

# Implementação computacional do MEC 2D com dipolos de tensão para análise de fraturamento

Maylla Guedes Cabral<sup>1</sup>; Eduarda Abreu Vanderlei de Souza Silva<sup>1</sup>; Maria Gabriella Lanverly de Melo Muniz<sup>1</sup>; João Carlos Cordeiro Barbirato<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceio, Alagoas, Brasil

maylla.gc@outlook.com, eduarda.silva@ctec.ufal.br, gabilmm@hotmail.com, jccb@lccv.ufal.br

**Abstract.** O presente trabalho apresenta uma implementação computacional da formulação 2D do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise de fratura coesiva em materiais elásticos, com inclusão de dipolos de tensão para simular a não linearidade no domínio. A parcela no domínio da equação integral do método foi trabalhada para a inserção da linha de fratura, cuja abertura vai sendo verificada pelos acréscimos de tensão captados pelos dipolos posicionados nos nós funcionais dos elementos da fratura. Assim, um código “MEC dipolo 2D” foi elaborado utilizando a solução fundamental de Kelvin com elementos lineares contínuos e descontínuos, para a discretização do contorno e da fratura. Foi utilizada a linguagem de programação PYTHON na elaboração do código computacional, por conta de ser plataforma de código aberto e adequada velocidade de processamento. Exemplo já avaliado em trabalhos acadêmicos foi adaptado para demonstrar a eficácia do código computacional implementado, bem como a formulação utilizada. Os resultados numéricos finais foram planilhados, para plotagem das figuras do comportamento do corpo nas situações inicial e final.

**Keywords:** Método dos Elementos de Contorno, Dipolos de Tensão, Análise 2D, Fratura Coesiva.

## 1 Introdução

Avaliar o comportamento estrutural na presença de trincas, inerentes ao material empregado ou provocadas por carregamentos tem sido assunto recorrente em pesquisas. A obtenção experimental de parâmetros constitutivos de um material com várias propriedades geométricas e mecânica é um trabalho muito elaborado e não trivial. Há, portanto, espaços e necessidades para o desenvolvimento de modelagem de métodos numéricos que possam permitir a simulação de casos de materiais estruturais. As suas propriedades podem ser determinadas via métodos experimentais, analíticos e computacionais, bem como seus comportamentos. Métodos analíticos têm limites para uso, geralmente em casos simples. Os métodos numéricos mais populares utilizados nas pesquisas e aplicações reais são o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método das Diferenças Finitas (DF) e o Método dos Elementos Discretos (MED).

Um dos métodos aproximativos utilizados em ciência e em engenharia é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), Brebbia [1]. É aplicado na solução de equações diferenciais, as quais são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema. Este, por sua vez, é discretizado em elementos que podem ser constantes, lineares ou de ordens superiores. O MEC, método de contorno, traz como características interessantes baixar o número de dimensão do problema (por exemplo, se o problema é 2D a discretização é unidimensional, no seu contorno), garantir exatidão nas expressões de deslocamentos e tensões. Já o modelo de fratura coesiva tem sido empregado com eficiência para representar o comportamento do material "quasi-brittle" na presença do processo de trincamento. Em Hillerborg *et al.* [2], este modelo é testado e modificado em ensaios laboratoriais com o uso de corpo de prova homogêneo e de área constante. É verificada uma zona de processo de fratura com largura limitada na direção da tensão, formada em algum lugar do modelo. Esta zona de fratura perde gradualmente suas propriedades mecânicas à medida que o dano causado pelo surgimento de microfissuras aumenta e, portanto, tem-se um comportamento de material coesivo. Vários importantes trabalhos se seguem na abordagem da mecânica da fratura tratada a partir da modelagem via Método dos Elementos de Contorno, dentre eles Carpinteri [3] Venturini [4] e [5], Barbirato e Venturini [6], Oliveira e Leonel [7] e Almeida *et al.* [8].

Neste trabalho, utiliza-se uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise de fraturas coesivas, utilizando os conceitos apresentados em e Lopes JR. [9], MEC com dipolos de tensões. Teve como objetivo utilizar uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com multirregiões 2D, utilizando-se a abordagem tradicional, denominado direta, para a análise do comportamento mecânico de materiais de comportamento coesivo, com fraturamento. A compilação de estudos sobre materiais de comportamento coesivo e da modelagem numérica permitiram a elaboração de código computacional escrito na linguagem PYTHON, por ser de código aberto e com boas precisão e velocidade de processamento.

## 2 Formulação do Método dos Elementos de Contorno

### 2.1 O problema

Deseja-se analisar um sólido elástico-linear bidimensional, homogêneo e isotrópico, definido por um domínio  $\Omega$  e seu respectivo contorno  $\Gamma$ . As equações diferenciais de equilíbrio do problema elástico podem ser indicadas conforme eq. (1), para  $j = 1, 2$ , o tensor das tensões  $\sigma_{ji}$  e forças de domínio  $b_i$ .

$$\sigma_{j,i,j} + b_i = 0. \quad (1)$$

Para a devida análise do problema é necessário estabelecer as suas condições de, aqui escritas em função dos deslocamentos ( $u$ ) e das forças de superfície ( $p$ ), conforme está apresentado nas eq. (2a, b).

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}, \text{ em } \Gamma_1, \\ p &= \sigma \cdot n = \bar{p}, \text{ em } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2a, b)$$

### 2.2 A solução numérica

A abordagem numérica do problema enunciado requer a escolha do método, aqui utilizado um método de contorno. Após alguns passos algébricos efetuados na eq. (1), chega-se à equação integral que rege o problema, conhecida como Identidade Somigliana, eq. (3), que define uma solução a partir de análise de variáveis preponderantemente no contorno do corpo elástico.

$$u_{ik}^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k \cdot u_{lk}^* d\Omega. \quad (3)$$

Na eq. (3), utilizam-se conceitos de minimização de erros a partir de ponderadores. No MEC a função ponderadora escolhida são as soluções fundamentais. Neste trabalho será utilizada a solução fundamental de Kelvin para problemas elásticos bidimensionais, conforme expressões (4a e b).

$$\begin{aligned} u_{ik}^i &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left( (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l}r_{,k} \right), \\ p_{lk}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k} \right) + (1-2\nu)(n_{l}r_{,k} - n_{k}r_{,l}) \right), \end{aligned} \quad (4a, b)$$

nas quais  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal e  $n$  é o vetor normal ao contorno.

Estudo da equação (3) indica que a sua aplicação pode ser identificada no domínio e fora dele. Assim, de forma generalizada para pontos quaisquer, chega-se à eq. (5),

$$c_{lk}^i u_{lk}^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \cdot u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* \cdot p_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k \cdot u_{lk}^* d\Omega, \quad (5)$$

na qual  $c_{lk}^i$  é uma constante que depende da posição do ponto fonte  $i$ , valendo 1 para pontos do domínio,  $1/2$  para pontos do contorno, quando suaves, e 0 para pontos externos.

Para a aplicação do método numérico, é necessário discretizar o problema, determinando os pontos (nós) nos quais serão escritas as equações da solução encontrada. No caso do contorno, sendo o problema bidimensional, são utilizados elementos lineares para sua conformação aproximada, surgindo, portanto, os pontos extremos que serão usados como nós funcionais. Assim, ao se discretizar a equação (5), admitindo a inexistência de forças de domínio ( $b_k$ ), obtém-se a eq. (6).

$$c_{lk}^i u_{lk}^i + \left( \int_{\Gamma} p_{lk}^* \cdot \varphi d\Gamma \right) \cdot u_k^j = \left( \int_{\Gamma} u_{lk}^* \cdot \varphi d\Gamma \right) \cdot p_k^j. \quad (6)$$

A equação (6) pode ser reescrita matricialmente na forma da eq. (7), utilizando-se as funções interpoladoras nos elementos escolhidos e nos valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies.

$$[H]\{U\} = [G]\{P\}. \quad (7)$$

Aplicam-se as condições de contorno à eq. (7), com as devidas trocas de colunas e linhas, e se obtém um sistema de equações lineares, conforme eq. (8), cujas incógnitas podem ser tanto deslocamentos quanto forças de superfície. A ordem do sistema chega a  $4n \times 4n$  ( $n$  representando o número de elementos), caso seja utilizado um elemento linear descontínuo, com dois nós funcionais por elemento.

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (8)$$

### 2.3 A inserção da fratura

Neste trabalho, o faturamento do corpo elástico será equacionado a partir do modelo de fratura coesiva apresentado por Hillerborg *et al.* [2]. Admite-se que a chamada zona de processo é fina o suficiente, sem acarretar perda de precisão nos processamentos numéricos do fenômeno físico. A ideia do faturamento está apresentada na Figura 1. Define-se, ainda, a existência de duas pontas para a trinca, uma real, localizada no ponto onde é atingido  $w_c$  o valor crítico da abertura da trinca (na qual a tensão normal à superfície da trinca é nula) e uma fictícia, definida no ponto onde a tensão normal  $f_t$  atinge o seu valor máximo (na qual a abertura da fratura é nula).

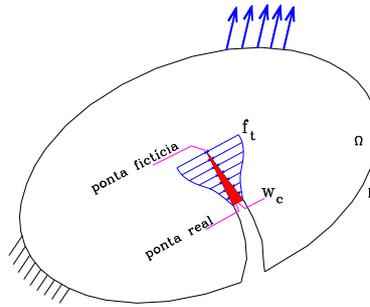


Figura 1. Modelo de fratura coesiva aplicado no domínio  $\Omega$   
Fonte: Barbirato e Venturini [6]

Pode-se, agora, investigar a parcela de domínio da eq. (5), tendo em vista a inclusão de fratura. A eq. (5) passa a ser escrita da forma apresentada na eq. (9), com o termo de domínio transformado algebricamente para coeficientes de dipolos de tensão que aparecem na zona de processo do faturamento (utilizando-se os dipolos de tensões  $\{q\}$  e a matriz de coeficientes dos dipolos  $[\bar{K}]$ , a partir do tensor dos dipolos  $G_{ij}^{im}$ ).

$$[c]\{u\}^p = - \int_{\Gamma} [p^*]\{u\}d\Gamma + \int_{\Gamma} [u^*]\{p\}d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}]\{q\}d\bar{\Gamma} \quad (9)$$

O tratamento da parcela correspondente à fratura deve ser feito a partir de valores nodais dos dipolos, juntamente com funções de aproximação. Assim, chega-se na eq. (10),

$$\int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}]\{q\}d\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{nef} [Kw]^{pj} \{q\}_n^j \quad (10)$$

na qual  $\{q\} = [\Phi_2]\{q\}_n^j$  e  $[Kw]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [\bar{K}][\Phi_2]d\bar{\Gamma}$ .

A eq. (7) pode, então, ser completada com a inclusão do faturamento coesivo, o que resulta na eq (11).

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} = [K]\{q\}. \quad (11)$$

Com a inclusão da fratura, a partir dos dipolos de tensão, pode-se acrescentar o mesmo conceito à equação das tensões para pontos internos, resultando na eq. (12),

$$\{\sigma\}^p = - \int_{\Gamma} [S]^{imk}\{u\}d\Gamma + \int_{\Gamma} [D]^{imk}\{p\}d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}]\{q\}d\bar{\Gamma}, \quad (12)$$

ou

$$\{\sigma\}^p = -[H'']\{U\} + [G'']\{P\} + [K'']\{Q\}. \quad (13)$$

Ressalte-se a importância das expressões (14), (15) e (16), que estabelecem os coeficientes dos dipolos os próprios, o tensor dos dipolos (Lopes JR [9]), e a abertura da fratura, respectivamente.

$$[\bar{K}]\{q\} = G_{ij}^{im} q_j^l \quad (14)$$

$$G_{ij}^{im}(p, S) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}) - 2(1-2\nu)(r_{im}r_{il}\delta_{ij} + r_{ii}r_{il}\delta_{im}) + 2(\delta_{il}r_{ij}r_{im} + \delta_{me}r_{ij}r_{ii} + \delta_{ji}r_{ii}r_{im}) - 8r_{ii}r_{im}r_{il} \} \quad (15)$$

$$\Delta w_1 = \frac{(1-2\nu)}{26(1-\nu)} q_1^1 \quad (16)$$

As matrizes  $[\bar{K}]$  e  $[K''']$  são constituídas de coeficientes obtidos das expressões das tensões dos dipolos, e suas derivadas, respectivamente. A adição de termos dos coeficientes de influencia dos dipolos de tensão na expressão do MEC, produzem na formulação base do MEC 2D modificações interessantes para a solução de problemas elastostáticos na presença de fratura. Processa-se o cálculo das variáveis de contorno via MEC tradicional para o início da análise. A partir daí, é realizado o processo de passos incrementais, de forma que o critério de faturamento via tensão de ruptura é aplicado, verificando-se a cada passo de incremento de carga (ou por incremento de deslocamento, no controle deste). O dipolo é a variável principal para captar essa descontinuidade no domínio do corpo analisado. Define-se o número máximo de incrementos de carga, determina-se a tensão em pontos internos com a parcela do incremento, pergunta-se se a tensão limite foi atingida; caso não, segue-se para atualização dos valores das tensões e de deslocamentos e vai para novo passo de carga; caso sim, aciona-se o processo iterativo.

### 3 Aplicação

Foi escolhido um caso simples da mecânica da fratura, uma chapa retangular (2x4) com deslocamento uniforme aplicado, definido conforme a Figura 2, que é analisada assumindo-se deslocamentos prescritos sobre sua extremidade. São adotados os seguintes valores que definem as propriedades físicas do material da chapa bem como os parâmetros do modelo coesivo:  $E = 1 \times 10^5$ ,  $\nu = 0,0$ ,  $f_t = 1,0$  e  $w_c = 0,00004$ .

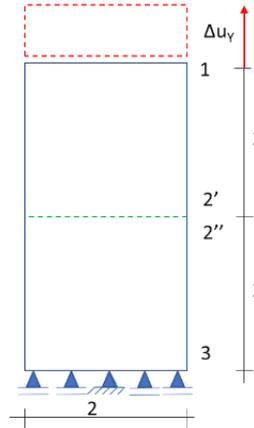


Figura 2. Chapa para análise, geometria e deslocamentos prescritos, definição dos pontos de análise e da superfície pré-definida da trinca

Fonte: Adaptada de Barbirato e Venturini [6]

Na Figura 2 são definidos quatro pontos: um na extremidade livre, outro próximo aos apoios e dois na metade do comprimento (um imediatamente acima da metade e outro abaixo). Para esses pontos são apresentados valores de deslocamentos para alguns passos de cálculo do algoritmo implementado. Os resultados obtidos do processamento são apresentados na Figura 3. Na Figura 3a mostra-se que, ao ser atingida a tensão limite, inicia-se o processo de abertura de fratura, verificando-se diretamente o deslocamento relativo entre os pontos 2' e 2''. Já na Figura 3b, representa-se o trecho de deslocamentos elásticos, que são ajustados na segunda fase, seguindo-se à nova realidade fraturada da peça estrutural.

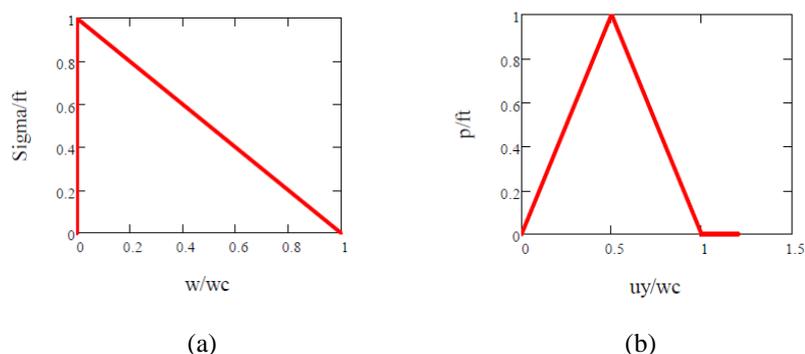


Figura 3. Resultados da análise da chapa retangular: (a) tensão em um nó da fratura  $\times$  abertura da fratura; (b) força de superfície na extremidade do sólido  $\times$  deslocamento no nó 2'

## 4 Conclusões

Com a análise dos resultados obtidos, foi possível perceber que o comportamento das simulações se mostrou condizentes com o que se espera dos materiais em experimentos práticos estudados. A técnica dos dipolos de tensão acoplados ao Método dos Elementos de Contorno resultou em algoritmo adequado para análise de faturamento de elementos estruturais. O programa computacional MEC2D Elástico, escrito na linguagem de programação PYTHON, mostrou-se apropriado para análise desse tipo de casos, respondendo com ótima precisão dos resultados e velocidade de processamento. Chega-se, portanto, ao colapso estrutural na medida que a não linearidade afeta diretamente a seção disponível para reagir à força solicitante, o que foi visível nas representações gráficas apresentadas.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem a bolsa de iniciação científica, ofertada pelo PIBIC/UFAL, fundamental como estímulo à introdução à pesquisa em engenharia. Igualmente, estende-se para a infraestrutura disponibilizada pelo LCCV/CTEC.

**Declaração de autoria:** Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído aqui.

## Referências

- [1] C. A. Brebbia. *The boundary element method for engineers*, London, Pentech Press, 1978.
- [2] A. Hillerborg, M. Modeer, P.E Peterson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by mean of failure mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research*. V. 6, p. 773–782, 1976.
- [3] A. Carpinteri, A. Softening and snap-back instability in cohesive solids. *International Journal for numerical methods in engineering*, v. 28, pp. 1521-1537, 1989.
- [4] W. S. Venturini. Reciprocidade dual para análise não-linear através do método dos elementos de contorno. *In: XV CILANCE*, v. 1, pp. 576-590. Belo Horizonte, BR, 1994.
- [5] W. S. Venturini. Análise de problemas de fratura coesiva usando o método dos elementos de contorno. *In: XVI CILAMCE, anais*, v. 2, pp. 1012-1021. Curitiba, BR, 1995.
- [6] J.C.C. Barbirato, W.S. Venturini. Boundary element method for three-dimensional cohesive crack problems. *In: IV WCCM - Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 1998, Buenos Aires - AR. CD-ROM Proceedings - IV WCCM. Barcelona: Artes Gráficas Torres, S.A., 1998.
- [7] H.L. Oliveira, E.D. Leonel. Cohesive crack growth modelling based on na alternative nonlinear BEM formulation. *Eng. Fract. Mech.* 111 (2013) 86–97, 2013
- [8] L. P. R. Almeida; E. T. Lima Junior; J. C. C. Barbirato. Realiability models for crack propagation analysis by using the boundary element method. *XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Natal-RN, 2019.
- [9] M. C. Lopes JR. *Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do método dos elementos de contorno*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1996.