumann, e para cada exemplo serão avaliados os comportamentos dos erros relativos médios percentuais ao longo do refinamento de malha.

2 Equação de governo e o esquema recursivo do MEC

As aplicações dos métodos aqui apresentados terão como enfoque a equação de governo de Laplace em meios homogêneos e envolvendo processos estacionários, como mostra a Eq. (1):

$$ku_{,ii}(X) = 0. \quad (1)$$

Para a Eq. (1) o termo k representa o “bulk modulus” e o seu valor será considerado como unitário. Aplicando os procedimentos tradicionais do MEC [2] sob a Eq. (1), encontra-se a forma integral inversa como mostra a Eq. (2):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma(X)} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma(X)} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) = 0, \quad (2)$$

nesta equação o termo $X = X(x_1; x_2)$ representa o ponto campo de um domínio discreto $\Omega(X)$ com contorno definido em $\Gamma(X)$ e ξ é um ponto particular chamado de ponto fonte. As funções $u^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$ correspondem respectivamente à solução fundamental e o produto escalar entre o gradiente de $u^*(\xi; X)$ com a normal ao contorno $\Gamma(X)$.

Demonstra-se que para pontos ξ internos ao domínio $\Omega(X)$ o valor da constante $c(\xi)$ vale 1 e que, uma vez conhecidos os valores de $u(X)$ e $q(X)$ no contorno $\Gamma(X)$, é possível calcular os potenciais internos $u^{int}(\xi)$ através da Eq. (2), na seguinte forma:

$$u^{int}(\xi) = \int_{\Gamma(X)} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma(X)} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X). \quad (3)$$

De forma similar ao que foi feito para obter os potenciais internos, pode-se obter os valores das derivadas direcionais relacionadas do ponto de potencial $u^{int}(\xi)$, bastando apenas derivá-lo em relação às coordenadas x_1 e x_2 do ponto fonte $\xi = \xi(x_1; x_2)$ de acordo com a Eq. (4):

$$\frac{du^{int}(\xi)}{dx_j} = \int_{\Gamma(X)} q(X) \frac{d[u^*(\xi; X)]}{dx_j} d\Gamma(X) - \int_{\Gamma(X)} u(X) \frac{d[q^*(\xi; X)]}{dx_j} d\Gamma(X). \quad (4)$$

Por conseguinte, as derivadas direcionais da solução fundamental $u^*(\xi; X)$, cuja expressão $(-1/2\pi) \ln r$ é

bem conhecida na literatura, é dada por:

$$\frac{d[u^*(\xi; X)]}{dx_j} = \frac{r_j}{2\pi r^2} \quad (5)$$

De maneira similar, o escalar $q^*(\xi; X)$ que tem como valor $(-1/2\pi r^2)r_i n_i$ possui derivadas direcionais:

$$\frac{d[q^*(\xi; X)]}{dx_j} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{2r_j r_i n_i}{r^4} - \frac{n_j}{r^2} \right] \quad (6)$$

Assim é possível considerar os valores de contorno $u(X)$ e $q(X)$ calculados pela aplicação no MEF e inseri-los na equação integral do MEC para o cálculo das derivadas direcionais conforme a Eq. (4).

3 Estratégias MEF para obter as derivadas direcionais no interior do domínio

O MEF utiliza-se de uma combinação linear finita de funções conhecidas, usualmente chamadas de funções de base, sendo estas e as suas derivadas de primeira ordem pertencentes ao espaço das funções de quadrado integrável, ou seja, pertencente ao $L^2(\Omega)$. Desta maneira, ao escolher uma função auxiliar $\phi(X)$, encontra-se a forma integral fraca para o problema de Laplace (vide Eq.(1)) conforme a Eq.(7)

$$\int_{\Omega(X)} u_{,i}(X) \phi_{,i}(X) d\Omega(X) - \int_{\Gamma(X)} u_{,i}(X) n_i(X) \phi(X) d\Gamma(X) \quad (7)$$

Para obter o campo de solução potencial, foi escolhida uma função $\phi(X)$ do tipo polinomial, de primeira ordem e com suporte localizado no ponto nodal dos elementos finitos, os quais são definidos aqui com geometria triangular. Obtida a solução para o potencial, o cálculo das derivadas direcionais é realizado usualmente através de uma derivação das funções de interpolação em nível de elemento, conforme mostrado no item 3.1.

É possível, contudo, realizar este cálculo de outras formas. Além do procedimento recursivo do MEC, no item 3.2 é apresentada uma estratégia baseada na interpolação com funções de base radial. A adoção deste procedimento extra permite melhor avaliar a robustez do procedimento baseado no acoplamento de equação integral do MEC com o MEF aqui proposto.

3.1 Utilizando função polinomial

O recurso inicial para a obtenção dos fluxos no contorno e internos do MEF foi utilizar a mesma função de base aplicada no desenvolvimento do MEF para o problema potencial, sendo necessário conhecer a solução potencial nos pontos nodais dos elementos triangulares. Desta forma, para cada elemento finito foi construído o seguinte sistema matricial

$$\mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1' & x_2' \\ 1 & x_1'' & x_2'' \\ 1 & x_1''' & x_2''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{A} \quad (8)$$

Na Eq. (8) \mathbf{U}^e é o vetor solução para o elemento, \mathbf{G} a matriz de interpolação e \mathbf{A} o vetor dos coeficientes de influência. Com isto, é possível encontrar a Eq. (9) que permite o cálculo do potencial dentro do elemento através do uso das funções de interpolação, onde:

$$u^e(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2)u_1^e + \varphi_2(x_1, x_2)u_2^e + \varphi_3(x_1, x_2)u_3^e, \quad (9)$$

e desta maneira obtém-se o cálculo das derivadas direcionais conforme a Eq. (10), posicionadas no baricentro do elemento (fig.1)

$$\begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix} \quad (10)$$

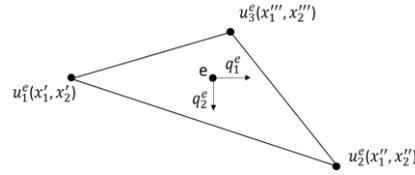


Figura 1. Localização das derivadas direcionais no elemento finito triangular

3.2 Utilizando a interpolação por função de base radial

As experiências já realizadas demonstraram a potencialidade da utilização de funções de base radial (FBR) nas aproximações de integrais de domínio com o MEC [10,11]. Assim, foram realizados alguns testes e definiu-se a FBR do tipo exponencial como um recurso viável para o processo de interpolação, função esta dada por:

$$F^j(X^j, X) = e^{-\alpha r^2(X^j, X)}. \quad (11)$$

Alguns experimentos realizados com a FBR exponencial podem ser visualizados em [12]. O parâmetro α pode ser associado ao distanciamento entre dois pontos nodais consecutivos pertencentes a $\Gamma(X)$, enquanto r representa a distância radial euclidiana entre os pontos base X^j e os pontos campo X de varredura de $F^j(X^j, X)$.

Com isto, o valor do potencial no baricentro do elemento (vide Fig. (2)) pode ser aproximado de acordo com a Eq. (12)

$$\begin{bmatrix} u^e(X^1) \\ u^e(X^2) \\ u^e(X^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1(X^1; X^1) & F^2(X^2; X^1) & F^3(X^3; X^1) \\ F^1(X^1; X^2) & F^2(X^2; X^2) & F^3(X^3; X^2) \\ F^1(X^1; X^3) & F^2(X^2; X^3) & F^3(X^3; X^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

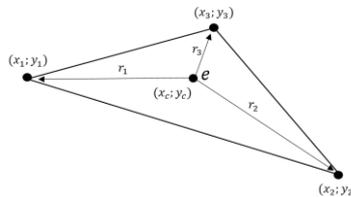


Figura 2. Distâncias radiais do ponto de baricentro aos pontos nodais do elemento finito triangular

Ao encontrar os coeficientes de influência, define-se a função de interpolação para o potencial dentro do elemento e em consequência, calcula-se as derivadas direcionais conforme Eq. (13) a seguir:

$$\frac{\partial u(X^i)}{\partial x_i} = \alpha^1 \frac{\partial F^1(X^1; X^i)}{\partial x_i} + \alpha^2 \frac{\partial F^2(X^2; X^i)}{\partial x_i} + \alpha^3 \frac{\partial F^3(X^3; X^i)}{\partial x_i}. \quad (13)$$

4 Experimentos numéricos

Os exemplos a seguir apresentam o comportamento do erro relativo médio durante o refinamento das malhas geradas definido na Eq. (14) e as características das malhas MEF podem ser visualizadas na Tab. 1. Para a medição de ERM (vide Eq. (14)), os termos v_i^{analit} e v_i^{num} representam os valores analíticos e numéricos de varredura respectivamente; v_{maior}^{analit} e n o maior analítico e o número total de pontos nodais do intervalo considerado. Para o caso do processo de interpolação com FBR, foi definido experimentalmente um valor de alfa fixo para todas as malhas valendo $0,25^3$, onde 0,25 corresponde ao distanciamento dos pontos de contorno da Malha 1. Pela Eq. (14)

$$ERM\% = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{v_i^{analit} - v_i^{num}}{v_{maior}^{analit}} \right|. \quad (14)$$

Nos dois exemplos foram comparados os resultados obtidos por quatro procedimentos: MEF clássico, calculando as derivadas a partir do gradiente das funções de aproximação; MEF com funções de base radial para o cálculo das derivadas direcionais; MEF com cálculo das derivadas direcionais pelo MEC (procedimento recursivo); e para uma melhor avaliação, foram incluídos os resultados obtidos usando exclusivamente o MEC.

Tabela 1. Características das malhas utilizadas no MEF

Nomeclatura	Total de pontos nodais	Total de pontos nodais no contorno	Total de elementos finitos	Total de pontos médios internos
Malha 1	41	16	64	48
Malha 2	145	32	256	224
Malha 3	545	64	1024	960
Malha 4	2113	128	4096	3968
Malha 5	8321	256	16384	16128

4.1 Primeiro exemplo

O primeiro exemplo considera um quadrado de lados unitários com condições de contorno conforme mostra a Fig. (3). As Fig.(4) e Fig. (5) apresentam os resultados internos de derivada direcional.

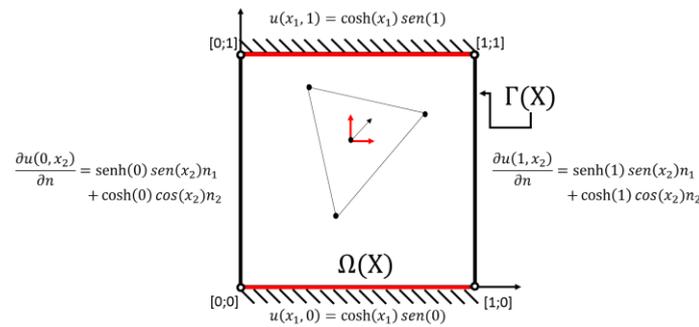


Figura 3. As marcações em vermelho indicam as condições de contorno de Dirichlet, bem como a solução analítica para o potencial em todo o domínio

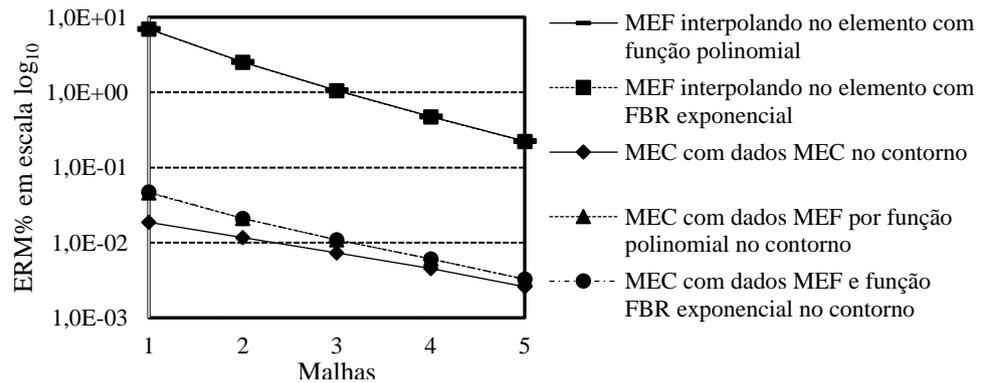


Figura 4. EMR% para o valor de du/dx_1 interno

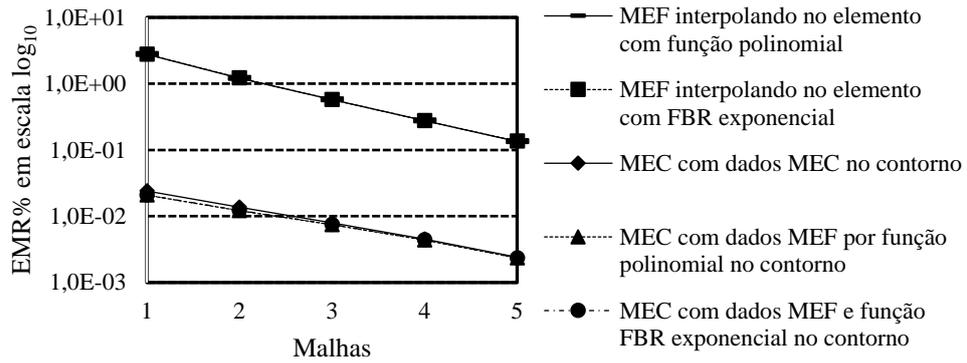


Figura 5. EMR% para o valor de du/dx_2 interno

Nestes testes foram destacadas também as diferentes formas de cálculo dos valores de fluxo no contorno com o MEF, a saber, a aproximação com funções de forma polinomial e a interpolação com funções de base radial. Percebe-se que estas duas metodologias não afetaram os resultados obtidos para os valores do fluxo em ambas as direções. Constata-se por ambos os gráficos que a utilização da equação integral do MEC foi bastante positiva, conforme esperado. As curvas de erro mostradas nas Fig. (4) e Fig. (5) destacam-se ainda pelo comportamento contínuo do decréscimo do erro em todas modalidades de cálculo.

4.2 Segundo exemplo

Este exemplo possui as mesmas características dimensionais do exemplo anterior, mas possui uma distribuição de potenciais e fluxos bastante distinta, mais complexa, conforme destacado na Fig. (6):

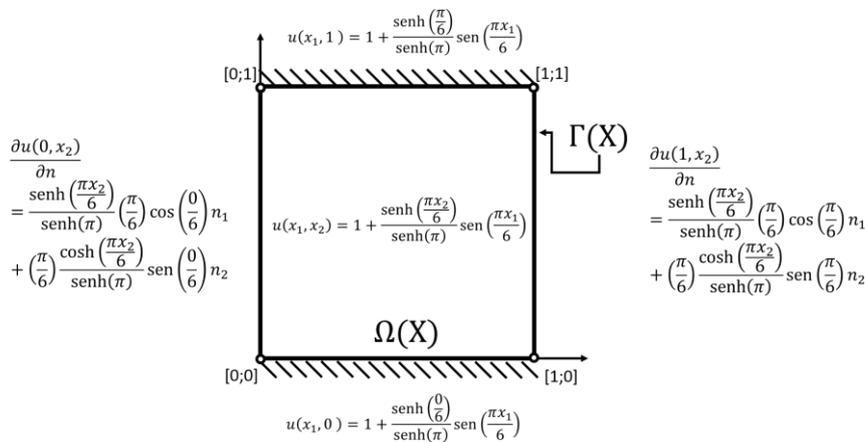


Figura 6. Geometria e condições de contorno para o segundo exemplo

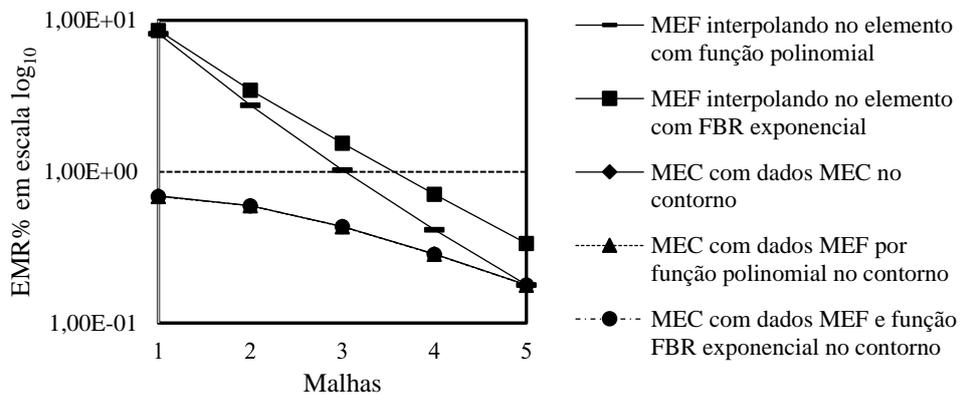


Figura 7. EMR% para o valor de du/dx_1 interno

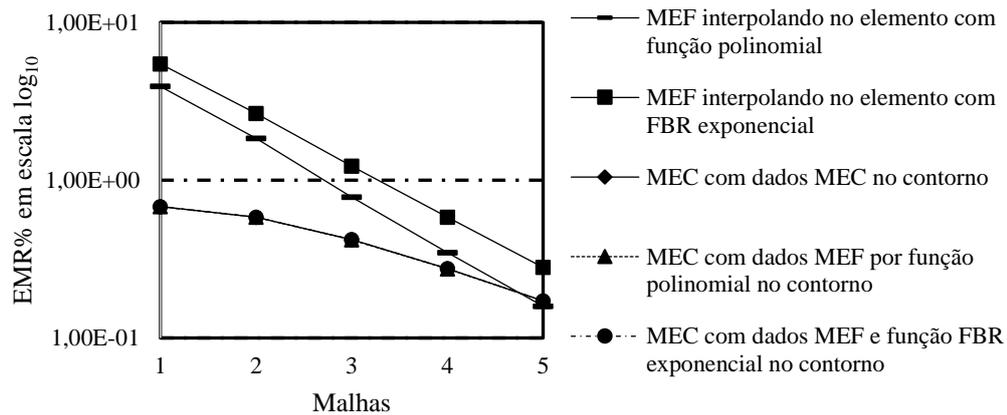


Figura 8. EMR% para o valor de du/dx_2 interno

A utilização do MEC foi bastante efetiva, principalmente para as malhas de contorno menos refinadas. Necessitou-se de 16128 nós internos para o MEF alcançar o mesmo resultado com a interpolação polinomial.

5 Conclusões

Conclui-se que a utilização das equações integrais do MEC com suporte ao MEF contribuiu de forma satisfatória para a obtenção das derivadas direcionais nos problemas considerados. Os bons resultados advindos desta associação entre MEF e MEC se deve a forma como são calculados os valores dos potenciais e derivadas. Usando o MEC, utiliza-se uma equação integral exata, cuja interpretação no sentido de uma minimização de resíduos tem sido comprovada através de resultados. Isto é bem diferente do que é feito tradicionalmente no MEF, em que realiza uma derivação das funções usadas para aproximar o campo de variáveis.

Agradecimentos. Os autores agradecem a colaborações das instituições INMETRO e UFES pelo apoio.

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído como parte do presente trabalho é de propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

Referências

- [1] C. F. Loeffler, A. L. Cruz and A. Bulcão. Direct use of radial basis interpolation functions for modeling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis Boundary Element*, vol. 50, pp. 97-108, 2015.
- [2] C. A. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary elements – an introductory course*. WIT Press, 1992.
- [3] M. D. Buhmann. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, Giessen, 2003.
- [4] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [5] P. K. Kythe and D. Wei. *An Introduction to Linear and Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer Science+Business Media, 2004.
- [6] J.G. Wang, G.R. Liu. A Point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International journal for numerical methods in engineering* 2002;54:1623-1648.
- [7] C. F. Loeffler. A Recursive Application of the Integral Equation in the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 1, pg. 77-84, 2011.
- [8] A. B. Freitas, C. F. Loeffler. Performance Evaluation of the Boundary Element Recursive Procedure in Elastic Problems. *Journal of Engineering Mathematics*, July, pg. 1573-2703, 2015.
- [9] V. E. S Ramos, C. F. Loeffler, W. J. Mansur. Recursive Procedure of Boundary Element Method Applied to Poisson's Problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 82, p. 104-110, 2017.
- [10] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. A Regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Eng. Analysis Boundary Element*, vol. 74, pp. 14-18, 2017.
- [11] H.M. Barcelos and C. F. Loeffler. The direct interpolation boundary element method applied to smoothly inhomogeneous Laplace's problems. *Engineering Analysis Boundary Element*, vol. 105, pp. 155-164, 2019.
- [12] Y. Shunchuan, C. Zhizhang, Y. Yiqiang and S. Ponomarenko. A divergence-free Meshless method based on the vector basis function for transient electromagnetic analysis. *IEEE trans. microwave theory and tech.* vol. 62, pp. 1409-1416, 2014.