

Uma Comparação Preliminar entre os Métodos de Interpolação Direta e da Dupla Reciprocidade na solução da Equação de Onda Acústica em duas dimensões

Loeffler, C.F.¹, Serafim, L.D.B.¹, *Pinheiro, V.P.¹

¹Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM, Universidade Federal de Espírito Santo
Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, 29075-910 ES/Vitória, Brasil
*vitor.pinheiro1987@gmail.com

Abstract. This work presents an initial performance test of the Direct Interpolation Element Method applied to scalar wave propagation problems, dealing particularly with the response of a bar subjected to an impact load. This benchmark problem, due to its numerical difficulties, is appropriate to analyze the formulation consistency. The proposed research aims to compare, in a preliminary manner, the accuracy of the Direct Interpolation technique versus the well-known Dual Reciprocity formulation, in terms of response and frequencies. Houbolt integration scheme has been selected as step-time procedure, due to its greater numerical stability.

Keywords: Acoustic Problems, Direct Interpolation Boundary Element Method, Radial Basis Functions.

1 Introdução

Diversos problemas de interesse em engenharia não possuem uma formulação integral suscetível de ser expressa em termos de integrais de contorno. Estes casos têm sido resolvidos preferencialmente através de técnicas numéricas discretas de domínio, tal como o Método dos Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Volumes Finitos, entre outros. Na utilização do Método dos Elementos de Contorno (MEC) [1], em específico, é preciso criar formulações alternativas, que permitam a conversão eficiente das integrais de domínio em integrais de contorno. Esta demanda é de grande importância para a difusão do MEC no meio industrial, pois torna-o uma técnica mais abrangente. Nesse sentido, o desenvolvimento de formulações baseadas em funções de base radial [2] tem sido uma das principais opções para realizar essa almejada transformação. A teoria e as aplicações da base radial alcançaram um progresso reconhecido, motivado por aplicações nas técnicas de elementos finitos sem malha [3].

A primeira iniciativa neste contexto foi feita por Nardini e Brebbia com a proposição da formulação denominada de Dupla Reciprocidade (MECDR) em problemas de dinâmica [4],[5]. Esta técnica usa uma sequência de funções de base radial para aproximar parte do núcleo das integrais de domínio e também emprega estrategicamente uma função primitiva expressa em termos de um Laplaciano ou um operador diferencial afim ao problema abordado para que as integrais de domínio sejam eliminadas.

Devido a MECDR foi possível proceder à simulação acessível de casos transientes, problemas de valor característico, resposta dinâmica e aqueles caracterizados por fontes ou ações internas, que resultam em integrais de domínio, anteriormente resolvidos de modo custoso e relativamente complexo [6]. Também uma maior variedade de aplicações pode ser resolvida pelo MEC, pois é empregada uma solução fundamental mais simples. Porém, a MECDR não é uma simples técnica de interpolação e sua formulação trabalha com duas funções primitivas da função de interpolação original, formando duas matrizes auxiliares que podem produzir efeitos numéricos prejudiciais adicionais [6],[7].

Não obstante a alguns resultados satisfatórios, a dupla reciprocidade esbarra em alguns problemas. Primeiramente, apresenta certas imprecisões numéricas resultantes de mau condicionamento matricial nos casos em que muitos pólos internos são necessários para melhor representar as propriedades internas, como a inércia. Isto é, ocorre no processamento dos esquemas incrementais de avanço no tempo, que comumente exigem matrizes de grande dimensão. Também há indicativos que a matriz de inércia possua imprecisões que se refletem sobremaneira na caracterização de frequências mais altas, presentes em problemas de resposta acústica. Desse modo, o uso dos tradicionais esquemas de avanço no tempo somente pode ser efetuado sob condições restritivas, quanto ao passo de integração, particularmente com elementos de contorno de baixa ordem.

Além disso, aplicações da dupla reciprocidade em três dimensões mostraram forte restrição à utilização das funções de base radial que foram bem sucedidas em aplicações bidimensionais [8],[9]. Embora possa se encontrar aplicações deste método para resolver problemas bidimensionais de Helmholtz [10], o mesmo não ocorre com problemas tridimensionais. A ausência de aplicações do MECDR em problemas tridimensionais certamente está relacionada ao desempenho insatisfatório do procedimento de interpolação, apesar da adição de procedimentos auxiliares, como funções globais ou estendidas[7]. Karur e Ramachandran [11], assim como Partridge [6] fizeram muitas simulações com vários tipos de funções em problemas bidimensionais, mas esses testes não foram repetidos para casos tridimensionais.

Cabe destacar que no caso da solução da Equação de Poisson, a MECDR oferece resultados satisfatórios. Mesmo quando as ações externas são dadas por função não harmônicas, uma série de estratégias eficientes garante resultados muito bons, como o RIM 23 e as funções de Goldberg [7]. Porém, o trato de problemas dinâmicos envolve outro nível de dificuldades.

Considerando a transformação de quaisquer integrais de domínio como foco principal de um modelo do MEC de maior abrangência no trato dos problemas da engenharia, recentemente foi proposta uma nova técnica baseada no uso de funções radiais, denominada interpolação direta com elementos de contorno (MECID) [12]. Apesar de ser semelhante ao MECDR em muitos aspectos, esta nova formulação não exige a construção de duas matrizes auxiliares que multiplicam os elementos de contorno clássicos matrizes H e G, uma vez que aborda diretamente o domínio integral, semelhante ao que é feito em um procedimento de interpolação usando uma função de base radial primitiva. Ao contrário da dupla reciprocidade, todo o núcleo da integral do domínio é interpolado, incluindo a solução fundamental.

O procedimento MECID foi aplicado com sucesso na solução de problemas de Poisson [12] e Helmholtz [13],[14]. Nessas aplicações, o desempenho do MECID foi claramente superior ao MECDR. A aplicação do MECID estendeu-se com sucesso também para domínios tridimensionais [15],[16], onde a dupla reciprocidade não foi aplicada, com êxito. Por fim é possível destacar que, apenas a transformação de uma integral de domínio em integral de contorno torna o MECID diferente de um procedimento de interpolação. Uma maior gama de funções radiais diferentes e um grande número de pólos ou pontos base podem ser usados sem problemas de instabilidade numérica.

2 Formulação Integral

Os problemas bidimensionais de propagação de ondas acústicas em meios homogêneos são governados pela seguinte eq. (1), diferencial parcial de segunda ordem [17],[18].

$$K\nabla^2 u(X) - \lambda \ddot{u} = 0 \quad c^2 = \frac{\lambda}{K} \quad (1)$$

A formulação integral inversa associada a esta equação pode ser obtida facilmente através de recursos bem conhecidos no contexto do MEC [1], gerando a seguinte expressão integral:

$$c(\xi)u(\xi, t) + \int_{\Gamma} u(X)q(\xi, X)^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi, X) d\Gamma = -c^2 \int_{\Omega} \ddot{u}(X, t)u^*(\xi, X) d\Omega \quad (2)$$

Na eq. (2), $u = u(x_1, x_2, t)$ significa um potencial escalar, que depende do problema físico, tal como pressão, deslocamento, flecha, entre outros; $X = X(x_1, x_2)$ sendo x_1 e x_2 as coordenadas cartesianas, c é a velocidade de propagação da onda e $\Omega(X)$ é o domínio físico do problema. Foi usada uma função auxiliar especial $u^*(\xi, X)$, denominada de solução fundamental. São impostas condições essenciais dadas pela prescrição do potencial ou condições de contorno naturais, expressas pela imposição de derivadas normais do potencial, normais ao contorno. As características dinâmicas do problema exigem a imposição de condições iniciais no domínio $\Omega(X)$, dadas por valores do potencial e sua derivada temporal no instante inicial.

Tanto a MECID quanto a MECDR utilizam-se de uma solução fundamental $u^*(\xi, X)$ corresponde à solução de um problema estacionário, governado pela Equação de Poisson, considerando um domínio infinito e uma fonte concentrada, aplicada num ponto específico ξ , dada matematicamente por uma função Delta de Dirac $\Delta(\xi, X)$. As expressões de $u^*(\xi, X)$ e da sua derivada normal $q^*(\xi, X)$ podem ser encontradas na literatura especializada e ambas dependem da distancia r entre o ponto fonte ξ e um ponto campo qualquer do domínio X . O coeficiente $c(\xi)$ é definido pela suavidade do contorno e pode ser calculado indiretamente através de um procedimento bem conhecido no contexto do MEC [19].

3 Técnica de Integração Direta

A técnica da integração direta tem natureza similar à dupla reciprocidade em muitos aspectos, porém distingue-se em pontos importantes. Embora aproxime-se o termo integral no lado direito da equação, utilizando uma sequência de funções de base radial, todo o núcleo da integral de domínio é interpolado, conforme mostrado a seguir pela eq. (3).

$$\ddot{u}(X, t)u^*(\xi, X) \cong F^j(X^j; X)\ddot{\alpha}_j^\xi \quad (3)$$

Para cada ponto ξ , a interpolação dada pela eq.(3) é feita através de uma varredura de todos os pontos de base X^j em relação com os pontos de domínio X , ponderada pelos coeficientes α . A quantidade de pontos base X^j deve ser igual à quantidade de pontos nodais. Assim, os coeficientes α podem ser obtidos através da solução de um sistema de equações algébricas. Tal como na MECDR, as funções de interpolação utilizadas $F^j(X^j, X)$ pertencem a classe das funções de base radial, isto é, o argumento da função é composto pela distância Euclidiana $r(X^j, X)$ entre os pontos de base X^j e os pontos de domínio X , daqui em diante denominados como pontos de interpolação. Em termos operacionais, geralmente é interessante a escolha dos pontos de base X^j em coincidência com pontos de interpolação e também com pontos nodais localizados no contorno.

Da mesma forma que a dupla reciprocidade, o MECID também usa uma função de interpolação primitiva ψ^i , sendo possível assim, escrever a integral do termo de inércia, dado na pela eq.(3) como:

$$\int_{\Omega} \ddot{\alpha}_j^\xi F^j(X^j; X) d\Omega = \int_{\Omega} [\ddot{\alpha}_j^\xi \psi_{,jj}^i(X^i; X)] d\Omega = \int_{\Gamma} [\ddot{\alpha}_j^\xi \psi_{,jj}^i(X^i; X) n_j(X)] d\Gamma = \ddot{\alpha}_j^\xi \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \quad (4)$$

A transformação apresentada na eq.(4) foi testada e deu resultados bastante satisfatórios em aplicações preliminares, que consistiam em cálculos de volumes e valores de imagem de funções [20],[21]. Igualmente foram realizadas simulações com o MEC para resolver problemas de Poisson, usando inclusive funções de base radial com suporte compacto [22]. A possível imprecisão gerada pelo uso de funções primitivas também foi verificada através da comparação a utilização do RIM [23]. Verificou-se que para um número adequado de pontos internos os resultados são equivalentes.

Geralmente, com a formulação clássica do MEC, os pontos campo são tomados em coincidência com os pontos campo ξ . Na MECID, para evitar singularidades e não usar dois conjuntos diferentes de entrada de dados, impõe-se um procedimento de regularização [14]. Por questões de espaço, o procedimento de discretização e o tratamento matricial desta equação não serão apresentados. Detalhes podem ser colhidos em trabalhos prévios [24]. A expressão final é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

4 Avanço no Tempo e Discretização

A discretização temporal e o posterior avanço no tempo são feitos através de métodos de integração direta, que buscam definir uma relação adequada, que permita calcular valores futuros a partir de resultados anteriores de uma forma consistente. Entretanto, o comportamento destes esquemas tradicionais de marcha no tempo com o MEC possui algumas particularidades. Inicialmente, apenas esquemas incondicionalmente estáveis devem ser utilizados; porém, as condições de estabilidade que são definidas em certos métodos de domínio não podem ser aplicadas diretamente ao MEC.

Segundo, o MEC possui uma formulação mista, cujo potencial e sua derivada normal são calculados simultaneamente. Em problemas dinâmicos, as frequências mais altas, geralmente calculadas numericamente com menor precisão, influenciam fortemente essas derivadas. Na dinâmica estrutural, por exemplo, é comum a resposta não conter modos mais altos, mas isso é diverso nos problemas de propagação de ondas. Assim, a formulação mista

do MEC solicita esquemas de marcha no tempo que possuam amortecimento numérico para dissipar a participação espúria desses modos mais altos na resposta e evitar instabilidades. Porém, é necessário avaliar a intensidade adequada do amortecimento para evitar a degradação completa da resposta, devido à eliminação de importantes componentes modais.

O equivalente à matriz de massa tanto da MECDR quanto na MECID é gerada pelo uso das funções de interpolação radial, introduzindo imprecisões adicionais ao modelo numérico, que devem influenciar o limite mínimo para o intervalo de tempo. O procedimento incremental se torna instável se o valor do intervalo de tempo escolhido for muito pequeno. Entretanto, uma malha mais refinada permite a utilização de um Δt menor sem que haja instabilidade, possibilitando resultados mais precisos. Muitos testes implementados na MECDR resolvendo uma barra submetida à carga de impacto identificaram o esquema Houbolt como o mais adequado entre os esquemas de marchas no tempo mais tradicionais. Os esquema Newmark e o Diferença Finita Central Estabilizado possuem quantidade insuficiente de amortecimento numérico.

Outros esquemas de marchas no tempo foram testados mais tarde 25, como Wilson- θ , Chung-Lee e HHT- α , este último uma adaptação do esquema de Newmark. Todos esses esquemas controlam a intensidade do amortecimento numérico, não apenas pelo tamanho do intervalo de tempo, mas também usando um parâmetro específico. O esquema de Chung-Lee possui a maior quantidade de amortecimento numérico, introduzindo suavidade excessiva na resposta. Em oposição, o efeito de amortecimento com o HHT- α é mais suave, exigindo alto valor de tempo para produzir resposta estável, perturbando a precisão. O esquema Wilson- θ permite controlar o amortecimento numérico e diminuindo o valor mínimo do intervalo de tempo solicitado para a integração estável, mas seus resultados são muito próximos do Esquema Houbolt. Neste trabalho, utiliza-se apenas do esquema Houbolt para obtenção das respostas. Foram testados alguns dos esquemas citados, mas seu comportamento foi similar ao observado nas experiências com a MECDR, e por isso não foram expostos.

5 Simulação Numérica

O problema da barra submetida à carga de impacto foi selecionado devido às suas conhecidas dificuldades numéricas, onde teoricamente todos os modos de vibração contribuem com resposta dinâmica. Além disso, a maior parte dos trabalhos nesta área com o MEC resolveu o citado problema. Assim, neste caso, os potenciais correspondem aos deslocamentos e as derivadas normais às tensões de tração. As características geométricas deste exemplo são apresentadas na Fig. 1.

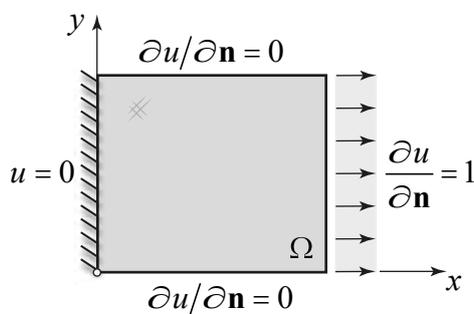


Figure 1. Barra submetida a Carga de Impacto e Condições de Contorno

A aplicação do esquema de integração Houbolt nos vetores aceleração dados pela eq. (5) resulta na seguinte equação incremental:

$$(2\bar{M} + \Delta t^2 \bar{H}) u_{n+1} - (\Delta t^2 \bar{G}) q_{n+1} = (5\bar{M}) u_n - (4\bar{M}) u_{n-1} + (\bar{M}) u_{n-2} \quad (6)$$

Na eq.(6), Δt é o intervalo de tempo da discretização e n os instantes temporais. Usando o esquema Houbolt, duas variáveis podem ser modificadas: a malha e o passo do avanço no tempo (Δt). Ressalta-se que a condição de estabilidade com o MEC é diferente daquela definida com os métodos clássicos de domínio, pois resulta em instabilidade se valores muito reduzidos do intervalo de tempo ou passo (Δt) são escolhidos, caso a malha não seja suficientemente refinada. Já o seu aumento reduz a precisão dos resultados, amortecendo a amplitude e distorcendo o período.

A primeira constatação mostrou que a aplicação da MECID não alterou sensivelmente o critério de instabilidade definido empiricamente com a MECDR. Na realidade, esta expectativa era cautelosa, pois os testes resolvendo

os problemas de Poisson e Helmholtz já haviam mostrado que MECID requer uma maior quantidade de pontos interpolantes no interior do que a MECDR para oferecer resultados razoáveis, pois todo o núcleo da integral de domínio referente à inércia é interpolado. Porém, a partir de certo nível de refinamento, seus resultados são satisfatórios.

Considerando uma malha com 164 nós de contorno (ELC) e 144 pontos internos (PI), tanto as curvas do potencial quanto as do fluxo desestabilizaram antes de 1s de resposta, quando se adotou valores de Δt menores do que 0,05s. Percebeu-se ainda que, considerando a estabilidade da resposta, não houve diferenças consideráveis nestes resultados e naqueles obtidos com uma malha mais rica com 324ELC/625PI para o mesmo passo. Entretanto, uma malha mais refinada permite a utilização de um Δt menor sem instabilidade, com resultados mais precisos. Para a malha esta malha de 324ELC/625PI se pode usar um Δt de 0,025s e seus resultados são mostrados na Fig.2. Obviamente, a desvantagem mais notável da utilização de malhas mais ricas é o tempo de processamento. Praticamente foram produzidas as mesmas oscilações observadas com a MECDR.

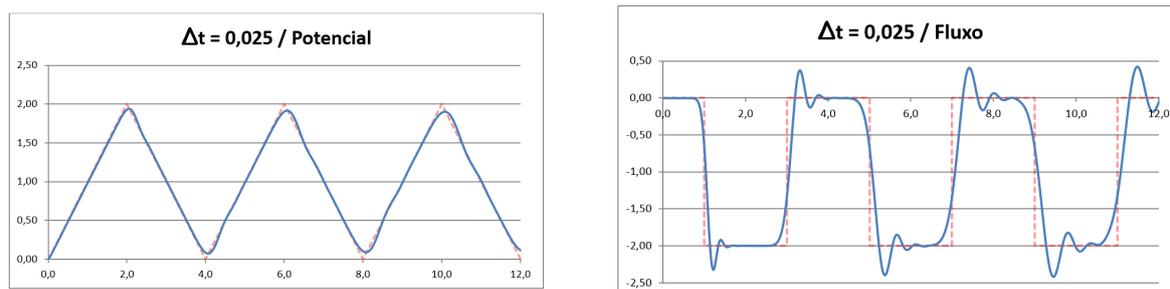


Figure 2. Comparação de Potencial e Fluxo ao longo do tempo usando passo de 0,025

Como as tensões são as variáveis mais sensíveis, apenas o comportamento do período inicial de resposta desta grandeza para a malha (324ELC/625PI) com dois intervalos de tempo distintos é examinado na Fig.3.

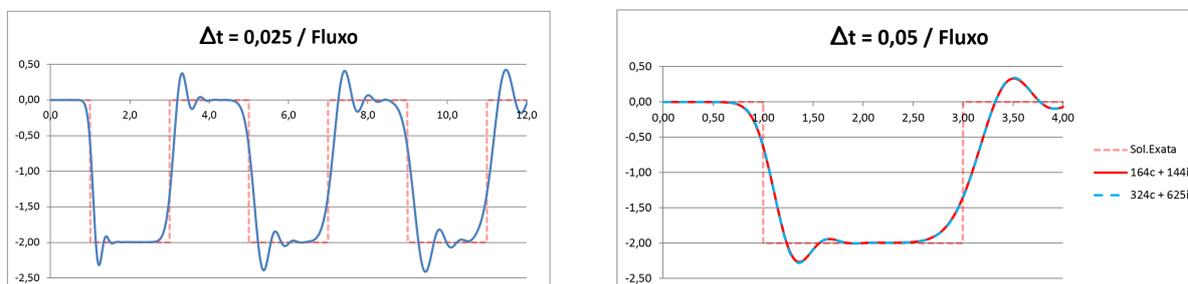


Figure 3. Comparação do Comportamento do Fluxo para passos de 0,025 e 0,05

Percebe-se ainda na Fig.3 a redução do incremento de tempo melhorou a verticalização da curva esperada, mas intensificou o fenômeno de Gibbs e esta perturbação se propagou ao longo de todo o processo. Diante destes resultados, uma melhor comparação da MECID com a MECDR se faz necessária. Na Fig.4 a seguir são mostrados os resultados obtidos com a MECDR usando duas diferentes malhas, com 24ELC/233PI, em cor azul, e outra com 56ELC/233PI, em cor vermelha, usando um mesmo Δt igual a XX, pois, incrementos de tempo menores causam instabilidade. Percebe-se que os resultados parecem ser melhores do que os do MECID, com exceção das oscilações espúrias no início do processo, que não aparecem com a mesma intensidade.

Considerando que o MECID produz um modelo mais consistente para a inércia, é preciso examinar o problema por outro ângulo. Porém, para melhor embasar a análise, apresentam-se a seguir as frequências naturais para barra engastada calculadas através do MECID e do MECID em trabalho anterior. Ressalta-se que os valores obtidos pela MECDR usaram o esquema de integração seletiva de Telles, enquanto os do MECID não o empregaram.

Na Fig. 5 pode-se perceber que a precisão do MECID no cálculo das frequências foi significativamente superior a da MECDR, mostrando que o modelo matemático da MECID na constituição da matriz de massa é efetivamente mais consistente. Assim, se tal precisão na matriz de inércia não se refletiu na qualidade da resposta numérica é preciso encontrar outras razões e estas podem estar ligadas ao esquema de discretização temporal ou mesmo ao problema em si.

Quanto ao problema da barra sob carga de impacto, trata-se de um caso numericamente difícil porque o conteúdo resposta é composto por infinitos modos de vibração. Porém, os primeiros são os mais importantes

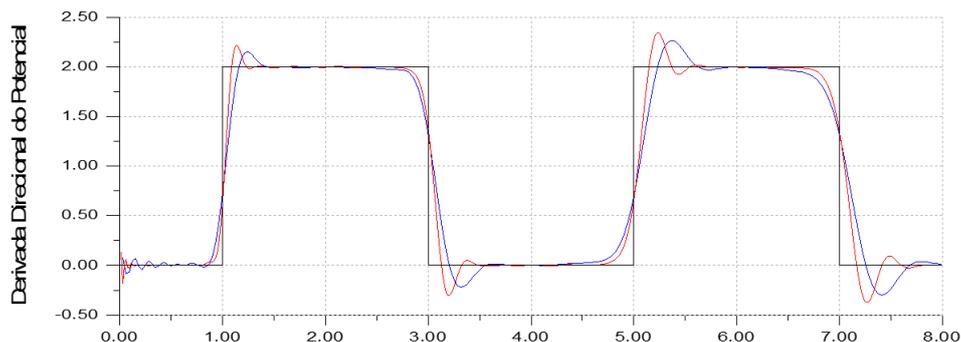


Figure 4. Comparação de Fluxo - Malhas - 24ELC/233PI e 56ELC/233PI - MECDR

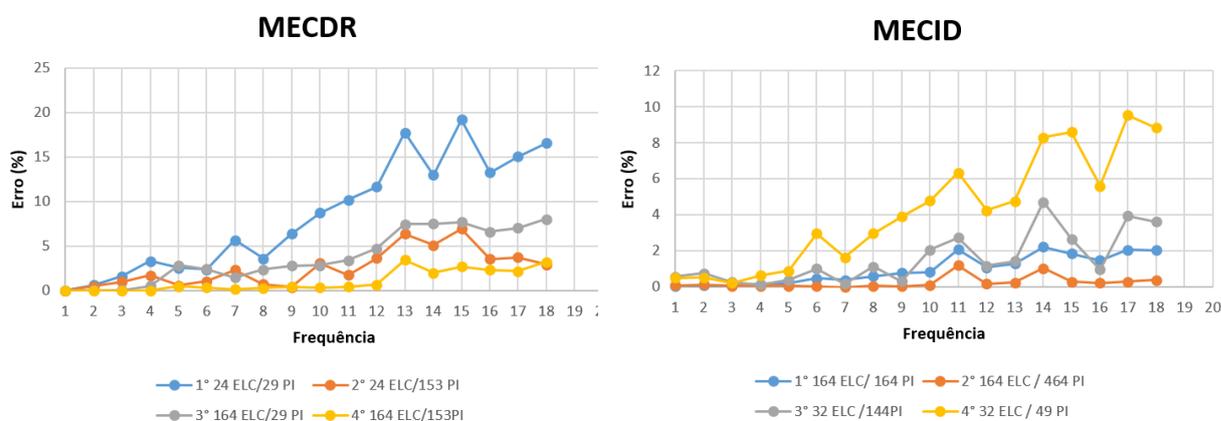


Figure 5. Comparação de Determinação de Frequências Naturais entre MECID e MECDR

e os modos secundários, embora afetem a resposta das tensões, são eliminados ao longo do tempo pelo forte amortecimento fictício do esquema de integração escolhido. Infere-se que a representação mais precisa de modos secundários pelo MECID foi pouco expressiva na melhoria da resposta e o forte amortecimento fictício não pode eliminar o efeito inicial produzido pelo fenômeno de Gibbs. O prosseguimento da pesquisa vai incluir necessariamente, os testes com outros esquemas já testados anteriormente. Também vai incluir a solução de outros problemas de propagação de onda em que não há periodicidade, pois assim a composição modal vai resultar em picos de resposta não necessariamente compostos por modos mais altos.

6 Considerações Finais

Há dificuldades significativas em controlar as vibrações espúrias devido aos modos mais altos na resposta à tração em métodos mistos, como o MEC. Considerando a solução incremental ao longo do tempo, os esquemas ditos incondicionalmente estáveis com amortecimento numérico são a escolha mais correta e entre os esquemas conhecidos. O modelo de Houbolt já havia oferecido resultados razoáveis com a MECDR e por isso foi escolhido para o início destas pesquisas. Contudo, tais esquemas se instabilizam com a MECDR caso o incremento de tempo seja muito pequeno e a malha não tenha o refinamento adequado. Havia uma expectativa que a melhor representação da inércia do sistema produziria melhores resultados tal como alteraria a dependência entre tempos de integração reduzidos e a necessidade de malhas mais refinadas, mas isso não se confirmou. Embora os resultados tenham mostrado que oscilações nos instantes iniciais foram mitigadas, verificou-se a persistência de oscilações espúrias ao longo do processo, que talvez sejam resultantes do conhecido Efeito de Gibbs. Observou-se ainda que a quantidade de pontos interpolantes internos pode ser ampliada sem problemas de instabilidade na MECID, mas a MECDR é capaz de funcionar com menor quantidade de pontos interpolantes. Os resultados são preliminares e é preciso concentrar as atenções no esquema de integração no tempo e também na solução de outros problemas complexos de acústica, sem protagonismo de modos vibracionais mais baixos, que tem solução numérica mais simples e não mostram as reais dificuldades do problema dinâmico. Os mais indicados são os casos em que há comportamento aperiódico, com picos de resposta resultantes da interferência de vários modos vibracionais.

References

- [1] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C., 2012. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer Science & Business Media.
- [2] Buhmann, M. D., 2003. *Radial basis functions: theory and implementations*, volume 12. Cambridge university press.
- [3] Fasshauer, G. E., 2007. *Meshfree approximation methods with MATLAB*, volume 6. World Scientific.
- [4] Nardini, D. & Brebbia, C., 1983. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied mathematical modelling*, vol. 7, n. 3, pp. 157–162.
- [5] Nardini, D. & Brebbia, C., 1985. Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis. In *Time-dependent and Vibration Problems*, pp. 191–208. Springer.
- [6] Partridge, P. W., Brebbia, C. A., et al., 2012. *Dual reciprocity boundary element method*. Springer Science & Business Media.
- [7] Golberg, M. & Chen, C., 1994. The theory of radial basis functions applied to the bem for inhomogeneous partial differential equations. *Boundary Elements Communications*, vol. 5, n. 2, pp. 57–61.
- [8] Bueno, F. & Partridge, P., 2011. A study of dual reciprocity for three dimensional models applied to the solution of pennes bioheat equation. *Beteq, XII*, pp. 182–189.
- [9] Bueno, F. R. & Partridge, P. W., 2013. An inverse model for locating skin tumours in 3d using the genetic algorithm with the dual reciprocity boundary element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 10, n. 6, pp. 1061–1079.
- [10] Ali, A., Rajakumar, C., & Yunus, S., 1995. Advances in acoustic eigenvalue analysis using boundary element method. *Computers & structures*, vol. 56, n. 5, pp. 837–847.
- [11] Karur, S. R. & Ramachandran, P., 1994. Radial basis function approximation in the dual reciprocity method. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 20, n. 7, pp. 59–70.
- [12] Loeffler, C. F., Cruz, Á. L., & Bulcão, A., 2015a. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 50, pp. 97–108.
- [13] Loeffler, C. F., Mansur, W. J., de Melo Barcelos, H., & Bulcão, A., 2015b. Solving helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 61, pp. 218–225.
- [14] Loeffler, C. F. & Mansur, W. J., 2017. A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 74, pp. 14–18.
- [15] Barbosa, J., Loeffler, C., & Lara, L., 2019. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 108, pp. 295–300.
- [16] Barbosa, J., Lara, L., & Loeffler, C., 2020. The domain superposition technique for solving three-dimensional piecewise homogeneous laplace problems. *International Journal of Solids and Structures*.
- [17] Graff, K. F., 2012. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation.
- [18] Butkov, E., 1988. *Física matemática*. Livros Técnicos e Científicos.
- [19] Brebbia, C., 1982. *Boundary element methods in engineering*. Springer-Verlag Berlin.
- [20] Loeffler, C. F., Cruz, Á. L., & Bulcão, A., 2013. Aproximação direta de integrais de domínio usando funções de base radial com o método dos elementos de contorno. *Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Pirenópolis, GO, Brazil*.
- [21] Cruz, A. & Loeffler, C., 2013. Avaliação da precisão e outras propriedades numéricas na integração ao longo de superfícies geradas por funções de base radial. *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Sudeste*.
- [22] Loeffler, C., Zamprogno, L., Mansur, W., & Bulcão, A., 2017. Performance of compact radial basis functions in the direct interpolation boundary element method for solving potential problems. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 113, n. 3, pp. 367–387.
- [23] Campos, L. S., Loeffler, C. F., Netto, F. O., & dos Santos, Á. d. J., 2020. Testing the accomplishment of the radial integration method with the direct interpolation boundary element technique for solving helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 110, pp. 16–23.
- [24] Loeffler, C. & Mansur, W., 1989. Dual reciprocity boundary element formulation for transient elastic wave propagation analysis in infinite domains. *Advances in Boundary Elements*, vol. 2, pp. 1023–1036.
- [25] Loeffler, C. F., Sessa, J. C., & Castillo, G. A. V., 2009. Novos testes computacionais com a formulação com dupla reciprocidade do método dos elementos de contorno em problemas de dinâmica. *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC*.