

A BEM formulation with Tangent Operator for cohesive crack propagation modeling

Luís Philipe Ribeiro Almeida¹, Eduardo Toledo de Lima Junior¹, João Carlos Cordeiro Barbirato¹

¹Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas
Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceió, Alagoas, Brasil
luisphilipealmeida@lccv.ufal.br, limajunior@lccv.ufal.br, jccb@lccv.ufal.br

Abstract. This work presents a Boundary Element Method (BEM) formulation for cohesive crack propagation analysis, in a 2D approach. The fracture effects are captured by using dipoles of stresses, with the introduction of an initial stress field to represent the cohesive zone. This formulation represents the presence of the Fracture Process Zone (FPZ) with only three algebraic equations (equations related to stress correction) per source point located in the crack line. For comparison, dual formulation requires four algebraic equations (displacements and forces) per source point, and the multi-domain technique requires eight algebraic equations. The consistent Tangent Operator (TO) is derived for the linear, bilinear and exponential cohesive laws, in order to speed up the nonlinear solution. Some examples are presented to illustrate the robustness of the Dipole BEM/TO formulation, including multiple crack analysis in mixed fracture mode. The responses obtained using this new formulation are compared with experimental and numerical data available in the literature, and in all applications, the numerical efficiency of the TO operator is presented.

Keywords: Cohesive Fracture Mechanics, Boundary Element Method, Tangent Operator, Multiple Crack Analysis.

1 Introdução

A mecânica da fratura é uma ferramenta eficiente e robusta para representação realista da ruptura dos sólidos, considerando-se que o surgimento e crescimento das descontinuidades explicam o colapso do material. Uma grande parcela dessas contribuições concentra-se na aplicação de modelos numéricos para análise da propagação de fissuras em sólidos planos.

De forma geral, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) destaca-se como uma poderosa ferramenta de análise, particularmente em casos que lidam com concentração de tensões e/ou problemas cujo domínio seja estendido ao espaço semi-infinito ou infinito. Assim, o MEC se caracteriza como uma eficiente técnica numérica para problemas de fratura, uma vez que, sem a exigência de malha de domínio, usualmente empregada em outras técnicas numéricas, descreve-se naturalmente a concentração de tensões nas proximidades das pontas das fissuras.

Alguns trabalhos apresentaram formas alternativas para modelagem de estruturas com fissuras partindo-se de integrais de contorno, uma dessas alternativas diz respeito à utilização da técnica de sub-regiões para a análise do crescimento de fissuras entre dois contornos [1]. Outra importante alternativa é chamada de método de descontinuidade de deslocamentos, cuja abordagem consiste na introdução de parâmetros desconhecidos através da diferença de deslocamentos entre as superfícies da fissura [2].

O método dos elementos de contorno dual (MEC dual), é uma abordagem amplamente utilizada para análise de fraturamento, e é baseado no uso de equações integrais singular e hipersingular ao longo do crescimento da fissura. Alguns trabalhos importantes devem ser mencionados, Saleh e Aliabadi [3], Chen e Hong [4], Citarella *et al.* [5] e Citarella *et al.* [6].

Outra metodologia para análise do processo de fratura é baseada no emprego de um campo de tensões

iniciais para representar a zona coesiva, a partir da introdução de dipolos de tensão. Seguindo esta linha de pesquisa, deve-se destacar os trabalhos de Barbirato e Venturini [7] e Oliveira e Leonel [8]. Além disso, é importante mencionar que esta formulação utiliza apenas três equações na solução do problema de propagação de fissuras para cada ponto fonte posicionado no elemento da fissura. Em comparação, o clássico MEC dual utiliza quatro equações algébricas por ponto fonte.

Grande parte das formulações do MEC para problemas de fratura se concentram no uso trivial do esquema de Newton para solução do sistema não-linear, o que leva a um maior número de iterações para convergência. Uma alternativa é o chamado Operador Tangente (OT), o qual carrega as informações das derivadas das leis coesivas. Alguns trabalhos que se utilizam desse operador em conjunto com o MEC dual podem ser mencionados, como Leonel e Venturini [9] e Cordeiro e Leonel [10].

Neste trabalho, a formulação do MEC dipolo é aplicada a problemas da fratura coesiva, incluindo múltiplas fissuras em modo misto de propagação. Emprega-se o modelo proposto por Hillerborg *et al.* [11], e as leis linear, bilinear e exponencial são utilizadas. Aplicações são apresentadas para demonstrar a eficiência e robustez do acoplamento MEC Dipolo/OT. Em todos os exemplos, uma análise numérica de eficiência do OT é apresentada.

2 Formulação do MEC dipolo

Neste capítulo, será apresentada a formulação do MEC para análise de sólidos fraturados utilizando-se o modelo coesivo proposto por Hillerborg *et al.* [11]. Os efeitos de separação da estrutura são modelados por meio da imposição de um campo de tensões iniciais, para caracterização da descontinuidade (fissura). Os deslocamentos e tensões no regime elástico são calculados de maneira usual do MEC, e estes são corrigidos por meio da introdução dos dipolos.

A representação integral do campo de deslocamentos considerando tensões iniciais σ_{jk}^0 é desenvolvida com base no trabalho de Brebbia [12], excluindo-se o termo de forças de volume, a integral tem a seguinte forma:

$$c_{ik}u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c \quad (1)$$

na qual p_{ik}^* , u_{ik}^* e ε_{ijk}^* representam os valores da solução fundamental de Kelvin para forças de superfície, deslocamentos e deformações respectivamente e Ω_c a parte do domínio onde a parcela das tensões iniciais atua. Considerando a região Ω_c definida na Figura 1, estreita e limitada pelo contorno Γ_c , é possível estabelecer que Γ_c é composto por Γ_c^1 e Γ_c^2 .

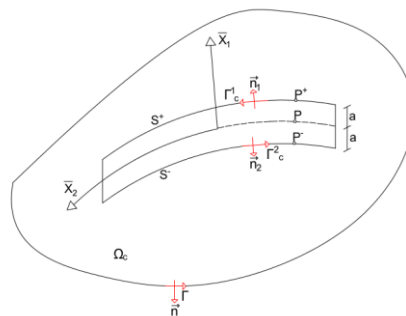


Figura 1. Sub-região estreita de tensões iniciais

A Equação (1) pode ser simplificada após algumas manipulações matemáticas, considerando-se que $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$ (fratura vertical ascendente) e sabendo-se que $\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\Gamma_c} G_{ij}^l q_j^l d\Gamma$,

$$c_{ik}u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c} G_{ij}^k q_j^k d\bar{\Gamma} \quad (2)$$

O termo q_j^k representa o conjunto de dipolos responsável por caracterizar uma descontinuidade em deslocamentos. Desta forma, a Eq. (2) está definida, sendo,

$$G_{ij}^k = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[3 - 4\nu \left(r_{,k} \delta_{ij} - r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right) \right] \quad (3)$$

onde G representa o módulo de cisalhamento transversal, e ν o coeficiente de Poisson. A equação integral que fornece o estado de tensão em pontos internos, Eq. (4), é obtida por meio da representação integral para deslocamentos, Eq. (2), diferenciando-a e a substituindo na lei de Hooke generalizada,

$$\sigma_{im} = -\int_{\Gamma} S_{imk} u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{imk} p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c} G_{ij}^{ml} q_j^l d\Gamma_c + g_{ij}^{ml} [\sigma_{jl}(p)] \quad (4)$$

sendo,

$$g_{ij}^{ml}(p) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{im}^0(p) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A partir da Eq. (2), os deslocamentos para quaisquer pontos no domínio para uma dada distribuição de quadripolos podem ser obtidos, e para tanto, a representação da abertura normal da fissura pode ser realizada. Essa abertura é tratada como uma diferença de deslocamentos entre dois pontos (P^+ e P^-) situados em faces opostas, sobre os contornos Γ_c^1 e Γ_c^2 respectivamente, levando-se em consideração que a Eq. (2), contém uma singularidade r^{-1} , a diferença de deslocamentos entre os dois pontos deve ser avaliada a partir de uma análise limite, esse procedimento permite a obtenção de termos independentes dados em função de dipolos [8]. A diferença de deslocamentos entre os dois pontos pertencentes a faces opostas fornece a relação entre abertura da fissura, o que conduz ao resultado:

$$\Delta w = \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} u^{P^+} - u^{P^-} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix}^P \quad (6)$$

2.1 Discretizações

Com a definição da equação integral para tensões iniciais, Eq. (4), e da contribuição dos dipolos na abertura das fissuras, Eq. (6), faz-se necessária a transformação dessas equações para a forma matricial, a fim de facilitar a implementação computacional desses termos. A Eq. (2) é matricialmente escrita como,

$$HU = GP + KQ \quad (7)$$

A matriz K contém os núcleos das integrais resultantes dos efeitos dos dipolos Q , e as matrizes H e G são os termos usuais do MEC. Faz-se a troca de linhas e colunas com a finalidade de que as incógnitas sejam representadas em um único vetor e os valores prescritos em outro, com o aparecimento da matriz A . Por fim, o seguinte sistema de equações algébricas pode ser definido, sendo F o vetor que contém os valores prescritos,

$$X = M + RQ \quad (8)$$

na qual,

$$M = A^{-1}F \quad (9)$$

$$R = A^{-1}K$$

A Equação (8) pode ser usada na forma incremental, para o cálculo dos efeitos dos incrementos de carga dados por M ou ΔM , ou incrementos de dipolos, ΔQ , para correção do nível de tensão sobre a superfície da fissura. A Eq.(4) pode ser transformada de modo semelhante ao que foi realizado para a determinação dos deslocamentos,

$$\sigma = -H'U + G'P + K'Q \quad (10)$$

De maneira similar a Eq. (8), a expressão de tensões pode ser escrita separando-se em duas parcelas, uma elástica e outra para correção do comportamento elástico pelo emprego de dipolos. Após a reordenação dos termos, a equação que relaciona o campo de tensões para uma dada distribuição de dipolos pode ser definida,

$$\sigma = N + SQ \quad (11)$$

na qual,

$$\begin{aligned} N &= F' - A' M \\ S &= K' - A' R \end{aligned} \quad (12)$$

3 Resolução do sistema não linear pelo Operador Tangente

Apesar de ser um procedimento robusto, a clássica metodologia baseada no Operador Constante (OC) pode levar a um maior número de iterações até obter convergência. Desta forma, o procedimento de resolução do sistema não linear considerando o operador tangente pode ser descrito nos passos a seguir.

A Equação (11) pode ser reescrita em sua forma incremental,

$$Y(\Delta Q_k) = -\sigma_k(\Delta Q_k) + \Delta N_k + S\Delta Q_k \quad (13)$$

na qual k indica o incremento de carga atual.

A resolução do sistema não linear é atingida através de um esquema de Newton-Raphson para correção dos passos incrementais. De forma a determinar as correções e encontrar o equilíbrio, admite-se que para encontrar o incremento, a solução esteja suficientemente próxima e que por isso se possa expandir a Eq. (13) nas vizinhanças de ΔQ_k^i ,

$$Y(\Delta Q_k^{i+1}) = Y(\Delta Q_k^i) + \frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} \delta \Delta Q_k^i + o(\delta \Delta Q_k^i) \quad (14)$$

Após sucessivas manipulações matemáticas e definindo-se R como a matriz rotação do sistema,

$$R = \begin{bmatrix} \cos^4(\theta) & 2\cos^3(\theta)\text{sen}(\theta) & \cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) \\ \cos^3(\theta)\text{sen}(\theta) & 2\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) & \cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) \\ \cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) & 2\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) & \text{sen}^4(\theta) \end{bmatrix} \quad (15)$$

O OT considerando a formulação de dipolos do MEC é definido como,

$$K_t = \frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} = S - \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial \Delta w} R \quad (16)$$

Na Equação (16), o OT está bem definido e é dito consistente por incorporar a lei coesiva em sua definição. É importante mencionar que o processo de parada da etapa iterativa depende do excesso de tensões,

$(\Delta \sigma / f_t) > Tol$. Onde f_t representa a resistência à tração do material. O termo $\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial \Delta w}$ representa a derivada da lei coesiva adotada. Desta forma, o OT considera as características de degradação existentes na zona de processos inelásticos do problema.

A interpretação geométrica do processo de correção do sistema não linear pelo OT (lei coesiva linear) é ilustrada na Figura 2. Semelhante ao OC, caso a tensão normal de um determinado ponto supere a resistência a tração do material, esse excesso deve ser reaplicado na estrutura gerando um incremento de dipolo. Entretanto, diferentemente do OC, esse incremento é calculado com base na derivada do critério coesivo adotado. Desta forma, o incremento é calculado com base na reta tangente a esse critério no ponto B. Definindo-se σ_{eq} e Δw_{eq} como a tensão e abertura de fissura, referente ao ponto C (ponto de equilíbrio da estrutura).

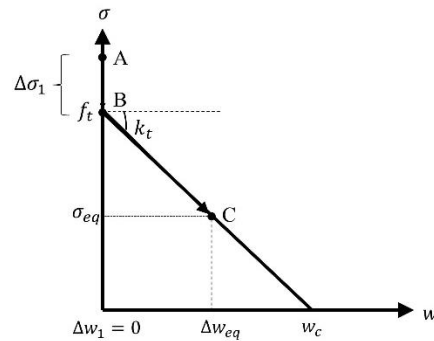


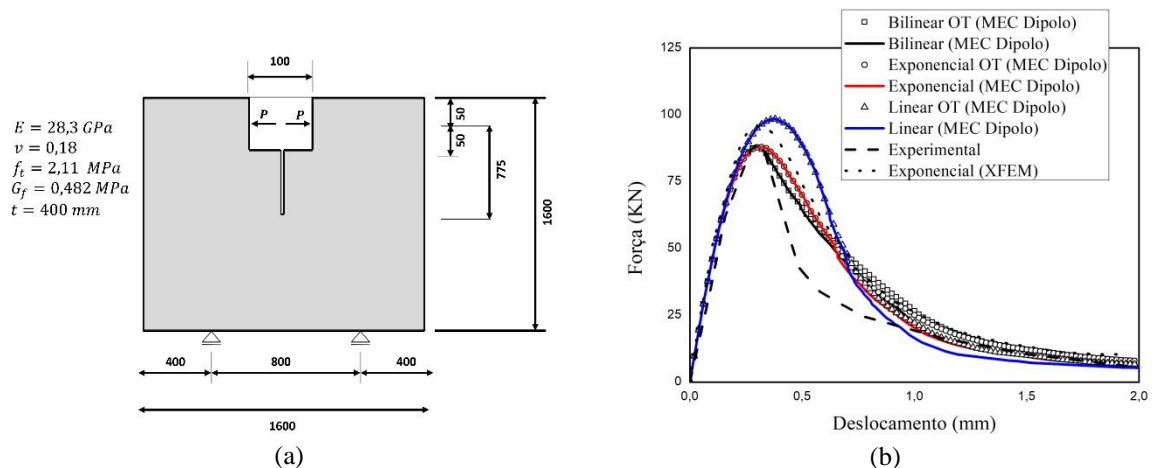
Figura 2. Interpretação geométrica do OT (lei coesiva linear)

4 Aplicações

Nesta seção, duas aplicações são apresentadas para validação da implementação da formulação do MEC dipolo em problemas da mecânica da fratura coesiva. No primeiro exemplo, as leis coesivas linear, bilinear e exponencial são aplicadas à análise da fratura em um espécime de concreto em modo I, já no segundo, a análise com múltiplas fissuras e modo misto de propagação é realizada.

4.1 Exemplo 1: Espécime de concreto em Modo I (*Wedge Splitting*)

O presente exemplo trata de um espécime de concreto submetido a uma carga de aplicação descendente, produzindo forças perpendiculares às suas superfícies inclinadas. A geometria do sólido, bem como as propriedades do material e condições de contorno, são apresentadas na Figura 3a. Este exemplo é investigado experimentalmente por Winkler [13], e numericamente por Uger *et al.* [14], com base no Método dos Elementos Finitos Generalizados (XFEM). A malha do contorno constitui-se de 365 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos na extremidade inferior do entalhe.

Figura 3. (a) Espécime de concreto (b) Curva Força *versus* deslocamento da estrutura

Na Figura 3b, a resposta da estrutura em termos de força *versus* deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga é apresentada, comparados com o resultado experimental de Winkler [13]. É possível perceber que todos os modelos coesivos tiveram comportamento próximo ao experimental em seu trecho ascendente. Além disso, as leis Bilinear e Exponencial apresentaram boa aproximação da carga de ruptura. No trecho descendente, os modelos Bilinear e Exponencial apresentaram melhor aproximação com o resultado experimental até o deslocamento de 0,75 mm. Logo após, as três leis coesivas adotadas apresentaram respostas semelhantes. Além disso, comportamento semelhante é notado entre a formulação de dipolos e o XFEM.

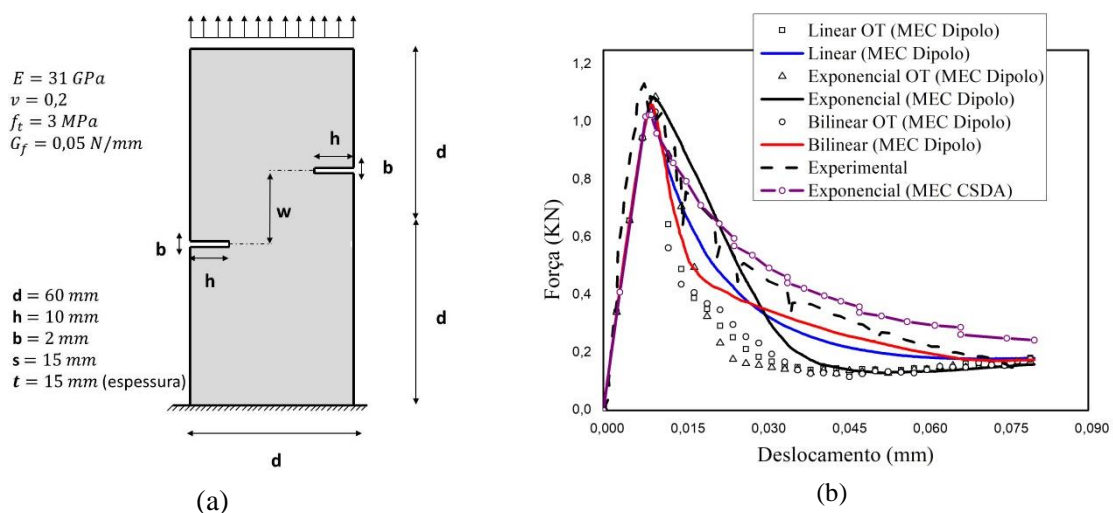
Por fim, na Figura 3b, apresenta-se um estudo comparativo entre os dois operadores para a curva força *versus* deslocamento. É possível observar que, até o deslocamento aproximadamente igual a 0,75 mm, os dois operadores apresentaram respostas semelhantes para todas as três leis coesivas. Após esse deslocamento, houve uma tendência de divergência entre os operadores OC e OT para todas as leis analisadas. Percebe-se também, uma maior tendência para todas as curvas, de apresentarem resultados próximos ao experimental no trecho final da curva descendente. Na Tabela 1, é apresentada a comparação de eficiência entre OC e OT. Com uso da lei coesiva exponencial, atingiu-se maior economia no número de iterações, em torno de 61,53%.

Tabela 1. Economia de iterações: OC *versus* OT (Exemplo 1)

Lei coesiva	OC (iteraões)	OT (iteraões)	Economia (%) no número de iteraões
Linear	17558	7582	~56,82
Exponencial	17028	6550	~61,53
Bilinear	15340	6785	~55,77

4.2 Exemplo 2: Chapa com 2 entalhes modo misto I-II

Neste exemplo, um espécime de concreto com dois entalhes analisado experimentalmente por Shi *et al.* [15] e numericamente por Peixoto *et al.* [16], com a formulação indireta do MEC baseada em descontinuidades fortes (MEC CSDA), é apresentado. Desta forma, a análise de propagação de múltiplas fissuras é realizada. As propriedades geométricas, do material e de vinculação do espécime são apresentadas na Figura 4a. A malha de contorno constitui-se de 304 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos nas extremidades de cada entalhe.

Figura 4. (a) Chapa com 2 entalhes (b) Curva Força *versus* deslocamento

Na Figura 4b, é apresentada a resposta numérica do carregamento aplicado para um deslocamento vertical imposto na extremidade superior do espécime. É possível constatar que o trecho ascendente apresenta comportamento menos rígido em relação ao resultado experimental. Ainda assim, todas as leis coesivas consideradas obtiveram boa aproximação para a carga de ruptura. É importante mencionar que a lei linear apresentou respostas satisfatórias até o deslocamento de 0,023 mm. Logo após, as leis bilinear e exponencial melhor representaram o comportamento experimental. Além disso, observa-se equivalência dos resultados entre a formulação de dipolos e o MEC CSDA.

Na Figura 4b, é também realizado um estudo comparativo entre os operadores OC e OT considerando-se as três leis coesivas. É possível observar que os dois operadores obtiveram respostas semelhantes no trecho ascendente, divergindo a partir do início do trecho descendente. Apesar de apresentarem respostas diferentes no trecho pós pico, nota-se que todas as curvas voltam a apresentar congruência a partir do deslocamento de 0,07 mm. A comparação de eficiência entre o OC e OT desse exemplo é apresentada na Tabela 2, revelando-se redução da ordem de 40% no número de iterações.

Tabela 2. Comparação de iterações entre OC e OT (Exemplo 2)

Lei coesiva	OC (iteraões)	OT (iteraões)	Economia (%) no número de iteraões
Linear	4176	2471	~40,83
Exponencial	4052	2502	~38,25
Bilinear	4130	2500	~39,46

5 Conclusões

Foi proposto uma formulação não linear do MEC baseada na introdução de um campo de tensões iniciais, com a degeneração do termo de domínio presente na representação integral e aparecimento da variável dipolo, responsável por corrigir o comportamento elástico do material. Dois operadores para solução do sistema não linear foram utilizados. O primeiro carrega a consideração da rigidez elástica da estrutura (OC), já o segundo, considera a rigidez tangente à reposta estrutural não linear (OT). De forma geral, essa formulação mostrou ser uma poderosa alternativa a outros métodos mais explorados na literatura, destacando-se a boa aproximação da carga de ruptura para todos os exemplos analisados. Com relação às comparações de eficiência entre os operadores não lineares, pode-se notar uma boa economia no número de iteraões ao adotar o OT em lugar do OC. Em alguns exemplos, essa economia chegou a ser de 61 %.

Agradecimentos: Os autores agradecem à CAPES pelo suporte financeiro oferecido.

Declaração de autoria: Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material incluso é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído.

Referências

- [1] G.E. Blandford, A.R. Ingraffea, J.A. Liggett. Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, n. 3, p. 387-404, 1981.
- [2] S.L. Crouch. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, n.2, p. 301-342, 1976
- [3] A.L. Saleh, M.H. Aliabadi. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(4), 533-545, 1995.
- [4] J.T. Chen, H.K. Hong. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. *Appl. Mech. Rev.* 52(1), 17–33, 1999.
- [5] R. Citarella, P. Carlone, R. Sepe, M. Lepore. DBEM crack propagation in friction stir welded aluminum joints. *Adv. Eng. Software* 101, 50-59, 2016.
- [6] R. Citarella, V. Giannela, M. Lepore, G. Dhondt. Dual boundary element method and finite element method for mixed-mode crack propagation simulations in a cracked hollow shaft. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 41(1), 84-98, 2018.
- [7] J.C.C. Barbirato, W.S. Venturini. Boundary element method for three-dimensional cohesive crack problems. In: IV WCCM - *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 1998, Buenos Aires - AR. CD-ROM Proceedings - IV WCCM. Barcelona: Artes Gráficas Torres, S.A., 1998.
- [8] H.L. Oliveira, E.D. Leonel. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. *Eng. Fract. Mech.* 111 (2013) 86–97, 2013
- [9] E.D. Leonel, W.S. Venturini. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 34 122-129, 2010.
- [10] S.G.F. Cordeiro, E.D. Leonel. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. *Eng. Anal. Boundary. Elem.* 64 111–21, 2016.
- [11] A. Hillerborg, M. Modeer, P.E. Peterson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by mean of failure mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research*. V. 6, p. 773–782, 1976.
- [12] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*, London: Pentech Press, 1978.
- [13] B. Winkler, *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*, PhD Thesis, University of Innsbruck, 2001.
- [14] J.F. Uger, S. Eckardt, C. Könke, Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method, *Comput. Method Appl. M.* 196 (41–44), 4087–4100, 2007
- [15] C. Shi, A. G. van Dam, J. G. M. van Mier, L. J. Sluys, Crack interaction in concrete, in: F. H. Wittmann (Ed.), *Materials for Buildings and Structures EUROMAT 131*, 2000
- [16] R.G. Peixoto, G.O. Ribeiro, R.L.S. Pitangueira. A boundary element method formulation for quasi-brittle material fracture analysis using the continuum strong discontinuity approach. *Eng. Frac. Mech.* V. 202, p. 47– 74, 2018.