

Comparison between simplified and refined models for calculating deflection in rc beams

Lucas S. Cruz¹, Lucas C. Pellanda², Elisabeth Junges³

¹ Undergraduate student at University of Espírito Santo
Rua das Orquídeas, 150, universitário, 29031-513, Vitória - ES, Brasil
lucas.senna.lsc@hotmail.com

² Graduate student at University of Espírito Santo

³ Dept. of Civil Engineering, University of Espírito Santo

Abstract. In this work, a comparative study of different simplified methods and refined models used for calculating deflections in reinforced concrete (RC) beams, under service loads, is performed. Simplified methods employed are the one recommended by Brazilian Code (ABNT NBR 6118), and the method recommended by the European Code FIB. Two refined FE models are presented, one based on the NBR 6118 model and one based on FIB model. These models use FE beam elements, and the material nonlinearities are considered by means of moment-curvature diagrams. The models are implemented on the computational program named AVSer, limited to analysis of beams up to yielding of reinforcing steel. Numerical results obtained by the different models are compared with an experimentally tested beam. Some examples of simply supported RC beams under service loads, by varying the beam geometry, the loading type, and the reinforcing ratio are analyzed. The results obtained by the different models are compared. In the end of this work, differences between the models are pointed and recommendations regarding the use of them are drawn.

Keywords: deflections, beams, reinforced concrete.

1 Introdução

O cálculo da flecha de estruturas em concreto armado (CA), necessário para verificação do Estado Limite de Serviço de Deformação Excessiva (ELS-DEF), pode ser separado em duas parcelas: a imediata, que ocorre no momento da aplicação da carga (fissuração do concreto e consequente perda de rigidez), e a diferida, que acontece devido aos efeitos reológicos (retração e fluência) do concreto ao longo de sua vida útil.

Existem vários modelos refinados disponíveis na literatura para prever a flecha de uma viga de CA. Nestes modelos considera-se a contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça, além dos efeitos do tempo. Estes modelos utilizam a formulação do método dos elementos finitos (MEF) aliado a modelos constitutivos dos materiais, a fim de obterem resultados mais próximos da realidade. Além desses, alguns autores e normas propõem modelos mais simplificados, cuja intenção é chegar a resultados semelhantes com cálculos menos complexos.

A NBR 6118:2014 [1] indica um modelo mais elaborado para o cálculo da flecha diferida em seu anexo, mas traz também o modelo simplificado, baseado no modelo proposto por Branson [2] e por um fator α_f para consideração do efeito da fluência do concreto, similarmente ao modelo do Código ACI 318:19 [3]. No Manual do CEB 1985 [4] recomenda-se o método simplificado bilinear para o cálculo da flecha total. O *fib* Model Code 2010 [5] continua recomendando tal método, porém, com uma pequena diferença no cálculo do coeficiente.

A fim de analisar e comparar os métodos de cálculo recomendados por diversas normas e propostos por diferentes autores, alguns pesquisadores realizaram estudos comparativos com os resultados dos modelos, como Baroni [6], Araújo [7], Silva et al. [8], Polleto [9], entre outros. De modo geral, constatou-se que cada norma apresenta resultados diferentes, destacando o melhor desempenho dos modelos refinados sobre os simplificados, tendo em vista que os modelos simplificados, no geral, fornecem valores abaixo do esperado ou com uma dispersão muito grande ao variar as propriedades do material. Nessa linha, Junges [10] estudou alguns métodos simplificados e modelos refinados para cálculo da parcela de flecha imediata de vigas biapoiadas e contínuas: o método de Branson [2] aplicada conforme a NBR 6118:2014 [1] e conforme os comentários técnicos da NB-1 publicados pelo IBRACON [11]; e o método bilinear descrito no Manual do CEB 1985 [4]. Os resultados obtidos por esses métodos foram comparados com os gerados por dois modelos refinados que utilizam a análise pelo MEF: MEV-Branson e MEV-Bilinear; e modelo de Stramandinoli [12]. Para as vigas biapoiadas, verificou-se que o MEV-

Branson forneceu resultados mais próximos do modelo de referência. Os resultados para vigas contínuas foram posteriormente publicados por Junges e La Rovere [13].

Muitos trabalhos foram feitos em relação ao estudo de flechas imediatas, porém, são poucos estudos sobre as flechas diferidas, e estes encontram-se desatualizados ou não são tão abrangentes. Este trabalho visa dar continuidade ao trabalho iniciado por Junges [10], realizando um estudo comparativo entre os métodos simplificados de cálculo de flecha total, atualmente adotados pelas normas brasileira e europeia.

2 Métodos para o cálculo de flecha de vigas de concreto armado

Neste trabalho são estudados os modelos simplificados indicados pela NBR 6118:2014 [1] e pelo *fib* Model Code 2010 [5], além de suas variações. Os métodos estudados estão implementados no programa computacional AVSer (Análise de Vigas em Serviço), desenvolvido para cálculo de flecha imediata por Junges [10], e a para flecha diferida por Pellanda [14]. Os modelos são descritos a seguir, com detalhes em suas respectivas referências.

Para o cálculo da parcela da flecha imediata, a norma brasileira NBR 6118:2014 [1] adota a fórmula de Branson [2], a fim de que se encontre uma rigidez equivalente $(EI)_{eq}$ que considere a contribuição do concreto fissurado na rigidez à flexão da viga. Após o cálculo da flecha imediata, a norma determina o cálculo de um fator de fluência α_f , que tem como parâmetros o tempo e a taxa de armadura da seção considerada mais crítica. Estuda-se, também, um método mais refinado de cálculo em relação ao método simplificado da NBR 6118. Neste modelo, baseado na equação de Branson (MEV-Branson), a viga é discretizada em vários elementos finitos de comprimento pequeno, sendo os deslocamentos e esforços nodais encontrados através da formulação de análise matricial. A rigidez equivalente $(EI)_{eq}$ e o fator α_f são calculados para cada elemento utilizando o expoente $m = 4$ na fórmula de Branson.

A norma europeia *fib* Model Code 2010 [5] recomenda que a flecha imediata seja resultado de uma interpolação entre a flecha calculada no Estádio I e a calculada no Estádio II, por meio do coeficiente de interpolação ζ . Para o cálculo da flecha diferida, é necessária uma alteração no módulo de elasticidade do material, transformando-o através do coeficiente de fluência, que tem como principais parâmetros o tempo e a umidade. Este método está também descrito com detalhes no Design Manual on Cracking and Deformations [4], em que se apresenta uma simplificação para o cálculo da flecha de vigas, considerando-se as informações somente da seção crítica do vão, e com uma pequena alteração no cálculo do coeficiente de interpolação. Este método mais simplificado denomina-se método bilinear e está incluído no estudo comparativo apresentado. Adicionalmente, similar ao modelo MEV-Branson, apresenta-se o modelo denominado MEV-Bilinear. Neste, a diferença em relação do modelo *fib* Model Code 2010 [5], é o cálculo do coeficiente de interpolação ζ e módulo de elasticidade efetivo $E_{c,ef}$, que é feito para cada elemento de viga discretizada.

3 Viga ensaiada por Baroni [6]

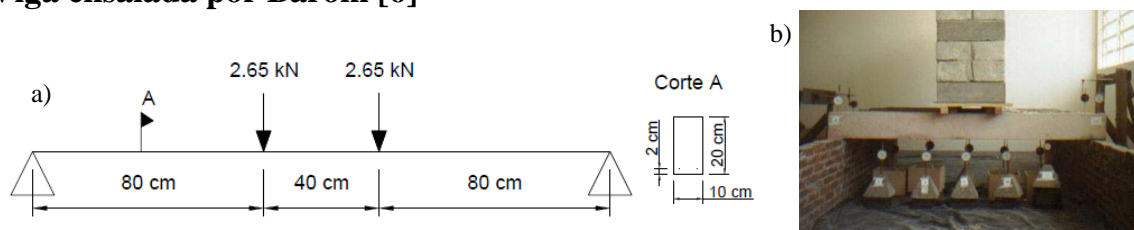


Figura 1. a) Geometria e tipologia do carregamento da viga experimental VT1. b) Ensaio experimental de Baroni.

Baroni [6] teve o objetivo de indicar critérios de norma que deveriam ser revistos ao estimar as deformações de concretos especiais. Do seu estudo, escolheu-se a viga VT1 de CA convencional, que tem geometria e carregamento conforme Fig. 1a e ensaiada como na figura 1b. Os blocos sobre a viga determinam o carregamento permanente pelo qual mediu-se as deformações. Em sua análise considera-se também uma carga distribuída de 0.5 kN/m devido ao peso próprio. O cobrimento é de 2 cm e a armadura longitudinal inferior composta de duas barras CA-50 de 6.3 mm de diâmetro (taxa de armadura $\rho = 0.31\%$). Através dos ensaios, encontrou-se $f_{ck} = 13.5 \text{ MPa}$ (resistência característica à compressão do concreto) e $E_{ci28} = 17590.75 \text{ MPa}$ (módulo de elasticidade tangente inicial do concreto aos 28 dias). Além disso, a umidade média registrada durante a realização das medições foi de 60,32%. Para a análise pelo programa AVSer, a viga foi discretizada em elementos de 10 cm.

A viga experimental forneceu resultados condizentes com os encontrados nos modelos teóricos. Os modelos da NBR 6118:2014 forneceram valores inferiores aos modelos do *fib* Model Code, como pode ser visto na Fig. 2. Contudo, vale ressaltar que até mesmo o modelo refinado do CEB forneceu valores menores que os experimentais, o que pode ter ocorrido devido à instabilidade da umidade aferida ou limitações do próprio modelo.

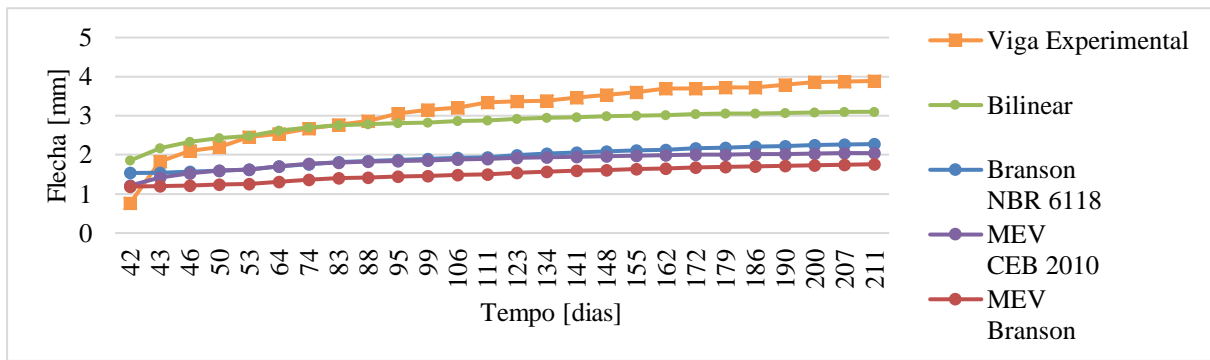


Figura 2. Gráfico flecha x tempo para a viga experimental VT1.

4 Vigas teóricas

Devido à escassez de vigas ensaiadas experimentalmente para a obtenção das flechas totais, algumas vigas teóricas, que foram analisadas por Junges [10], são selecionadas para realizar um estudo comparativo entre os diferentes modelos de cálculo apresentados. As vigas biapoiadas estão agrupadas por geometria, tendo em um mesmo grupo carregamentos variáveis e, conseqüentemente, taxas de armadura também variáveis, sendo que os detalhes podem ser encontrados em Junges [10], e foram selecionadas de forma a fornecerem um campo de estudo com propriedades variadas e comumente empregadas em estruturas usuais. As propriedades dos materiais, assim como a geometria e tipologia dos carregamentos adotados para cada grupo de vigas estão mostrados na Fig. 3.

As vigas foram dimensionadas conforme a NBR 6118:2007. A Tab. 1 apresenta os valores dos carregamentos considerados conforme as variáveis da Fig. 3, além da quantidade de barras e a área total que elas ocupam. Na última coluna é demonstrada a porcentagem do vão onde o momento solicitante máximo (M_{cqp}) é maior que o momento de fissuração (M_f) da viga. O grupo à qual as vigas pertencem estão indicadas na primeira coluna após o traço, e no segundo algarismo o tipo de carregamento (1 para distribuído e 2 para concentrado), sendo a VB-213 pertencente ao grupo 2 e com carregamento distribuído, por exemplo. Considera-se que a carga permanente seja aplicada após a cura do concreto, por isso o tempo inicial considerado foi de 1 mês (30 dias). Após 70 meses os modelos da NBR 6118:2014 mantém valores constantes, enquanto os modelos do *fib* Model Code 2010 apresentam uma variação pouco significativa, portanto, as flechas foram medidas no prazo de 70 meses. A região de Vitória – ES possui uma umidade média de 75%, por isso as vigas foram calculadas por esse valor no modelo do *fib* Model Code 2010. As vigas foram discretizadas em elementos de 10 cm para análise pelo AVSer.

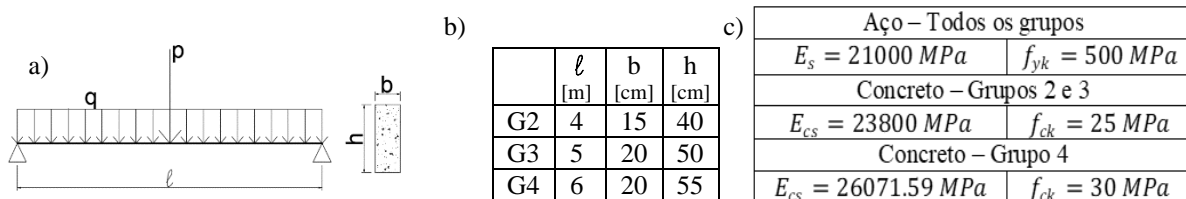


Figura 3. a) Geometria e tipologia do carregamento das vigas teóricas; b) Dados da geometria; c) Propriedades dos Materiais.

Observando os resultados das flechas totais obtidos para o tempo de 70 meses, que estão apresentados na Tab. 2, é possível observar que em 100% dos casos os modelos refinados apresentaram valores menores do que os modelos simplificados. Percebe-se, também, que à medida que aumenta a taxa de armadura os resultados simplificados e refinados para uma mesma norma vão se aproximando.

Para exemplificar a variação ao longo do tempo da flecha total calculada pelos diferentes modelos, mostram-se os resultados para as vigas VB-312 e VB-421 na Fig. 4. Pode-se observar que, para os modelos da NBR 6118:2014, o que diferencia o modelo refinado do modelo simplificado é o cálculo da flecha imediata, uma vez que é indiferente calcular o fator α_f para a seção mais crítica da viga ou para todos os elementos, pois no caso das vigas estudadas não há variação da taxa de armadura de compressão. O mesmo acontece com os modelos do *fib* Model Code 2010, onde o coeficiente de fluência é calculado por fatores que não variam ao longo da viga, portanto, a evolução das flechas diferidas segue um comportamento padrão ao longo do tempo, enquanto a flecha inicial é diferenciada pelo fato do modelo simplificado usar o momento de fissuração do trecho mais solicitado, enquanto o modelo refinado utiliza o momento atuante em cada elemento de viga.

Em todos os resultados pode-se observar que os modelos refinados sempre apresentam valores de flecha menores que seus respectivos modelos simplificados, o que deve ao fato de se observar cada elemento de viga, e

Tabela 1. Carregamentos e armadura longitudinal das Vigas Biapoiadas.

Viga	p (kN)	q (kN/m)	A _s		M _{cqp} >M _r (% vão)	Viga	p (kN)	q (kN/m)	A _s		M _{cqp} >M _r (% vão)
			barras	cm ²					barras	cm ²	
VB-213	-	12.9	4 ø 10.0	3.14	63.25	VB-312	-	17.2	4 ø 12.5	4.92	23.20
VB-214	-	17.2	6 ø 10.0	4.71	74.25	VB-313	-	25.8	4 ø 16.0	8.05	77.60
VB-215	-	21.5	5 ø 12.5	6.15	79.75	VB-322	36.95	2.5	4 ø 12.5	4.92	44.20
VB-216	-	25.8	6 ø 12.5	7.38	83.50	VB-323	58.45	2.5	4 ø 16.0	8.05	62.60
VB-217	-	30.1	4 ø 16.0	8.05	86.50	VB-411	-	12.3	4 ø 12.5	4.92	39.00
VB-218	-	34.4	5 ø 16.0	10.05	88.00	VB-412	-	20.5	4 ø 16.0	8.05	71.83
VB-219	-	43.0	6 ø 16.0	12.07	90.25	VB-413	-	28.7	6 ø 16.0	12.07	81.17
VB-222	28.4	1.5	3 ø 12.5	3.69	53.25	VB-421	27.37	2.75	4 ø 12.5	4.92	22.00
VB-223	45.6	1.5	3 ø 12.5	6.15	69.50	VB-422	51.97	2.75	4 ø 16.0	8.05	54.83
						VB-423	76.57	2.75	6 ø 16.0	12.07	67.67

Tabela 2. Resultados de Flechas Totais pelos diferentes métodos.

Vigas	Flechas Totais [cm]				Vigas	Flechas Totais [cm]			
	Branson NBR 6118	MEV Branson	Bilinear	MEV CEB 2010		Branson NBR 6118	MEV Branson	Bilinear	MEV CEB 2010
VB-213	1.2291	1.0366	0.8177	0.6363	VB-312	1.4765	1.2143	0.9535	0.7158
VB-214	1.7407	1.6317	1.015	0.8964	VB-313	2.1147	1.9636	1.1754	1.0295
VB-215	1.8237	1.7333	1.0439	0.9427	VB-322	1.2354	0.8349	0.7949	0.5376
VB-216	2.0798	2.0398	1.2077	1.1321	VB-323	1.7392	1.4493	0.9662	0.7905
VB-217	2.1683	2.1671	1.3103	1.255	VB-411	1.0611	0.7676	0.9373	0.552
VB-218	2.1975	2.1934	1.385	1.3348	VB-412	2.4552	2.1752	1.3695	1.1381
VB-219	2.2719	2.2745	1.533	1.4587	VB-413	2.9908	2.8543	1.6608	1.4977
VB-222	1.2671	0.9525	0.7368	0.559	VB-421	0.8140	0.5387	0.7555	0.4441
VB-223	1.7022	1.5348	0.9643	0.8489	VB-422	1.9706	1.4885	1.1069	0.8376
					VB-423	2.4134	2.1311	1.3400	1.1432

não supor que toda a viga estaria solicitada da pior forma possível. Além disso, foi possível observar que os modelos da norma europeia apresentam uma evolução de flecha diferida mais alta nos primeiros meses, mas após o décimo mês os valores tentem a subir lentamente, enquanto a norma brasileira apresenta um aumento de flecha melhor distribuído ao longo do tempo até os 70 meses, onde esse valor fica constante.

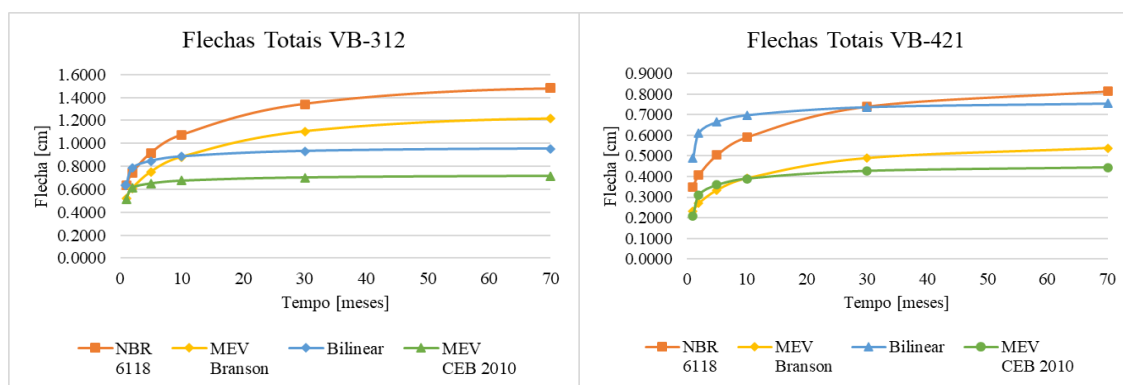


Figura 4. Gráficos flecha x tempo das vigas VB-312 e VB-421.

Os resultados encontrados são compatíveis com os de Araújo [7], onde concluiu que os métodos da norma europeia apresentam valores compatíveis com os resultados de análises não lineares, enquanto os modelos da NBR 6118 apresentaram valores mais altos. Além disso, ele não recomenda o método da NBR 6118.

Comparando as flechas do subgrupo 21, pela relação carga x flecha (Fig. 5a), verifica-se que, à medida que a taxa de armadura aumenta, os resultados entre modelo simplificado e seu respectivo refinado se aproximam, pois quanto maior a taxa de armação presente na seção, menor será a parcela de contribuição do concreto tracionado à rigidez da viga. A umidade é um fator importante no modelo do fib Model Code 2010, e o estudo feito na Fig. 5b para a VG-423 mostra o esperado: quanto menor a umidade do ambiente, maiores serão os valores de flecha, pois o concreto perderá mais água para o ambiente, ou seja, os efeitos de fluência e retração estarão acentuados.

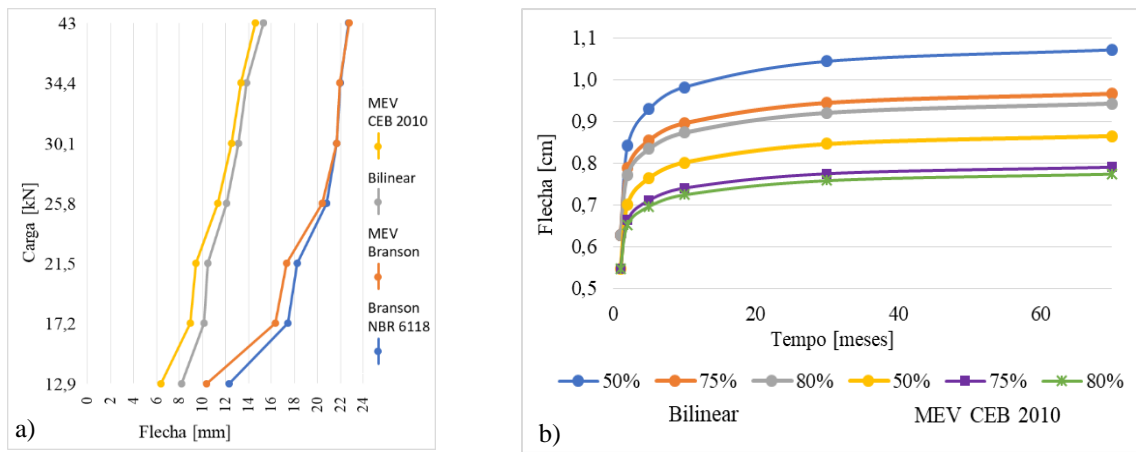


Figura 5. a) Gráfico de carga x flecha para as vigas do grupo 2. b) Gráfico de flecha x tempo com variação de umidade

5 Conclusões

Com a realização desse trabalho foi possível verificar que os valores de flecha fornecidas pela NBR 6118:2014 tendem a ser maiores que as fornecidas pelo *fib* Model Code 2010. Entretanto, a ausência de resultados experimentais impossibilitou que os resultados normativos fossem comparados, de modo a determinar qual modelo se assemelha mais com a realidade. Verificou-se também que os modelos refinados sempre fornecem valores de flechas menores que seus respectivos modelos simplificados, além de que os comportamentos das flechas diferidas são iguais para os métodos de uma mesma norma para os exemplos de vigas biapoiadas estudadas, sendo a principal variante o valor da flecha imediata.

Agradecimento. À Universidade Federal do Espírito Santo pela bolsa de Iniciação Científica que permitiu a realização desse estudo.

Declaração de autoria. Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material aqui incluído como parte do presente artigo é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para serem incluídos aqui.

6 Referências

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT. NBR 6118, *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] D. E. Branson. “Design procedures for computing deflections”. *ACI Journal*, September, 1968.
- [3] ACI COMMITTEE 318. “Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary”. ACI standard. American Concrete Institute, 2019.
- [4] Comité Euro-International du Béton – CEB. “Design Manual on Cracking and Deformations”. Lausanne, 1985.
- [5] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON FIB. Model Code 2010. Lausanne - Suíça, 2010.
- [6] H. J. M. Baroni. “Avaliação do comportamento dos deslocamentos transversais ao longo do tempo em vigas de concreto armado não convencional”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- [7] J. M. Araújo. “Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. Teoria e Prática na engenharia Civil”, n.5, Rio Grande, 2004.
- [8] A. O. B. Silva, A. C. Arauz e F. M. Rodrigues. “Estudo comparativo dos métodos de verificação da flecha em vigas de concreto armado”. *XXXII Jornadas Sulamericanas de engenharia Estrutural*, Campinas, 2006.
- [9] F. A. B. Poletto. “Análise da fluência em vigas de concreto armado simplesmente apoiadas usando o método dos elementos finitos”. Dissertação de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.
- [10] E. Junges. “Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- [11] INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO IBRACON. “ABNT NBR 6118:2014 Comentários e exemplos de aplicação”. São Paulo, 2015.
- [12] R. S. B. Stramandinoli. “Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado”. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [13] E. Junges e H. L. La Rovere. “Comparação entre modelos simplificados e de elementos finitos para flecha imediata em vigas contínuas de concreto armado”. *Revista Ibrakon de Estruturas e Materiais*, São Paulo, 2017.
- [14] L. C. Pellanda. “Modelo para Verificação de Vigas de Concreto Protendido em Serviço”. Qualificação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2020.