

## Avaliação de integrais no sentido do Valor Principal de Cauchy em elementos lineares contínuos e descontínuos

Dalton Riva de Paula<sup>1</sup>, Luiz Alkimin de Lacerda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná  
Av. Cel. Francisco Heráclito dos Santos, 210, CEP 81.531-980, Caixa Postal 19.011, Curitiba/Paraná, Brasil  
daltondepaula@gmail.com, alkimin@lactec.org.br*

**Abstract.** This article aims to present expressions for the calculation of strongly singular integrals existing in the Cauchy Principal Value sense. The expressions are directly applicable to two-dimensional elasticity problems with the Boundary Element Method and can be easily adapted to other problems. In particular, general expressions are presented for the calculation in continuous and discontinuous linear boundary elements that can be easily adapted for direct calculation in classic Boundary Element Method computer codes. The discontinuous element is considered in a parametric form. With this direct approach, the rigid body movement artifice or equivalent technique for axisymmetric problems can be avoided. The validation of the presented expressions are done through a simple example. Basically, integration results from the derived expressions are compared with those obtained with the classic indirect evaluation of singular integrals with the rigid body movement. The expected correlation is demonstrated in the results.

**Keywords:** Boundary Element Method, Cauchy Principal Value, elasticity.

**Resumo.** Este artigo tem a finalidade de apresentar expressões para o cálculo de integrais fortemente singulares existentes no sentido do Valor Principal de Cauchy. As expressões são diretamente aplicáveis a problemas de elasticidade bidimensional com o Método dos Elementos de Contorno. Em particular, são apresentadas expressões gerais para o cálculo em elementos de contorno linear contínuos e descontínuos que podem ser facilmente adaptadas a códigos computacionais. O elemento descontínuo é considerado em uma forma paramétrica. Com essa abordagem direta, o artifício de movimento rígido do corpo ou técnica equivalente para problemas axissimétricos pode ser evitado. A validação das expressões apresentadas é feita através de um exemplo simples. Basicamente, os resultados de integração das expressões derivadas são comparados com os obtidos com a avaliação indireta clássica de integrais singulares com o movimento rígido do corpo. A correlação esperada é demonstrada nos resultados.

**Palavras-chave:** Método de Elementos de Contorno, Valor Principal de Cauchy, Elastostática.

### 1 Introdução

Em problemas de elasticidade, pode-se formular o Método dos Elementos de Contorno (MEC) a partir da Identidade de Somigliana 1,

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, x)t_j(x)d\Gamma(x), \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

onde  $U_{ij}(\xi, x)$  e  $T_{ij}(\xi, x)$  são as soluções fundamentais do problema,  $u_j$  e  $t_j$  são as componentes de deslocamento e força de superfície ao longo do contorno  $\Gamma$  do problema e  $C_{ij}(\xi)$  é uma constante relacionada à geometria do contorno em  $\xi$ .

Considerando-se meios bidimensionais elásticos e isotrópicos as soluções fundamentais de  $U$  e  $T$  são dadas por:

$$U_{ij}(\xi, x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\} \quad (2)$$

$$T_{ij}(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (3)$$

onde  $r = |\xi - x|$  é a distância entre o ponto de colocação  $\xi$  e um ponto campo  $x$  do contorno ou domínio do problema (ver Figura 1),  $\mu$  é igual a  $E/(2(1+\nu))$ ,  $E$  é o Módulo de Elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\delta_{ij}$  é o Dirac de Kronecker e  $n$  é o vetor normal ao contorno no ponto  $x$ .

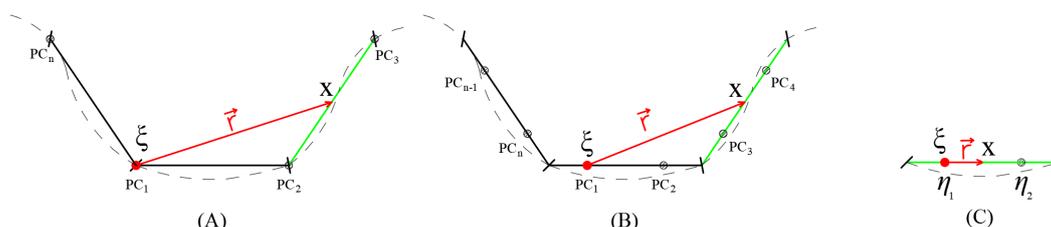


Figura 1. (A) Discretização do elemento contínuo; (B) Discretização do elemento descontínuo (C) Ponto de colocação no elemento integrado. [Autor]

Na solução de problemas com o MEC discretiza-se a geometria do contorno com elementos unidimensionais, que podem ser retos ou curvos. Uma das principais vantagens do emprego do MEC é a dimensão reduzida da discretização, onde podem ser utilizados elementos de contorno com variados números de nós funcionais, que usualmente estão associados ao grau das funções de interpolação empregados [1].

O método clássico é baseado na formação de um sistema de equações onde cada equação é montada a partir da fixação de um ponto de fonte ou ponto de colocação  $\xi$  em um nó funcional da malha de discretização e posterior integração de todos os elementos que a formam. Um esquema ilustrativo deste processo é apresentado na Figura 1 com elementos lineares contínuos (Figura 1 (A)) e descontínuos (Figura 1 (B)) que foram utilizados na modelagem de parte de um contorno bidimensional.

Uma peculiaridade do MEC presente em formulações bi e tridimensionais é a presença de singularidades fracas e fortes quando o ponto de colocação se encontra no elemento a ser integrado, como esquematizado na 1 (C) onde observa-se possibilidade de  $r$  ser igual a zero. As singularidades fracas são mais facilmente integradas ou calculadas analiticamente em determinados casos particulares. Por outro lado, a singularidade forte requer uma abordagem mais cuidadosa, normalmente envolvendo integrações no sentido do Valor Principal de Cauchy. Rizzo e Shippy [2] apontaram as dificuldades deste cálculo em problemas de elastostática. Kutt [3] propôs o uso de técnicas numéricas para o cálculo do Valor Principal de Cauchy. Usualmente, emprega-se o artifício do Movimento de Corpo Rígido para a avaliação indireta de integrais deste tipo [4]. Este artifício consiste na imposição de um deslocamento unitário do domínio 'rígido', em cada uma das direções do eixo cartesiano, reduzindo a Equação 1 aos termos presentes do lado esquerdo, o que facilmente permite o isolamento e cálculo do trecho singular da integral de contorno por meio da integração do trecho (não singular) restante em cada equação.

Buscando uma abordagem direta, Guiggiani e Casalini [5] apresentaram um método para o cálculo das integrais com singularidade forte de forma direta, no sentido do Valor Principal de Cauchy. O método de cálculo resulta em expressões analíticas simples e integrações numéricas, cuja aplicação pode ser estendida a diversos problemas e formulações do MEC.

Este artigo tem por objetivo empregar o método de cálculo proposto por Guiggiani e Casalini [5] e desenvolver expressões diretas relacionadas às integrações singulares fortes em elementos lineares descontínuos. Os elementos são descritos de forma paramétrica de tal modo que as expressões podem ser facilmente adaptadas a diferentes códigos computacionais. Diferenças e simplificações obtidas ao se considerar elementos retos são apresentados.

Em particular, é tratada a integral do termo que contém a solução fundamental  $T_{ij}(\xi, x)$ , quando o ponto de colocação  $\xi$  se encontra no elemento descontínuo sendo integrado. Essa singularidade pode ser claramente identificada na Equação 3, que contém o termo  $r$  no denominador. Os resultados obtidos com as expressões

deduzidas são comparados a resultados obtidos com o artifício do Movimento de Corpo Rígido em um problema simples.

## 2 Equação Integral Discretizada

A implementação numérica da Equação 1 requer a discretização do contorno  $\Gamma$  em  $N_e$  elementos, onde cada elemento contém  $p - 1$  nós funcionais e funções de interpolação  $N'(\eta)$  de ordem  $p$ , sendo  $\eta$  a variável intrínseca local, que definem a aproximação adotada para as grandezas deslocamento e força de superfície. A Equação (4) é a forma discretizada da Equação Integral de Contorno.

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{c=1}^p u_j^{n,c} \int_{\Gamma_n} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) = \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{c=1}^p t_j^{n,c} \int_{\Gamma_n} U_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) \quad (4)$$

onde  $\Gamma_n$  é o  $n$ ésimo elemento do contorno a ser integrado e  $u_j^{n,c}$  e  $t_j^{n,c}$  são os valores nodais de deslocamento e força de superfície do elemento  $n$  associados às funções de interpolação  $N'_c$ .

Considerando-se funções lineares ( $p = 2$ ) tem-se,

$$\begin{cases} N'_1(\eta) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \\ N'_2(\eta) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (-\eta_1 + \eta) \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  definem as posições dos nós funcionais no sistema local  $\eta$  ( $-1 \leq \eta \leq +1$ ). A posição do nó funcional no interior do elemento caracteriza a descontinuidade do elemento, como ilustrado na Figura 2 (A),

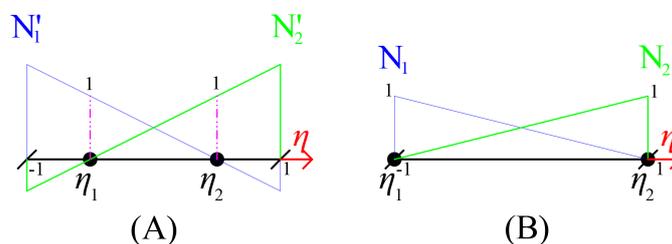


Figura 2. (A) Funções de interpolação lineares do elemento descontínuos e (B) Funções que modelam a geometria reta do elemento. [Autor]

Observa-se que se  $\eta_1 = -1$  e  $\eta_2 = +1$  as Equações (5) conduzem às funções de interpolação  $N_1$  e  $N_2$ , usualmente empregadas em elementos lineares contínuos (ver Figura 2 (B)).

$$\begin{cases} N_1(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta) \\ N_2(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta) \end{cases} \quad (6)$$

Neste trabalho essas funções são utilizadas para definir a geometria linear do elemento de contorno onde a posição do ponto campo  $x_i$  é calculada em função das posições nodais extremas do elemento,

$$x_i = x_i^1 N_1(\eta) + x_i^2 N_2(\eta) \quad (7)$$

onde  $x_i^1$  e  $x_i^2$  são as componentes das coordenadas geométricas dos nós no extremo do elemento.

### 3 Integrais Fortemente Singulares

A obtenção de uma expressão direta para a integral imprópria no lado esquerdo da Equação (4) é o objetivo desta seção. Esta situação ocorre quando o ponto fonte  $\xi$  está no primeiro ou segundo nó funcional elemento  $\Gamma_n$  sendo integrado. A função  $T_{ij}(\xi, x)$  possui singularidade forte  $O(1/r)$  e em uma condição geral a integral somente existe no sentido do Valor Principal de Cauchy. Seja  $S$  uma coordenada definida no espaço  $\Gamma$  então, no espaço global, pode-se ilustrar os dois possíveis casos de singularidade conforme a Figura 3, onde o nó geométrico inicial do elemento é definido por  $S_a$  e o nó final por  $S_c$ . A singularidade está presente no nó  $S_b$ , que pode ser a coordenada definida pelo primeiro ou pelo segundo nó funcional. O Valor Principal de Cauchy é definido como:

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{S_a}^{S_b - \varepsilon} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) + \int_{S_b + \varepsilon}^{S_c} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) \right] \quad (8)$$

Com a introdução do sistema local  $\eta$ ,  $d\Gamma = J_1(\eta) d\eta$ , a Equação (8) é reescrita como:

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{\eta_s - \Delta\varepsilon} T_{ij}(\eta_s, \eta) N'_c(\eta) J_1(\eta) d\eta + \int_{\eta_s + \Delta\varepsilon}^1 T_{ij}(\eta_s, \eta) N'_c(\eta) J_1(\eta) d\eta \right] \quad (9)$$

Em elementos curvos é comum que  $J_1(\eta) \neq \text{Constante}$ , mas em elementos de geometria reta,  $J_1(\eta) = \text{Constante} = J_1 = L/2$ , onde  $L$  é o tamanho do elemento reto,  $\eta_s$  é a coordenada local do ponto singular e por meio de série de Taylor demonstra-se que  $\Delta\varepsilon = \varepsilon/J_1(\eta_s)$ . E demonstra-se também que  $T_{ij}(\eta_s, \eta)$  pode ser escrito como  $f_{ij}(\eta_s, \eta)/r(\eta_s, \eta)$  onde  $f_{ij}$  é uma função analítica. Efetuando-se um novo mapeamento local em cada trecho do elemento, antes e após a singularidade, sistemas  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3, tem-se

$$\begin{cases} \eta(\eta_s, \eta_\alpha) = \frac{(\eta_s+1)}{2}\eta_\alpha + \frac{(\eta_s-1)}{2} \\ \frac{d\eta}{d\eta_\alpha} = \frac{(\eta_s+1)}{2} \\ \eta(\eta_s, \eta_\beta) = -\frac{(\eta_s-1)}{2}\eta_\beta + \frac{(\eta_s+1)}{2} \\ \frac{d\eta}{d\eta_\beta} = -\frac{(\eta_s-1)}{2} \end{cases} \quad (10)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\varepsilon_\alpha} \frac{f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)} N'_c(\eta_\alpha) J_1(\eta) J_{2\alpha}(\eta_\alpha) d\eta_\alpha \right] + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\varepsilon_\beta}^1 \frac{f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{r_\beta(\eta_s, \eta_\beta)} N'_c(\eta_\beta) J_1(\eta) J_{2\beta}(\eta_\beta) d\eta_\beta \right] \end{aligned} \quad (11)$$

onde  $r_\alpha$  é a distância entre o ponto campo no trecho do elemento anterior à singularidade e o ponto fonte,  $r_\beta$  é definido de maneira similar. E que  $J_{2\alpha}(\eta_\alpha) = \frac{(\eta_s+1)}{2}$  e  $J_{2\beta}(\eta_\beta) = \frac{(1-\eta_s)}{2}$ ,  $\Delta\varepsilon_\alpha = J_{2\alpha}(\eta_\alpha)/\Delta\varepsilon$ ,  $\Delta\varepsilon_\beta = J_{2\beta}(\eta_\beta)/\Delta\varepsilon$ . Então, a Equação (11) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\varepsilon_\alpha} \frac{f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)} N'_c(\eta_\alpha) \frac{L}{2} \frac{(\eta_s+1)}{2} d\eta_\alpha \right] + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\varepsilon_\beta}^1 \frac{f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{r_\beta(\eta_s, \eta_\beta)} N'_c(\eta_\beta) \frac{L}{2} \frac{(1-\eta_s)}{2} d\eta_\beta \right] \end{aligned} \quad (12)$$

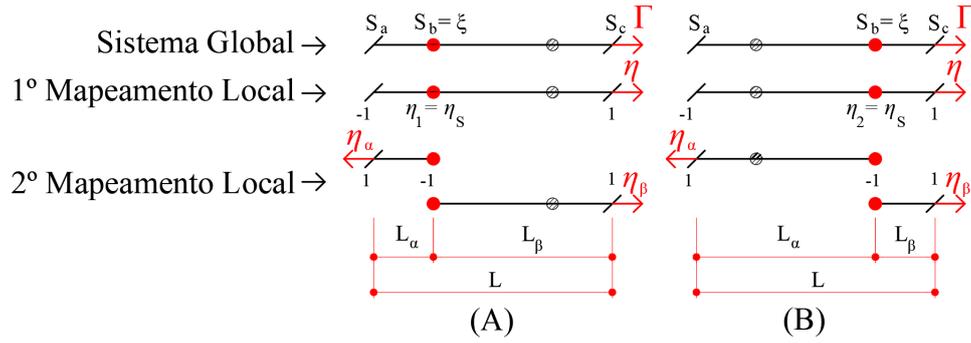


Figura 3. Divisão do elemento em segmentos para o (A)-Caso 1 e (B)-Caso 2. [Autor]

onde,

$$\begin{cases} r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) = -\frac{L}{4} [(\eta_s + 1)(\eta_\alpha - 1)] \\ r_\beta(\eta_s, \eta_\beta) = \frac{L}{4} [(1 - \eta_s)(\eta_\beta + 1)] \end{cases} \quad (13)$$

Definindo,

$$h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) = -f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) N_c'(\eta_\alpha) \quad (14)$$

$$h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) = f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) N_c'(\eta_\beta) \quad (15)$$

A Equação (12) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N_c' d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\varepsilon_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1+\Delta\varepsilon_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta \right] \quad (16)$$

Somando e subtraindo a mesma quantidade  $h_{ij}^\alpha(1)$  e  $h_{ij}^\beta(-1)$  nas integrais da Equação (16), respectivamente,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N_c' d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\varepsilon_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^{1-\Delta\varepsilon_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha \right] + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\varepsilon_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(-1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + \int_{-1+\Delta\varepsilon_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(-1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Os limites da primeira e da terceira integral do lado direito da equação (17) são regulares, ao passo que e os limites da segunda e da quarta integral podem ser avaliados analiticamente. Sabendo-se que para a existência do Valor Principal de Cauchy  $h_{ij}^\alpha(1) = h_{ij}^\beta(-1)$ , resulta que,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N_c' d\Gamma &= \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_\beta) - h_{ij}^\beta(-1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + \\ &- h_{ij}^\alpha(1) \ln |J_{2\alpha}(\eta_\alpha)| + h_{ij}^\beta(-1) \ln |J_{2\beta}(\eta_\beta)| \end{aligned} \quad (18)$$

Tabela 1. Resultados obtidos para a submatriz diagonal associada ao ponto de colocação, considerando o MCR e o VPC. [Autor]

|                           |         | MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO |                   | VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY |                    |
|---------------------------|---------|---------------------------|-------------------|---------------------------|--------------------|
|                           |         | $j = 1$                   | $j = 2$           | $j = 1$                   | $j = 2$            |
| $ \eta_1  = \eta_2 = 1/2$ | $i = 1$ | 0,500000055153067         | 0,040988574702959 | 0,5000000000000000        | 0,0409886599716459 |
|                           | $i = 2$ | -0,0409887427428079       | 0,499999965161484 | -0,0409886599716459       | 0,5000000000000000 |

A Equação (18) mostra que o Valor Principal de Cauchy pode ser calculado por meio de duas integrais regulares e uma fórmula logarítmica. Utilizando-se as Equações (5) e (10) é fácil demonstrar que, para  $\eta_s = \eta_1$  e  $c = 2$  ou  $\eta_s = \eta_2$  e  $c = 1$ , as integrais da Equação (16) são regulares.

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N_2' d\Gamma = - \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(-\eta_1 + 1)}{2} \right] f_{ij}^\alpha(\eta_1, \eta_\alpha) d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(-\eta_1 + 1)}{2} \right] f_{ij}^\beta(\eta_1, \eta_\beta) d\eta_\beta \tag{19}$$

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N_1' d\Gamma = - \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_2 - 1)}{2} \right] f_{ij}^\alpha(\eta_2, \eta_\alpha) d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \frac{(\eta_2 - 1)}{2} \right] f_{ij}^\beta(\eta_2, \eta_\beta) d\eta_\beta \tag{20}$$

No caso particular, quando  $\eta_1 = -1$  e  $\eta_2 = 1$ , a definição do Valor Principal de Cauchy deve ser ajustada uma vez que o nó funcional passa a ser comum a dois elementos vizinhos. Essa dedução é apresentada em detalhes por Guiggiani e Casalini [5]. De maneira simplificada, nota-se que as partes finitas da integração alfa e beta da Equação (18) tomadas separadamente, correspondem às parcelas que deverão ser superpostas em integrações de elementos vizinhos para o cálculo do VPC.

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N_1' d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha - h_{ij}^\alpha(1) \ln |J_{2\alpha}(\eta_\alpha)|, \text{ Para } \eta_s = \eta_1 \tag{21}$$

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N_2' d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_\beta) - h_{ij}^\beta(-1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + h_{ij}^\beta(-1) \ln |J_{2\beta}(\eta_\beta)|, \text{ Para } \eta_s = \eta_2 \tag{22}$$

#### 4 Resultados Numéricos

Um problema simples de placa plana é modelado para apresentar a validação das expressões apresentadas. Uma placa de 6 x 6 m é modelada com 4 elementos lineares descontínuos, conforme ilustrado na Figura 4 (A). Na Figura 4 (B) são ilustradas as condições de contorno e numeração dos nós funcionais. O material utilizado para a placa possui coeficiente de Poisson 0,3 e Módulo de Elasticidade longitudinal  $E = 200\text{GPa}$ .

Os resultados obtidos pelo artifício do Movimento de Corpo Rígido, MCR, e pela integração direta no sentido do Valor Principal de Cauchy, VPC, são apresentadas na Tabela (1).

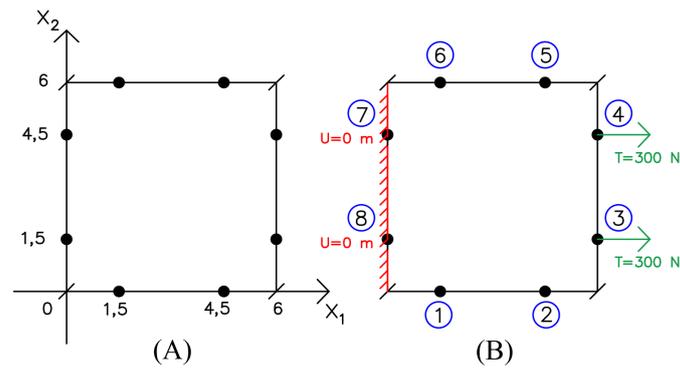


Figura 4. (A) Geometria do placa plana em coordenadas cartesianas; (B) Condições de contorno adotadas. [Autor]

## 5 Conclusão

Esse trabalho apresentou expressões gerais para o cálculo em elementos de contorno linear contínuos e descontínuos que podem ser facilmente adaptadas a códigos. As expressões foram baseadas na técnica proposta por Guiggiani e Casalini [5] para o cálculo direto das integrais com singularidade forte existentes nos cálculos clássicos do MEC para elementos contínuos.

As expressões obtidas foram validadas por meio de um simples exemplo numérico, onde pode ser observada uma ótima correlação de resultados da integração direta VPC com resultados obtidos com o Movimento de Corpo Rígido.

## References

- [1] ALIABADI, M. H.; WROBEL, L. C., 2002. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*. Zentralblatt Math.
- [2] Rizzo, F. J., 1967. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Q. Appl. Math.*, vol. 25, pp. 83–95.
- [3] Kutt, H. R., 1975. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerische Mathematik*, vol. 24, pp. 205–210.
- [4] BREBBIA, Carlos Alberto; DOMINGUEZ, J., 1989. *Boundary Elements An Introductory Course*. ed. McGraw-Hill.
- [5] GUIGGIANI, Massimo; CASALINI, P., 1987. Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary. *Methel Comput. Modelling*, vol. 24, pp. 1711–1720.