

# UM ESTUDO SIMPLIFICADO ANALÍTICO-NUMÉRICO DA CÚPULA DO PANTEÃO ROMANO.

Fillipe Marinho Faria<sup>1</sup>, Lineu José Pedroso<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>*Dept. de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, 70910-900, Brasília/DF, Brasil  
fmarinho.faria@gmail.com, lineujp@gmail.com*

**Abstract.** The interest in the recovery and maintenance of historical heritage requires mastery of the structural behavior of old buildings. The historical curiosity of contemporary scholars in the builders of the past, and in the construction methods adopted in Antiquity, has led to the development of knowledge, tools and innovative theoretical approaches, which allow the understanding of monumental works of architectural and historical interest, which has resisted time, as is the case with the Roman Pantheon. To understand how these monuments were built, how they behave and how the creative genius of their engineers and architects were used, comparative studies of methods from the past with more recent methods, aim to shed light on the understanding of this "art of construction".

Thus, in this work, mathematical models based on modern engineering theories, supported by advanced computational apparatus, are used to analyze in a simplified way the dome of the Roman Pantheon. A progressive analytical methodology through the Membrane Theory of spherical shells, and the Finite Element Method via SAP software are used to model the problem and compare the results, as well as its confrontation with previous studies of the literature also carried out with similar purposes.

**Key-words:** Roman Pantheon, Domes, Shells.

## 1 Introdução

O Panteão Romano é uma das estruturas mais emblemáticas da antiguidade, e que desperta o interesse e a curiosidade de muitos estudiosos de nosso tempo, razão pela qual seus estudos nas mais diversas áreas representam temáticas atuais e de interesse contemporâneo como pode ser encontrado em Marder; Jones [1], MacDonald [2] e Masi; et al. [3].

De forma geral, o Panteão Romano (Fig. 1a) é constituído por três partes principais: a rotunda, composta pela construção cilíndrica e a cúpula (Fig. 1b); o pórtico, uma típica entrada grega de templos, formado pelas colunas coríntias (Fig. 1c) juntamente com o entablamento e o frontão triangular, segundo o site do Archeoroma [4]; e a ligação entre os dois, que é feita pelo chamado bloco intermediário (Fig. 1d), conforme Marder; Jones [1].



Figura 1. (a) O Panteão Romano, (b) O *oculus* da cúpula, (c) Colunas externas, (d) Exterior do bloco intermediário, lado oeste

Conforme o site do Archeoroma [4], o nome latino *pantheum* é derivado do grego antigo *pantheon* (Πάνθειον), que significa “[templo] de todos os deuses”. De acordo com os últimos estudos e a literatura mais recente, descrito em Marder; Jones [1], a data mais provável do período de construção do Panteão é ca. 110-7-ca. 125-8, ou seja, sua construção foi iniciada no governo do imperador Trajano e finalizada com o imperador Adriano. Para Addis [5], é quase certo que a responsabilidade pela sua construção e pelo seu projeto tenha sido de Apolodoro de Damasco.

De acordo com MacDonald [2], em frente ao Panteão está a inscrição em seu frontão, abreviada e em latim: “M-AGRIPPA-L-F-COS-TERTIVM-FECIT”, ou “M[arcus] Agrippa L[ucii] F[ilius] co[n]sul[is] tertium fecit”. Em português: “Marco Agripa, filho de Lúcio, fez isto quando cônsul pela terceira vez”. Ainda hoje tal inscrição causa confusão considerável no que se refere à data de construção do Panteão, e não é raro que digam que ele foi feito no tempo do imperador Augusto. Na verdade, onde está localizado o atual Panteão, antes havia um santuário retangular, construído por Agripa em aproximadamente 25 a.C. Tal edifício, duas vezes incendiado, foi inteiramente substituído pela estrutura atual, exceto a inscrição de Agripa.

Na Fig. 2(a) e na Fig. 2(b) são apresentados desenhos feitos por Desgodetz [6] para melhor compreensão da estrutura do Panteão e de seus elementos estruturais.

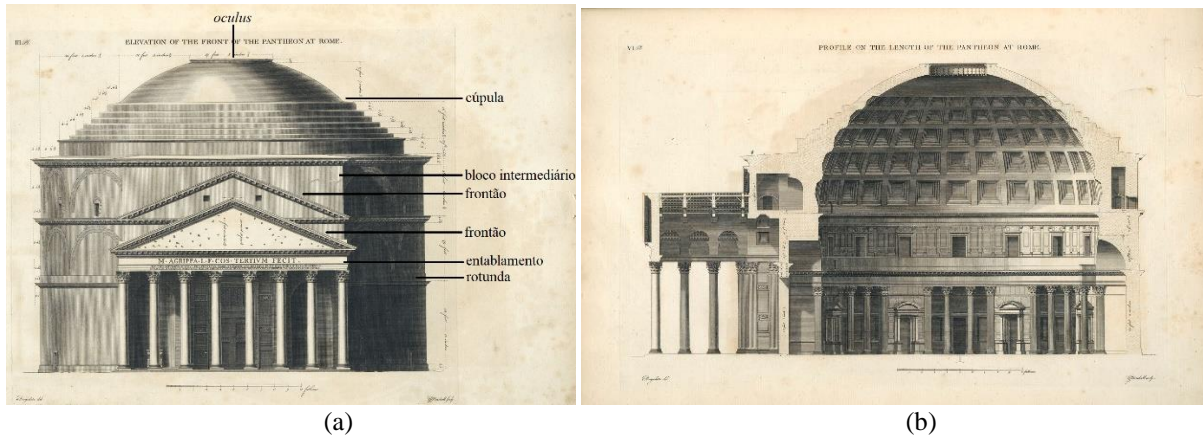


Figura 2. (a) Principais elementos estruturais do Panteão. (b) Seção transversal lateral do Panteão  
 Fonte: (a) Desgodetz modificado, (b) Desgodetz

## 2 Fundamentos Teóricos

### 2.1 Teoria de Membrana

Sejam as equações fundamentais de equilíbrio da teoria de membrana para cascas finas submetidas a carregamentos com simetria de revolução para o caso específico de uma cúpula esférica submetida a carregamento de peso próprio, conforme constam em, Rabello; et al. [7], Pedroso [8], Timoshenko [9] e Guerrin [10]:

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -p_z, \tag{1}$$

$$R = 2\pi a N_\phi \sin \phi, \tag{2}$$

$$N_\phi = -\frac{\gamma h a}{1 + \cos \phi}, \tag{3}$$

$$N_\theta = \gamma h a \left( \frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right), \tag{4}$$

$$R = -2\pi a^2 p, \tag{5}$$

em que:  $N_\phi = N_\phi(\phi)$ : Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano;  $N_\theta = N_\theta(\theta)$ : Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo;  $N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi} = 0$ : Forças de cisalhamento por unidade de comprimento;  $p_\phi = p_\phi(\phi)$ : Carregamento tangente à superfície da casca na direção do meridiano;  $p_\theta = 0$ : Carregamento tangente à superfície da casca na direção do paralelo;  $p_z = p_z(\phi)$ : Carregamento perpendicular à superfície da casca;  $a = r_1 = r_2$ : Raio médio da casca;  $h$ : Espessura constante;  $\gamma$ : Peso específico;  $p = \gamma h$ : Força por unidade de área;  $A = \int dA = 2\pi r_0 ds$ : Área da seção infinitesimal;  $R = pA$ : Resultante do peso próprio.

Os esforços e parâmetros acima descritos são apresentados na Fig. 3 para caracterizar melhor o problema em questão.

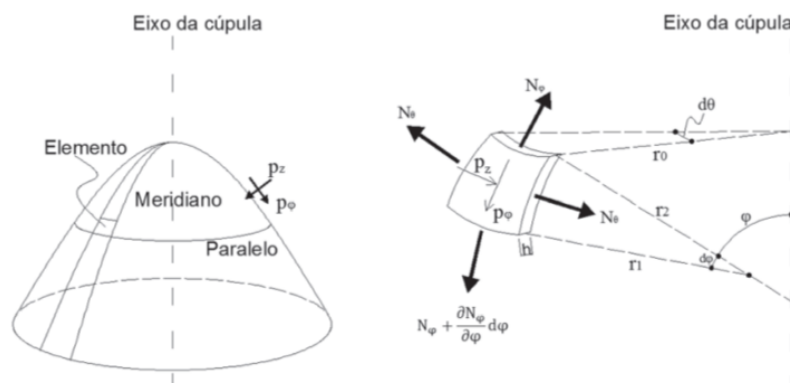


Figura 3. Cúpula genérica  
 Fonte: Rabello; et al., 2016, p. 561

Dimensões dos principais elementos do Panteão para o presente estudo são: diâmetro interno da cúpula = 43,30 m; espessura da cúpula na base = 5,90 m; e espessura da cúpula no topo = 1,40 m; conforme o site do Archeoroma [4].

Outros dados importantes para esse estudo estão apresentados a seguir e representados na Fig. 4, que são os valores de propriedades mecânicas dos materiais da rotunda, onde “Concrete 3” = 1600 kg/m<sup>3</sup>, “Concrete 4” = 1500 kg/m<sup>3</sup> e “Concrete 5” = 1350 kg/m<sup>3</sup>, conforme Lancaster apud Masi; et al. [3].

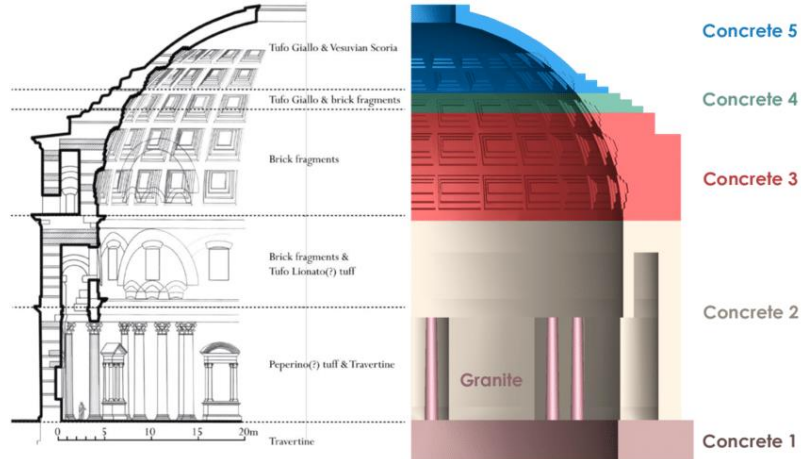


Figura 4. Composição dos materiais da rotunda  
Fonte: LANCASTER, 2005 apud MASI et al. 2018, p. 7

A cúpula do Panteão tem aproximadamente 5.000 toneladas métricas, conforme consta no site do Archeoroma [4] (i.e., 5.000.000 quilogramas).

### 3 Resultados

Nesse trabalho são empregados dois métodos de solução de uma cúpula esférica submetida a carregamento de peso próprio. Primeiro pela Teoria de Membrana, um modelo analítico simplificado para o entendimento inicial do comportamento da casca. Em seguida os resultados são comparados com o Método dos Elementos Finitos pelo software SAP. Para o presente estudo não foi considerado *oculus* (abertura) da cúpula.

#### 3.1 Teoria de Membrana

Aplicam-se a eq. (3) e a eq. (4) para o caso do Panteão. Nos casos de  $N_\phi$  e  $N_\theta$  tais equações ficam em função de  $\Phi$  ( $0 < \Phi < 90^\circ$ ). Analisando a eq. (3), percebe-se que  $N_\phi$  é sempre negativo para os valores de  $\Phi$ , ou seja, as forças normais na direção dos meridianos são sempre forças de compressão. O mesmo não ocorre com  $N_\theta$ . Resolvendo a eq. (4) para  $N_\theta = 0$ , temos  $\Phi = 51^\circ 49' 38''$ .

Portanto, conforme confirma Pedroso [7]: para  $\Phi < 51^\circ 49' 38''$ , a cúpula está exclusivamente sob compressão nos paralelos; e para  $\Phi > 51^\circ 49' 38''$ : a cúpula está exclusivamente sob tração nos paralelos.

Pela eq. (5) e com  $\Phi = 90^\circ$ , temos  $p = -50000 / (2 \cdot \pi \cdot 21,65^2) = 16,98 \text{ kN/m}^2$ . Logo  $Yha = ap = 21,65 \cdot 16,98 = 367,6 \text{ kN/m}$ .

Então a eq. (3) e eq. (4) ficam, respectivamente,

$$N_\phi = -367,6 \frac{1}{1 + \cos \Phi}, \quad (6)$$

$$N_\theta = 367,6 \left( \frac{1}{1 + \cos \Phi} - \cos \Phi \right). \quad (7)$$

#### 3.2 Método dos Elementos Finitos

Para a análise comparativa com o Método dos Elementos Finitos pelo SAP é necessário o cálculo da espessura média da cúpula. Os valores da literatura para o peso específico da cúpula do Panteão variam entre 1350 e 1600 kg/m<sup>3</sup>. Para o cálculo da espessura média  $h$  é escolhido um valor intermediário, e.g. 1500 kg/m<sup>3</sup>  $\approx 15,0 \text{ kN/m}^3$ , e utiliza-se a eq. (5) para obter  $h = 50000 / (2 \cdot \pi \cdot 21,65^2 \cdot 15,0) = 1,13 \text{ m}$ .

A princípio parece que o resultado de  $h$  é muito baixo (deveria ser um valor no intervalo  $1,40 \text{ m} < h < 5,90 \text{ m}$ ). Mas isso se deve aos muitos espaços vazios e aos painéis afundados que existem na cúpula do Panteão, reduzindo bastante o seu peso.

Com o SAP escolhe-se o modelo “Shells” e “Spherical Dome” com “Radius, R” de 21,65 m, “Row Down Angle, T”  $90^\circ$ , “Num. of Divisions, Angular” de 16, “Num. of Divisions, Z” de 8 e inserindo os dados relevantes da cúpula constrói-se a Fig. 5.

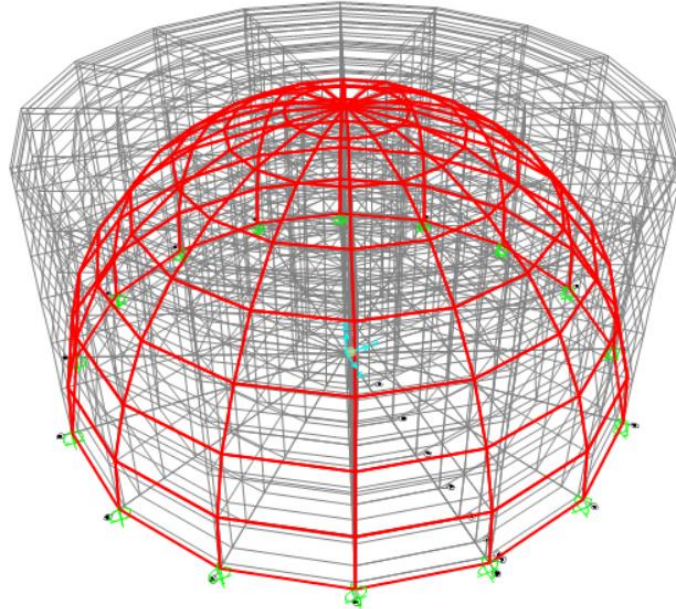


Figura 5. Modelo de cúpula esférica pelo Método dos Elementos Finitos no SAP

Na Fig. 6(a) e na Fig. 6(b) são apresentados os resultados 3-D do SAP em termos dos esforços de membrana  $N_\phi$  e  $N_\theta$ .

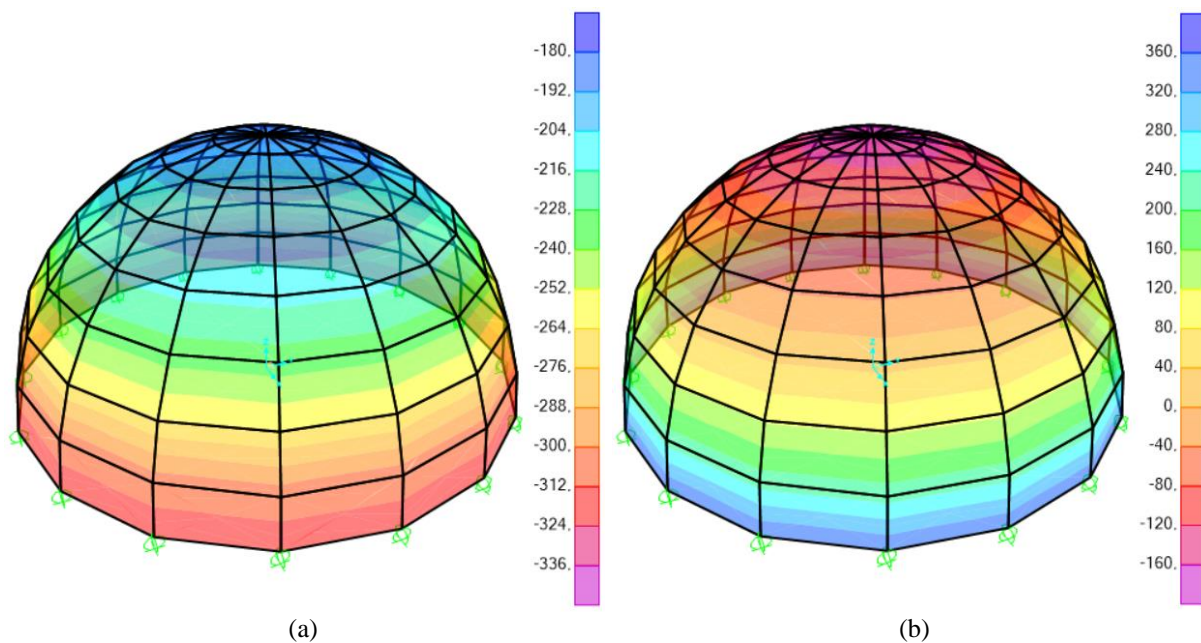


Figura 6. Esforços de membrana:  $N_\phi$  (a) e  $N_\theta$  (b)

### 3.3 Comparação dos dois métodos

Na Fig. 7 vemos os resultados comparativos entre a Teoria de Membrana feito analiticamente e plotado através da eq. (6) e da eq. (7) (em vermelho), e o Método dos Elementos Finitos feito numericamente com o SAP (em azul).

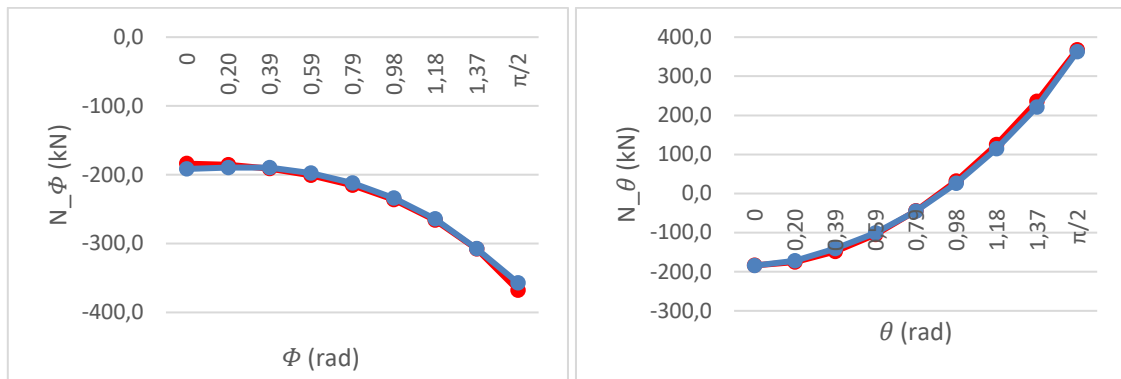


Figura 7. Resultados comparativos analíticos (vermelho) e numéricos (azul) para os esforços de membrana de  $N_\phi$  (a) e  $N_\theta$  (b)

Observar como os gráficos acima confirmam as análises feitas anteriormente no item 3.1 desse trabalho: os valores de  $N_\phi$  são sempre negativos, e os valores de  $N_\theta$  passam pelo zero em aproximadamente  $52^\circ \approx 0,91$  rad.

## 4 Conclusão

Através da comparação dos resultados analíticos e numéricos apresentados na Fig. 7, para os esforços de membranas  $N_\phi$  e  $N_\theta$ , verifica-se uma excelente correlação entre ambos, praticamente com curvas coincidentes, confirmando as expectativas dos valores esperados entre os esforços nos meridianos e nos paralelos da cúpula. Observa-se também a semelhança no formato das duas curvas com o que é encontrado na literatura, e.g. em Engel [11]. Todavia, esclarece-se que esse é um estudo preliminar simplificado; e para uma análise mais realística dessa estrutura, outras considerações precisam ser levadas em conta, como a cúpula do Panteão que apresenta uma abertura (*oculus*) além de sua espessura variável, bem como as propriedades mecânicas do concreto romano utilizado em suas diversas camadas que são diferentes.

**Authorship statement.** The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

## 5 Referências Bibliográficas

- [1] T. A. Marder; M. W. Jones, *The Pantheon – From Antiquity to the Present*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- [2] W. L. MacDonald, *The Pantheon: design, meaning, and progeny*. Cambridge: Harvard University Press, 1976.
- [3] F. Masi; I. Stefanou; P. Vannucci (2018), A study on the effects of an explosion in the Pantheon of Rome. *Engineering Structures*. 164. 259-273. 10.1016/j.engstruct.2018.02.082.
- [4] Archeoroma. Disponível em: <https://www.archeoroma.org/>. Acesso em: 13 jul 2020.
- [5] W. Addis, *Edificação: 3000 Anos de Projeto, Engenharia e Construção*. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- [6] A. B. Desgodetz, *Les edifices antiques de Rome, dessinés et mesurés tres exactement*. Paris: Chez Jean Baptiste Coignard, 1682.
- [7] F. T. Rabello; N. A. Marcellino; D. D. Loriggio, Processo automático para análise e definição de geometria de cúpulas axissimétricas pela teoria de membrana com tensões normais constantes. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, São Paulo, v. 9, n. 4, p. 544-557, ago. 2016. Disponível em <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-41952016000400544&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-41952016000400544&lng=pt&nrm=iso)>. acessos em 23 jun. 2020. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952016000400005>.
- [8] L. J. Pedroso, *Teoria de Placas e Cascas – Uma Abordagem Analítica e Numérica*. Publicação Didática. Brasília: Universidade de Brasília, 1995.
- [9] S. P. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [10] A. Guerrin; R. C. Lavour, *Tratado de Concreto Armado*. vol. 4. Hemus, 2003.
- [11] H. Eengel, *Sistemas de Estructuras*. Madrid: H. Blume, 1979.