

# Automação da análise de tensão em vigas através de planilhas no software Excel®

André Luigui Bezerra Santos<sup>1</sup>, Janielly Kaline de Oliveira Ferreira da Fé<sup>2</sup>, Marcilene Vieira da Nóbrega<sup>3</sup>, Sara de Oliveira Marques Luna<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Estudante de Graduação, Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA – Campus Angicos  
R. Gamaliel Martins Bezerra, 59515-000, Rio Grande do Norte/Angicos, Brasil  
andreluiguibs@gmail.com

<sup>2</sup>Departamento de Exatas, Tecnologias e Ciências Humanas, Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA – Campus Angicos  
R. Gamaliel Martins Bezerra, 59515-000, Rio Grande do Norte/Angicos, Brasil  
janielly.ferreira@ufersa.edu.br

<sup>3</sup>Departamento de Engenharias, Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA – Campus Angicos  
R. Gamaliel Martins Bezerra, 59515-000, Rio Grande do Norte/Angicos, Brasil  
marcilenenobrega@ufersa.edu.br

<sup>4</sup>Estudante de Pós-Graduação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN – Campus Natal  
Avenida Senador Salgado Filho, 59078-970, Rio Grande do Norte/Natal, Brasil  
marquessara95@hotmail.com

**Resumo.** Os assuntos relativos às tensões e suas transformações em elementos estruturais são amplamente discutidos pelos autores da área da Mecânica dos Sólidos. Estas tensões são geradas devido aos esforços internos, os quais predominam o momento fletor e o esforço cortante em elementos submetidos a carregamentos transversais e mais especificamente as vigas. É importante ressaltar que devido as tensões atuarem nas seções transversais desses elementos estruturais torna-se necessária a análise das propriedades geométricas dessas seções e a utilização destes valores para os cálculos das tensões. Desse modo, em função da grande quantidade de etapas necessárias para a obtenção das tensões em vigas, esse trabalho teve como objetivo principal a elaboração de modelos analíticos no software Excel® capazes de obter de forma automatizada as propriedades geométricas de seções transversais, os esforços internos, as tensões cisalhantes e normais e as suas transformações. Para isto foi realizado um estudo analítico das equações disponíveis na literatura para a determinação destas tensões, aliado com a adequação dessas equações de acordo com as seções transversais analisadas, que foram as seções transversais em I, T (normal e invertido) e retangular, considerando vigas submetidas às condições de apoios engastada ou biapoiada, com carregamento pontual ou distribuído. Ao final do trabalho percebeu-se que a planilha é capaz de auxiliar o estudo das tensões desenvolvidas em vigas e transformação de tensões.

**Palavras-chave:** Tensões. Propriedade Geométricas. Automação. Microsoft Excel®.

## 1 Introdução

De acordo com a NBR 6118 (2014, p. 74) vigas são “*elementos lineares em que a flexão é preponderante*”. Devido a esses membros trabalharem flexionados os tipos de esforços internos atuantes serão os esforços cortantes e os momentos fletores. Provocando nesses elementos, segundo Botelho (2015), tensões normais de compressão e tração, e tensões tangenciais de cisalhamento (deslizamento).

O processo de determinação das tensões atuantes envolve cálculos que demandam certa quantidade de tempo e esforço mental. Hibbeler (2019) define os seguintes passos para a determinação das tensões e das suas transformações: cálculo dos momentos e cisalhamentos internos; determinação das propriedades geométricas da seção transversal e por fim, a aplicação das equações para as tensões.

Notando as inúmeras etapas do processo de análise e considerando situações em que a peça estudada não resiste as tensões impostas. Logo, necessitando da alteração da seção transversal e de novos cálculos. Percebeu-se a necessidade de programar as equações das análises de tensões, para o aumento da eficácia e da rapidez das análises.

Sendo assim, o objetivo principal do trabalho foi a elaboração de um conjunto de planilhas capaz de analisar, de forma automatizada, as tensões normais e de cisalhamento nas seções transversais de vigas submetidas a carregamento transversal. Como resultado foram criadas planilhas capazes de calcular os esforços internos, as propriedades geométricas e as tensões e suas transformações.

## **2 Análise das tensões**

### **2.1 Propriedades Geométricas**

O estudo das tensões na Mecânica dos Sólidos consiste em uma série de deduções (equações das tensões normais, das tensões cisalhantes, transformações de tensões, tensões máximas e entre outros). Para Hasse (2015), devido as tensões atuarem ao longo das seções transversais torna-se necessário, antes de qualquer análise, primeiro conhecer propriedades importantes para caracterizar bem estas seções. Tais como, momento estático de área, momento de inércia, centro de gravidade, raio de giração e o módulo resistente (MELCONIAN, 2009).

### **2.2 Esforços, tensões e transformações de tensões**

As vigas são membros estruturais nos quais a flexão é preponderante. Dessa forma, surgem internamente esforços que provocam dos tipos de tensões, a tensão normal (provocada pelo momento fletor) e a tensão cisalhante (provocada pelo esforço cortante) (BOTELHO, 2015). Para Hibbeler (2013) antes de encontrar essas tensões, o equilíbrio do membro estrutural deve ser definido, ou seja, devem ser estudados os esforços cisalhantes e fletores de cada situação de carregamento.

É importante ressaltar que o processo de cálculo se utiliza do princípio de que o material do membro estrutural é isotrópico, isto é, possui a capacidade de reagir igualmente, independentemente das direções de aplicação dos esforços (BEER E JOHNSTON, 2015). Contudo, este tipo de propriedade, segundo Hibbeler (2019), pode ser atribuída a materiais nos quais as suas fibras não possuem direção aparente e, dessa maneira, em materiais nos quais as fibras possuem direções aparentes a isotropia deve ser desconsiderada, tornando-se necessário o estudo das tensões em planos transformados.

Sendo assim, como forma de garantir uma melhor análise dos materiais anisotrópicos as transformações de tensões são estudadas. A análise envolve elementos infinitesimais denominados de estado de tensão, os quais são obtidos através das equações das tensões normais e cisalhantes e transformados através de equações da transformação de tensão. Uma das formas de realizar o processo de transformação de tensões é através do Círculo de Mohr, fazendo uma representação gráfica do estado de tensão atuante.

## **3 Metodologia**

### **3.1 Definição das seções transversais e vigas analisadas**

Foram selecionados quatro tipos de seções transversais, sendo elas as seções em I, T (normal e invertido) e retangular. Quanto as restrições e as cargas considerou-se vigas submetidas às condições de apoio engastada ou biapoiada, com carregamento pontual ou distribuído.

### **3.2 Determinação analítica das propriedades geométricas, esforços internos tensões e transformação de tensão**

O ponto inicial para a elaboração do trabalho foi a dedução das propriedades geométricas (momento estático de área, momento de inércia, centro de gravidade, raio de giração e o módulo resistente) das seções transversais. Para isto, todas as dimensões das seções foram representadas por letras e um estudo analítico das propriedades geométricas foi feito seguindo as equações utilizadas por Melconian (2009).

Nos esforços internos as vigas foram sujeitas a carregamentos representados por variáveis e fixou-se seu comprimento como sendo L. Com as vigas genéricas, as equações do equilíbrio foram aplicadas e as equações do esforço cortante e momento fletor foram encontradas.

Seguindo para o processo de análise das tensões, um elemento infinitesimal foi destacado em cada seção transversal. Com isso, encontrou-se analiticamente a equação que rege o momento estático de área da seção conforme o ponto analisado se aproxima do centro de gravidade da peça (Fig. 1).

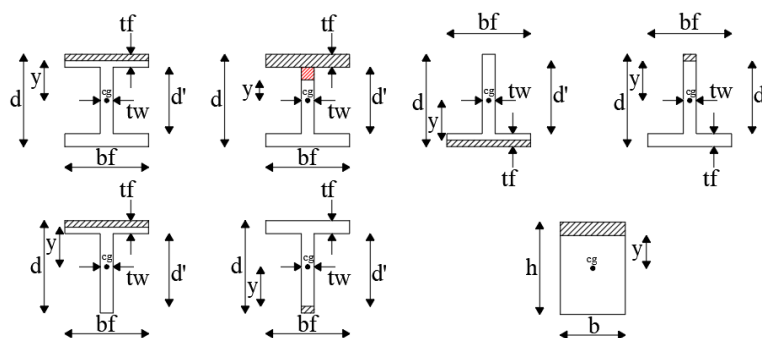


Figura 1. Seções transversais representadas por letras e com elementos infinitesimais destacados

De posse do momento estático de área para cada seção, a formulação da tensão cisalhante descrita por Hibbeler (2019) foi utilizada para o encontro das tensões. Destaca-se que para a tensão normal o mesmo autor foi utilizado para o encontro das equações.

Ressalva-se um conceito de tensão cisalhante que foi o determinante para o encontro do sinal desta tensão no Círculo de Mohr. Hibbeler (2019) não descreve de forma precisa como encontrar o sinal das tensões cisalhantes para o círculo. Contudo, notou-se que um elemento com um esforço cortante positivo, uma tensão cisalhante negativa (Fig. 2) era representada pelo autor. A partir disso, concluiu-se que para a montagem do estado plano de tensões ao invés da tensão cisalhante ser inserida com o sinal positivo, devido ao cortante positivo, deve ser na verdade inserida com o oposto do sinal calculado, negativo.

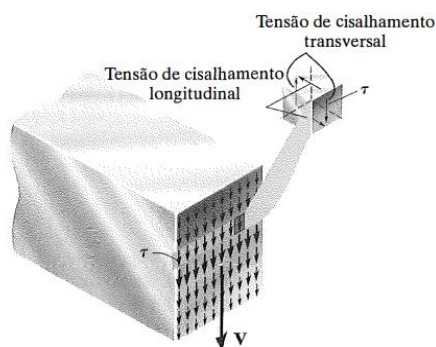


Figura 2. – Tensão cisalhante em seção transversal de viga

### 3.3 Processo de elaboração da Planilha

O primeiro passo para formular a planilha foi a criação da aba para inserção dos dados. Nessa aba células para as inserções das seguintes características, estão dispostas: dimensões das vigas, dimensões das seções transversais, tipo de carregamento, comprimento da viga e ponto de análise.

Para o cálculo das propriedades geométricas e esforços internos, as equações obtidas analiticamente foram inseridas no software e termos condicionais *se*, *ou* e *e* foram utilizados para programar a planilha de acordo com o tipo de viga e carregamento. Ressalta-se que na aba das propriedades geométricas funções gráficas do Excel® foram utilizadas para o desenho automático de cada tipo de seção transversal e de acordo com a sua dimensão inserida.

Seguindo para as tensões, as equações estudadas através de Hibbeler (2019) foram inseridas. É importante destacar que devido as seções do tipo I e T (normal e invertido) possuírem o momento estático de área diferentes nas mesas e nas almas, termos condicionais foram novamente utilizados para que a planilha demonstre a correta tensão atuante.

Quanto a formação do Círculo de Mohr no Microsoft Excel®, as equações que regem as tensões em  $x$  e  $y$  variam em ângulos de 0 a 360 graus. Sendo assim, ao processar as equações das transformações em ângulos que variam de 0 até 180 graus, já que os ângulos de transformação são multiplicados por dois, os pontos conectados formarão um círculo.

Em suma, a planilha funciona como mostrado no esquema da Fig. 3.

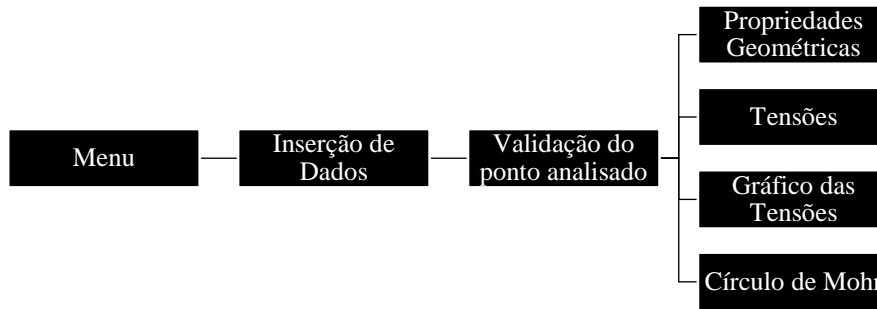


Figura 3. Esquema representando o funcionamento completo da planilha

#### 4 Resultados Obtidos

O trabalho fez uso de estudos analíticos para verificação da eficácia das planilhas. As Figuras 4, 5, 6 e 7 mostram os problemas estudados. Destaca-se que os esforços internos foram analisados no ponto A de cada viga e as tensões foram estudadas em pontos com distância y partindo do centro de gravidade.

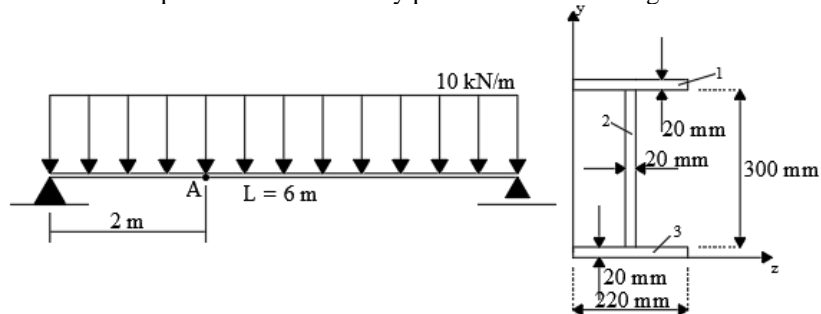


Figura 4. Viga biapoiada, submetida a carregamento distribuído e com seção transversal em I

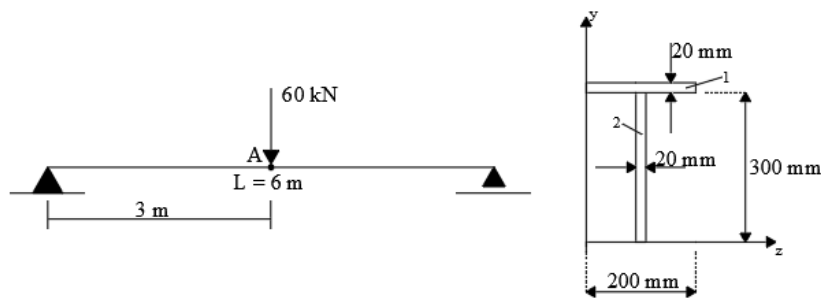


Figura 5. Viga biapoiada, submetida a carregamento pontual e com seção transversal em I

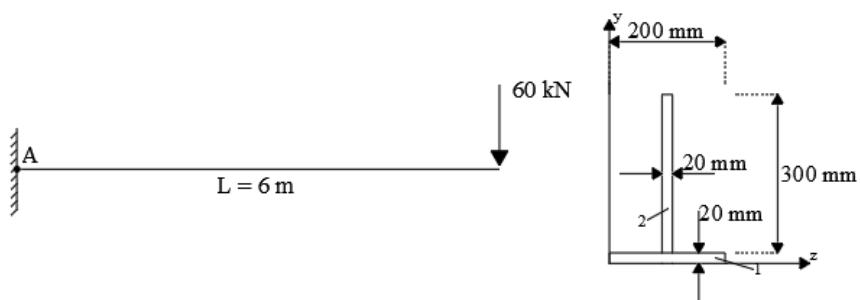


Figura 6. Viga engastada, submetida a carregamento pontual e com seção transversal em T invertido

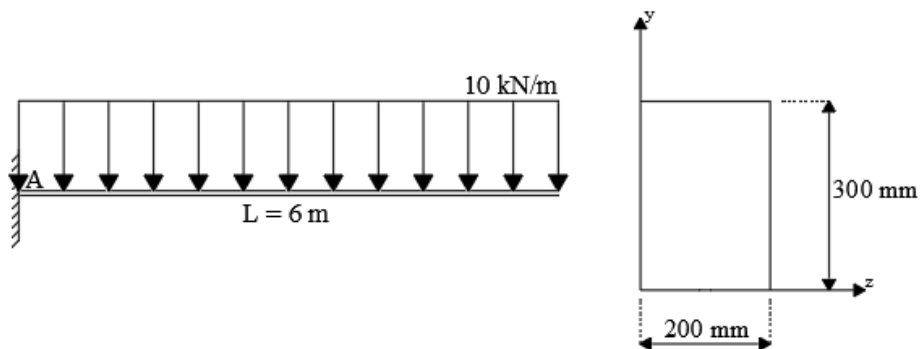


Figura 7. Viga engastada, submetida a carregamento distribuído e com seção transversal retangular

Nas Tabelas 4, 5, 6 e 7 são apresentados os resultados obtidos para as análises das tensões para os problemas analisados. A tabela 4 diz respeito a figura 4, a tabela 5 diz respeito a figura 5, a tabela 6 diz respeito a figura 6 e tabela 7, a figura 7.

Esforços Internos		
	Excel	Análítico
Q (kN)	10	10
M (kN.m)	40	40
Propriedades Geométricas		
Centro de Gravidade Zcg (mm)	110	110
Centro de Gravidade Ycg (mm)	170	170
Momento de Inércia Iz (mm <sup>4</sup> )	270,57 . E6	270,57 . E6
Momento de Inércia Iy (mm <sup>4</sup> )	35,69 . E6	35,69 . E6
Módulo Resistente Wesq.dir (mm <sup>3</sup> )	324,48 . E3	324,48 . E3
Módulo Resistente Wsup.inf (mm <sup>3</sup> )	1,59 . E6	1,59 . E6
Raio de Giração iz (mm)	135,21	135,21
Raio de Giração iy (mm)	49,11	49,11
Tensões		
Tensão Normal		
y = 170 mm	-25,13 MPa	-25,13 MPa
y = -170 mm	25,13 MPa	25,13 MPa
Tensão Cisalhante		
Mesa		
y = 170 mm	0 Pa	0 Pa
y = 160 mm	60,98 kPa	60,98 kPa
y = 150 mm	118,27 kPa	118,27 kPa
Alma		
y = 150 mm	1,30 MPa	1,30 MPa
y = 75 mm	1,61 MPa	1,61 MPa
y = 0 mm	1,72 MPa	1,72 MPa
Transformação de Tensão (y=0mm)		
$\sigma_1$	1,72 MPa	1,72 MPa
$\sigma_2$	-1,72 MPa	-1,72 MPa
$\sigma_{méd}$	0 Pa	0 Pa
$\tau_{máx}$	1,72 MPa	1,72 MPa
$\theta_p$	45 °	45 °
$\theta_c$	0°	0°

Tabela 1. Planilha para vigas em I

Esforços Internos		
	Excel	Análítico
Q (kN)	10	30
M (kN.m)	40	90
Propriedades Geométricas		
Centro de Gravidade Zcg (mm)	100	100
Centro de Gravidade Ycg (mm)	214	214
Momento de Inércia Iz (mm <sup>4</sup> )	106,57 . E6	106,57 . E6
Momento de Inércia Iy (mm <sup>4</sup> )	13,53 . E6	13,53 . E6
Módulo Resistente Wesq.dir (mm <sup>3</sup> )	135,33 . E3	135,33 . E3
Módulo Resistente Wsup. (mm <sup>3</sup> )	1,01 . E6	1,01 . E6
Módulo Resistente Winf. (mm <sup>3</sup> )	498,01 . E3	498,01 . E3
Raio de Giração iz (mm)	103,23	103,23
Raio de Giração iy (mm)	36,79	36,79
Tensões		
Tensão Normal		
y = 106 mm	-89,52 MPa	-89,52 MPa
y = -214 mm	180,72 MPa	180,72 MPa
Tensão Cisalhante		
Mesa		
y = 106 mm	0 Pa	0 Pa
y = 96 mm	284,31 kPa	284,31 kPa
y = 86 mm	540,47 kPa	540,47 kPa
Alma		
y = 86 mm	5,40 MPa	5,40 MPa
y = 0 mm	6,45 MPa	6,45 MPa
y = -214 mm	0 Pa	0 Pa
Transformação de Tensão (y=106mm)		
$\sigma_1$	-89,52 MPa	-89,52 MPa
$\sigma_2$	0 Pa	0 Pa
$\sigma_{méd}$	-44,76 MPa	-44,76 MPa
$\tau_{máx}$	44,76 MPa	44,76 MPa
$\theta_p$	0 °	0 °
$\theta_c$	45 °	45 °

Tabela 2. Planilha para vigas em T

Esforços Internos		
	Excel	Análítico
Q (kN)	60	60
M (kN.m)	-360	-360
Propriedades Geométricas		
Centro de Gravidade Zcg (mm)	100	100
Centro de Gravidade Ycg (mm)	106	106
Momento de Inércia Iz (mm <sup>4</sup> )	106,57 . E6	106,57 . E6
Momento de Inércia Iy (mm <sup>4</sup> )	13,53 . E6	13,53 . E6
Módulo Resistente Wesq,dir (mm <sup>3</sup> )	135,33 . E3	135,33 . E3
Módulo Resistente Wsup. (mm <sup>3</sup> )	498,01 . E3	498,01 . E3
Módulo Resistente Winf. (mm <sup>3</sup> )	1,01 . E6	1,01 . E6
Raio de Giração iz (mm)	103,23	103,23
Raio de Giração iy (mm)	36,79	36,79
Tensões		
Tensão Normal		
y = 214 mm	722,88 MPa	722,88 MPa
y = -86 mm	-290,50 MPa	-290,50 MPa
y = -106 mm	-358,06 MPa	-358,06 MPa
Tensão Cisalhante		
Mesa		
y = -86 mm	1,08 kPa	1,08 kPa
y = -96 mm	568,62 kPa	568,62 kPa
y = -106 mm	0 Pa	0 Pa
Alma		
y = 214 mm	0 MPa	0 MPa
y = 0 mm	12,89 MPa	12,89 MPa
y = -86 mm	10,81 MPa	10,81 MPa
Transformação de Tensão (y=-86mm)		
$\sigma_1$	-290,90 MPa	-290,90 MPa
$\sigma_2$	0,40 MPa	0,40 MPa
$\sigma_{méd}$	-145,25 MPa	-145,25 MPa
$\tau_{máx}$	-145,65 MPa	145,65 MPa
$\theta_p$	2,13 °	2,13 °
$\theta_c$	-42,87 °	-42,87 °

Tabela 3. Planilha para vigas em T invertido

Ao comparar os resultados percebeu-se que as planilhas elaboradas apresentaram a capacidade de calcular – de forma eficaz – as propriedades geométricas, tensões normais e cisalhantes, demonstrar as tensões transformadas e plotar corretamente o círculo de Mohr. Para melhor entendimento do processo de cálculo e utilização da planilha, é possível acessar o memorial de cálculo e o conjunto de quatro planilhas a partir do link disponível no Anexo A.

## 5 Conclusões

Este artigo teve como objetivo principal a elaboração de uma planilha no software Excel para a determinação de tensões normais, tensões de cisalhamento e tensões transformadas. Diante de toda a discussão pode-se chegar as seguintes conclusões:

- O Microsoft Excel® possui alta viabilidade para a programação de cálculos de engenharia;

Esforços Internos		
	Excel	Análítico
Q (kN)	60	60
M (kN.m)	-180	-180
Propriedades Geométricas		
Centro de Gravidade Zcg (mm)	100	100
Centro de Gravidade Ycg (mm)	150	150
Momento de Inércia Iz (mm <sup>4</sup> )	450 . E6	450 . E6
Momento de Inércia Iy (mm <sup>4</sup> )	200 . E6	200 . E6
Módulo Resistente Wesq,dir (mm <sup>3</sup> )	2 . E6	2 . E6
Módulo Resistente Wsup,inf (mm <sup>3</sup> )	3 . E3	3 . E3
Raio de Giração iz (mm)	86,60	86,60
Raio de Giração iy (mm)	57,73	57,73
Tensões		
Tensão Normal		
y = 150 mm	60 MPa	60 MPa
y = -150 mm	-60 MPa	-60 MPa
Tensão Cisalhante		
y = 0 mm	1,5 MPa	1,5 MPa
Transformação de Tensão (y=-150mm)		
$\sigma_1$	-60 MPa	-60 MPa
$\sigma_2$	0 Pa	0 Pa
$\sigma_{méd}$	-30 MPa	-30 MPa
$\tau_{máx}$	-30 MPa	-30 MPa
$\theta_p$	0 °	0 °
$\theta_c$	45 °	45 °

Tabela 4. Planilha para vigas retangulares

- Notou-se também a eficácia do código programado na planilha do Microsoft Excel. Sendo ele capaz representar graficamente as seções transversais, mostrar o ponto analisado de maneira interativa, gerar os esforços internos atuantes e por fim as tensões;

- É importante destacar que devido a gama de carregamentos e seções existentes, torna-se necessário a continuação deste trabalho a fim de se melhorar cada vez mais o dimensionamento de vigas. A partir da continuação será possível realizar mais estudos sobre as diversas seções utilizadas no mercado e as diversas estruturas e carregamentos;

- Espera-se também a realização de um estudo sobre o quanto a planilha auxiliará no ensino da Resistência dos Materiais e a elaboração uma única planilha capaz de analisar vários tipos de tensões. Além disso, espera-se também a realização de um estudo de como as alterações das dimensões das seções transversais influenciam nas tensões atuantes;

- Espera-se ainda que com a continuação a estética da planilha seja melhorada;

- Por fim, espera-se que a planilha contribua no aprendizado dos alunos de Resistência dos Materiais, os transformando em engenheiros capazes de resolver além de problemas pré-estabelecidos. Pois, com a utilização da planilha diversas análises poderão ser feitas sem a repetição de novos cálculos.

## **Referências**

[1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

[2] BOTELHO, Manoel Henrique Campos – Resistência dos Materiais – para entender e gostar, 3ª edição, Editora Blucher, São Paulo-SP, 2015.

[3] HASSE, Daniel. Características Geométricas de Figuras Planas. 2015. Disponível em: <https://engucm.files.wordpress.com/2015/03/geometria-de-massas.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2020.

[4] MELCONIAN, Sarkis. Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais. 17ª edição. São Paulo: Editora Érica, 2009.

[5] HIBBELER, R.C. Análise das Estruturas. 8ª Ed., PEARSON, 2013.

[6] HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. 10ª Ed., PEARSON, 2019.

[7] BEZERRA, Paulo Henrique Araújo; GOUVEIA, Bruno Guida. 2013. Utilização do software Excel® e de outras ferramentas computacionais no ensino de resistência dos materiais. XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE).

## **Anexo A – link para as planilhas e as análises analíticas**

[1] Planilhas e resoluções de exercícios. 2020. <https://drive.google.com/file/d/1y0-cY46VUU8AD5XLAJyFNsBGH56utP2Q/view?usp=sharing> .