

# Aplicação da Técnica de Redução de Ordem em Elementos Finitos para Simulações de Fluxo Transiente em Aquíferos.

Ricardo Pereira Guedes<sup>1</sup>, Cicero Vitor Chaves Junior<sup>1</sup>, Leonardo José Do Nascimento<sup>1</sup>, Paulo Marcelo Vieira Ribeiro<sup>1</sup>, Jean Baptiste Joseph<sup>1</sup>, Augusto César Albuquerque Ferreira<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dept. de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco

<sup>2</sup>Dept. Engenharia da Computação, Universidade de Salamanca

<sup>1</sup>Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n Cidade Universitária 50.740-530, Recife/PE, Brasil

<sup>2</sup>Universidad de Salamanca, 37008 Salamanca, Spain.

ricardo.pguedes@ufpe.br, cicero.vitor@ufpe.br leonardo.guimaraes@ufpe.br, paulo.vribeiro@ufpe.br, jean.baptiste@ufpe.br, augustocesalbuquerque@gmail.com.

**Abstract.** Aquifers are geological formations whose water extraction has guaranteed the supply of populations worldwide. The management of this type of system composed of porous rocks aims at both longevity of the natural resource and security of the extraction. Management is carried out through the solution of flow equation that represents the balance between water extraction (represented mainly by production wells) and aquifer recharge. The flow equation is a partial differential equation whose unknown is the hydraulic head and can be solved through numerical methods such as the finite difference method and the finite element method. In this modeling, a high level of discretization is required in order to have a reliable description of the permeability and porosity fields, fundamental properties that respectively control the flow and storage of water in the pores of the rock. At the same time, the aquifer is a very extensive domain (on the kilometer scale), thereby generating numerical models with high degrees of freedom.

In this type of problem, techniques that promote the reduction of the number of degrees of freedom, without considerable loss of the quality of the solution, can be extremely useful, especially when combined with uncertainty or optimization analysis, which require a large number of water flow simulations at aquifer scale. In this context, this paper discusses and proposes methodologies for reducing the model order of the water flow problem in aquifers solved by the finite element method.

**Keywords:** Reduced-order modeling, aquifer, Managing Resources.

## 1. Introdução

Os estudos sobre recursos naturais para o sustento da raça humana sempre foram e serão uma fonte inesgotável de pesquisa. O incessante aumento da demanda, pelo crescimento da população, acarreta que se tenha um gerenciamento cada vez mais apurado dos recursos finitos.

Aquífero é um reservatório de água em subsuperfície, fundamental para o suprimento hídrico de várias regiões do planeta. A extração adicional de água de um aquífero deve ser conduzida a partir de estudos hidrológicos que caracterizam variáveis muitas vezes associadas a um alto grau de incerteza, como as distribuições de porosidade e permeabilidade e a recarga do aquífero, esta última diretamente responsável por sua sustentabilidade. Em um levantamento mundial do balanço de águas, feito por Maidment [1], afirma-se que os aquíferos compreendem a 99% das águas doce para consumo na terra. Segundo Castilho-Barbosa et al [2], as águas subterrâneas são fundamentais para manutenção da vida no planeta: fazem parte dos ecossistemas e mantêm a descarga de rios, lagos, mangues e pântanos.

Segundo Oliveira [3], os impactos causados com a falta de uma gestão hídrica em ambientes urbanos vêm dificultando a manutenção do ciclo hidrológico, causando prejuízos às populações, principalmente durante picos

climáticos. Um planejamento urbanístico é fundamental para que se leve em conta a necessidade de melhor infiltração no solo para a recarga do aquífero e a diminuição de enchentes nas cidades, que causam danos aos mananciais, rios e lagos.

Adicionalmente, a extração intensa de aquíferos pode provocar a subsidência do subsolo em regiões de elevada redução de carga hidráulica, uma vez que a despressurização do meio poroso leva ao aumento das tensões efetivas de compressão e a sua consequente redução de volume. Também em regiões costeiras a salinidade da água dos aquíferos pode aumentar pela influência das águas dos oceanos, fenômeno conhecido como intrusão salina [4] [5].

Um caso particular, no Brasil, são os aquíferos da capital do estado de Pernambuco, o município do Recife, que com as várias faltas de abastecimento de água pelo racionamento imposto pela companhia de saneamento, a população recorreu a utilização de poços para o abastecimento [5]. Em estudos de acompanhamento do lençol freático de um poço no bairro de Boa Viagem, de janeiro de 1992 até dezembro de 2005, Montenegro et al [6] constatou um declínio de 59,61 metros, causado pelo excesso de exploração.

Caso de regiões com subsidência por causa dos aquíferos foram noticiados desde 1920 na China, gerando acidentes em algumas áreas [7]. O estudo de Ye et al [8] indica áreas que têm tido uma subsidência de 20 mm por ano. Segundo Gong et al [9], na província de Hebei a subsidência chega a 3 m, sendo a mais grave do Norte da China.

Pelos estudos encontrados, o acompanhamento de subsidência, na cidade de Recife, ainda são poucos e necessitam de um monitoramento maior, gerando uma melhor quantidade de dados para modelos que simulem numericamente e conduza a ações que evite o que está acontecendo na China e em outras partes do mundo.

Com um código de fluxo transiente em meio poroso se consegue acompanhar o desempenho dos aquíferos e gerenciar ações de engenharia que possam antecipar os efeitos causados pela redução da recarga, ou exploração excessiva, problemas recorrentes no manejo das águas subterrâneas das grandes cidades. Adequar a drenagem para facilitar a infiltração (recarga) para os aquíferos, verificar pontos onde poderão ser mais preocupantes com uma possível subsidência e locais onde a intrusão salina pode afetar são pontos relevantes para a gestão das águas subterrâneas. Um balanço de massa, incluindo recarga e exploração, permitirá a tomada de decisões mais realísticas. A simulação numérica adequada, com arranjos morfológicos e de qualificação de seus resultados, conferirá uma maior assertividade aos projetos urbanos [3]. Segundo Khadri e Pande [10], os modelos computacionais de águas subterrâneas desempenham um papel importante no gerenciamento dos recursos hídricos e na previsão dos efeitos das medidas gerenciáveis.

Este artigo tem como objetivo proporcionar um método de redução de ordem para resolver sistemas de fluxo transiente em meio poroso. Modelos de ordem reduzida, nesses casos, podem produzir soluções aproximadas mais rápidas, preservando a precisão, se projetadas adequadamente [11]. O método de redução de ordem é um conceito de aproximação que se vem crescendo muito nos últimos anos que podem ser especialmente úteis em problemas de física complexa e/ou domínios de grande extensão. No caso em estudo, reduz-se a quantidade de graus de liberdades através do sistema de particionamento das matrizes e vetores globais.

O artigo descreve uma maneira de redução de ordem por meio do particionamento de matrizes pelo método proposto por Guyan. Um método extremamente conhecido para sistemas de equações estacionárias por proporcionar soluções exatas. Como os sistemas de equações de fluxo são dinâmicos foi necessário que a teoria fosse revista e adaptada. Além dessa adaptação, foi feita outra proposta para que se conseguisse uma redução adicional nas matrizes construídas, concentrado a massa de certas regiões nos graus de liberdades dos seus contornos, reduzindo as contribuições dos graus de liberdades centrais. Essa técnica foi usada tanto para os métodos usados com particionamento como no método sem o particionamento.

## **2. Fluxo em meio poroso**

O fluxo através de meio poroso é estudado em várias áreas das engenharias e ciências da terra como por exemplo hidrologia de águas subterrâneas, engenharia de reservatório, mecânica dos solos, engenharia química, entre outros. Como exemplos de material poroso têm-se os solos, as rochas porosas ou fissuradas, cerâmicas, agregados fibrosos, papel de filtro, filtro de areia, entre outros. Em geral, um meio poroso pode ser definido como uma matriz sólida com espaços vazios [12].

No caso de um aquífero, a água flui através da complexa rede de poros e canais que compõem os espaços

porosos, sendo assim a necessidade de serem interconectados [14].

Partindo da equação governante para fluxo transiente (macroscópico) em meio poroso, já considerando nela o fluxo de água dado pela lei de Darcy, chega-se a eq.1 abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right) - q - S \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

onde  $k_{ij}$  é o tensor de condutividade hidráulica,  $\bar{h}$  o potencial hidráulico,  $S$  é o armazenamento específico e  $q$  é a recarga [13].

A condutividade hidráulica relaciona o fluxo volumétrico de fluido e o gradiente hidráulico imposto, que depende do meio poroso e da viscosidade do fluido percolante, que no caso é a água. O armazenamento ( $S$ ) de um aquífero indica a relação entre as mudanças na quantidade de água armazenada e as correspondentes alterações nas elevações da superfície piezométrica [12].

Para resolução da equação diferencial, utiliza-se o método dos elementos finitos, aplicando o procedimento de Galerkin na eq. 1. Onde  $\hat{h}$  será uma solução possível, escrevendo-se na forma:

$$\hat{h}(x_1, x_2, t) = N_j(x_1, x_2) \bar{h}_j(t) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Substituindo o valor de  $\hat{h}$  na eq. 1 e minimizando o residual gerado, tem-se a formulação fraca de Galerkin:

$$\int_R SN_I N_J \frac{dh_j}{dt} dR + \int_R k_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} h_j dR = - \int_B N_I q dB - \int_R N_I q' dR, \quad (3)$$

onde  $R$  é o domínio do fluxo e  $B$  é a região da superfície (b1 e b2) onde a condição de contorno é aplicada, mostrados na Fig. 1,  $q$  é a vazão de saída através da fronteira, associado à condição de contorno de Neumann,  $q = - \left( k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) n_i$ , ao longo de todo o contorno, com normal  $n_i$  para fora do domínio.

Logo a eq. 3 pode ser escrita na forma matricial descrita a seguir:

$$[S] \left\{ \frac{dH}{dt} \right\} + [K] \{H\} = \{Q\}, \quad (4)$$

onde cada parcela das matrizes representadas é formada pela composição dos elementos individuais em referência global,  $[S] = \sum_{e=1}^m [S]^e$ ,  $[K] = \sum_{e=1}^m [K]^e$ ,  $\{Q\} = \sum_{e=1}^m \{Q\}^e$

Estes elementos são:

$$K_{Ij}^e = \int_{R^e} k_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} dR, \quad (5)$$

$$S_{Ij}^e = \int_{R^e} SN_I N_J dR, \quad (6)$$

$$Q_I^e = - \int_{B^e} N_I q dB - \int_{R^e} N_I q' dR, \quad (7)$$

onde teremos  $K$  que é a matriz de condutância, constituída pela condutividade hidráulica dos materiais envolvidos e sua respectiva espessura,  $S$  que é a matriz de massa, constituída do armazenamento específico,  $Q$  que é a recarga aplicada, que será constante no decorrer do tempo.

A partir da matriz de armazenamento específico encontrada, pode-se proceder a operação de concentração de armazenamento específico e obter a matriz diagonal:

$$\tilde{S}_{ii}^e = \sum_j S_{ij}^e. \quad (8)$$

Sendo está a matriz mais conveniente para as soluções em problemas transientes em situações onde se necessita de inverter as matrizes globais.

### 3. Particionamento de Guyan

Para resolver o fluxo em meio poroso de forma que se pudesse obter o melhor desempenho com o procedimento de redução de ordem, foi gerado código com a técnica de particionamento (em blocos) do sistema, por meio da técnica de particionamento de Guyan [15].

Partindo da eq. 4 e reduzindo a representação do potencial hidráulico por  $h$ , pode-se representar assim o sistema de equações diferenciais que governam o fluxo em um meio poroso macroscópico,

$$[K] \{h\} + [S] \{\dot{h}\} = \{Q\}, \quad (9)$$

que representa uma equação linear de primeira ordem constituída pelas matrizes  $[S]$  e  $[K]$ , com ambas de ordem

$m$ , e os vetores  $\{Q\}$ ,  $\{\dot{h}\}$  e  $\{h\}$ , nos quais  $\{\dot{h}\}$  e  $\{h\}$  são variáveis dependentes do tempo, com ordem  $m$ .

Expandido as matrizes e particionando em blocos a eq. 9, em conjunto de graus de liberdade do tipo mestre (m) e escravo (s), é possível chegar à equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_m \\ h_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{mm} & S_{ms} \\ S_{sm} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}_m \\ \dot{h}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ Q_s \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

A primeira linha corresponde às incógnitas dos graus de liberdade tipo mestre ( $m$ ), ao passo que a segunda corresponde às do tipo escravo (s), que pertencem ao domínio particionado  $R_1$ , conforme Fig. 1. Na técnica de particionamento, o objetivo é a construção de um sistema de equações definido apenas pelas incógnitas do tipo mestre ( $m$ ). Desta forma o sistema inicialmente é composto por matrizes  $S$  e  $K$  de dimensões  $n \times n$  e  $Q$  é o vetor de dimensão  $n$  e  $h$  o vetor de incógnitas de dimensão  $n$ .

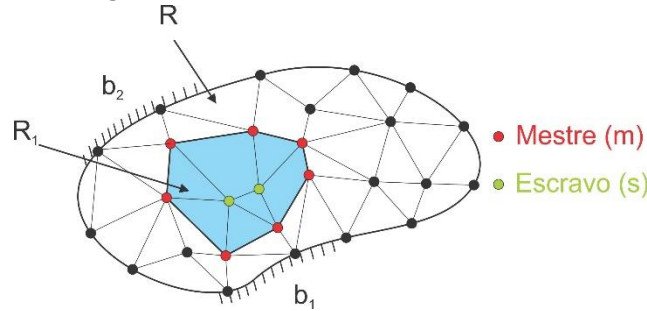


Figura 1 – Condições de Contorno e Nós Mestres e Escravos

No particionamento original de Guyan [15] em uma abordagem clássica de condensação estática tem-se,

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_m \\ h_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ Q_s \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Assumindo que  $Q_s = 0$ , e resolvendo a segunda linha, o deslocamento para o escravo será

$$h_s = -K_{ss}^{-1} K_{sm} h_m. \quad (12)$$

Em substituição à primeira linha tem-se:

$$h_m (K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm}) = Q_m, \quad (13)$$

ficando  $K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm}$  como a matriz  $K$  reduzida, na expressão  $h_m(K) = Q_m$ .

O que leva a uma matriz de transformação para o particionamento de Guyan,

$$T_G = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad (14)$$

onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $m$  e  $T_G$  é a matriz de transformação linear do espaço  $n$  para  $m$ . Desta forma, um sistema inicialmente de dimensões  $n$  passa a ser representado de forma equivalente por um sistema de dimensão  $m$ , onde  $m < n$ .

Usando-se a matriz de transformação linear  $T_G$  para reduzir as matrizes do sistema da eq. 10, gera-se então:

$$\bar{S} = T_G^T S T_G = S_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} S_{sm} - S_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} + K_{ms} K_{ss}^{-1} S_{ss} K_{ss}^{-1} K_{ms}, \quad (15)$$

$$\bar{K} = T_G^T K T_G = K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm}, \quad (16)$$

$$\bar{Q} = T_G^T Q = Q_m - K_{ss}^{-1} K_{sm} Q_s. \quad (17)$$

Para permitir a redução de ordem em problemas transientes, partiu-se para a Concentração de Massa que é concentração da massa constituída do armazenamento específico nos graus de liberdades mestres. Somando as contribuições dos armazenamentos específicos dos graus de liberdades escravos à contribuição dos graus de liberdades mestres, obtém-se  $S_{total}$ , isto é, concentram-se as contribuições dos armazenamentos específicos dos escravos nos mestres, tornando a matriz global de contribuições dos armazenamentos específicos dos escravos nula, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_m \\ h_s \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} S_{total} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}_m \\ \dot{h}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Fica claro que com este procedimento a eq. 15 será totalmente reduzida, não precisando das contribuições dos escravos:

$$\bar{S} = S_{mm} = S_{total}.$$

Para o avanço no tempo de um sistema semi-discreto de equações diferenciais de primeira ordem, conforme a eq. 4, está sendo proposto utilizar o método generalizado trapezoidal, segundo Hughes e Liu [16],

$$[\bar{K}]\{h_{n+1}\} + [\bar{S}]\{\dot{h}_{n+1}\} = \{\bar{Q}_{n+1}\}, \quad (19)$$

que em sua discretização temporal fica,

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + (1 - \theta) \Delta t \{\dot{u}_n\} + \theta \Delta t \{\dot{u}_{n+1}\}, \quad (20)$$

usando  $u$  para representar o deslocamento em uma discretização temporal.

A nova equação governante transiente resumida será

$$[S] \{h^{k+1}\} = \{Q\}, \quad (21)$$

onde a nova matriz  $[S]$  representa as matrizes  $\left(\frac{[S]}{\theta \Delta t} + [\bar{K}]\right)$  que corresponde a parte de armazenamento hidráulico e sua transmissibilidade na contribuição transiente, e  $\{Q\}$  representa toda a parte de recarga e sumidouro pertinentes em  $\{\bar{Q}_{n+1}\} + [\bar{S}]\left(\frac{1}{\theta \Delta t} \{x_n\} + \frac{(1-\theta)}{\theta} \{\dot{x}_n\}\right)$ .

Para  $\theta > 0$  os sistemas de equações são ditos implícito, já para casos onde  $\theta > \frac{1}{2}$ , os sistemas são estáveis e para o  $\theta=1$  o sistema é incondicionalmente estável.

#### 4. Estratégia de solução

Ferramentas numéricas foram desenvolvidas com as formulações aqui apresentadas e seguindo os grupos divididos em Não Concentrado, Concentrado, Sem Redução e Sem Redução Concentrado.

No pré-processamento do código, entrou-se com os dados iniciais do problema, suas condições de contorno e com as montagens das matrizes e vetores globais utilizando-se o método dos elementos finitos conforme demonstrado nas eq. 5, 7 e 8. De acordo com o grupo escolhido, executa-se o particionamento utilizando as eq. 15, 16 e 17. Com o fim da etapa de pré-processamento, os dados estão prontos para serem processados nos seus devidos códigos.

Para o código de regime transiente (evoluindo com o tempo) escolheu-se um sistema incondicionalmente instável para a eq. 21.

No grupo de Não Concentrado (NC), o particionamento de Guyan é executado separando os graus de liberdade mestres (m) e escravos (s) e executado pelo solver, conforme eq. 15, 16 e 17, necessitando dos escravos para entregar a solução.

No grupo de Concentrado (C), além do particionamento de Guyan, é feita uma soma das contribuições dos graus de liberdades escravos, colocando-se nos mestres (m), conforme demonstrado na eq. 18, fazendo com que no processamento da massa do armazenamento específico na contribuição de tempo, não se necessite voltar ao processamentos dos graus de liberdades escravos (s).

No grupo de Sem Redução (SR), o processamento é feito sem a redução por particionamento, utilizando a integração direta com elementos finitos normalmente. Mas no grupo de Sem Redução com Concentração (SC) se fazem divisões no domínio e concentra as massas do armazenamento específico nas extremidades, para reduzir as contribuições dos graus de liberdade.

#### 5. Resultados

Foi construído um domínio de um fluxo hipotético com o formato de um cubo de dimensões de 1000 x 1000 x 1000 metros, nas coordenadas x, y e z respectivamente, com propriedades conhecidas conforme a Tab. 1 abaixo:

Tabela 1 - Propriedades do aquífero

Porosidade	1,00E-01	
Compressibilidade	4,50E-04	1/Pa
Condutância		
Kx	1,00E-11	m <sup>2</sup>
Ky	1,00E-11	m <sup>2</sup>
Kz	1,00E-11	m <sup>2</sup>
Viscosidade	1,00E-09	Pa.s
Densidade	1000	Kg/m <sup>3</sup>

Para simular o fluxo no aquífero, induziu-se em uma das extremidades de uma direção, na coordenada x, uma diferença de carga hidráulica de 2 m, o que proporcionou o fluxo do fluido em 3.000 segundos.

Os testes foram denominados de teste 1 e teste 2. Os mesmos tiveram seus domínios discretizados em 10 elementos tetraédricos em cada uma das dimensões, e para que se utilize a técnica de particionamento de Guyan, foi particionado no teste 1 em 8 particionamentos e no teste 2 em 64 particionamentos. A Figura 2 mostra a discretização dos dois testes e o particionamento executado para o teste 1. A Figura 3 mostra a distribuição da carga sobre o domínio, após os 3000 segundos e os pontos (P1 e P2) dos nós que foram utilizados para fazer o acompanhamento dos resultados.

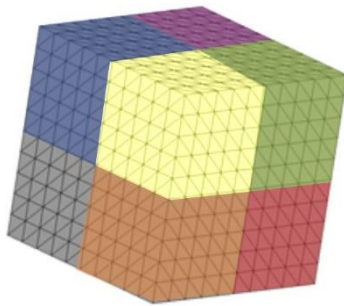


Figura 2 - Discretização e particionamento do domínio

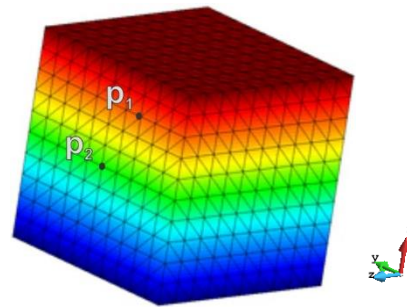


Figura 3 - Distribuição do carregamento e posicionamento dos nós de estudo

Os resultados dos grupos estão sendo representados nas Figura 4 e Figura 5, mostrando o avanço dos valores do gradiente hidráulico no tempo. Cada grupo está representado com sua específica linha e abreviação (o grupo Sem Redução (SR), grupo Concentrado (C), grupo Não Concentrado (NC) e grupo Sem Redução Concentrado (SC)), como também os testes 1 e 2 representados por t-1-1 para o teste 1 com o nó do ponto 1 e t-2-1, para o teste 2 com o nó do ponto 1 (P1) e assim conseqüentemente para o nó do ponto 2 (P2) diferenciando só o segundo número de 1 para 2, como foi definido anteriormente e mostrado na legenda..

Analisando os resultados de cada grupo com particionamento, é fácil identificar a proximidade das linhas, o que demonstra a congruência nos resultados, tanto para o nó no ponto 1 e como no ponto 2 (nó 1 e nó 2). Ambos são facilmente diferenciados pela diferença de altura da carga hidráulica que passa no nó e que é mostrado visualmente na Figura 3, que representa a distribuição de carga hidráulica no aquífero.

Com o aumento do particionamento do domínio (cujo o do teste 1 é mostrado na Figura 2), demonstra, como esperado, a aproximação de todos os grupos aos resultados dos grupos Sem Redução, que foi usado como referência. No caso do grupo Sem Redução com Concentração, o ajuste da curva é muito mais visível, pois quanto mais particiona o domínio, o particionamento será mais próximo da discretização. Para o grupo dos Não Concentrado, os resultados com a Sem Redução foram praticamente exatos.

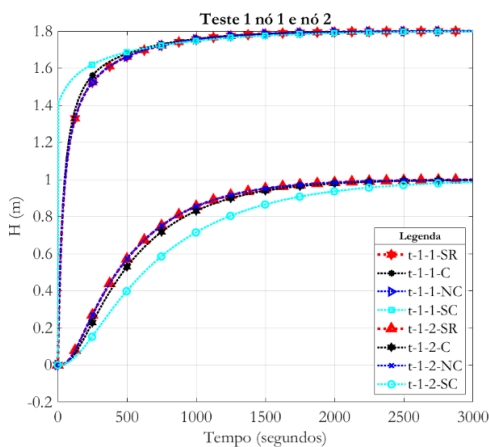


Figura 4 - Resultados do Teste 1

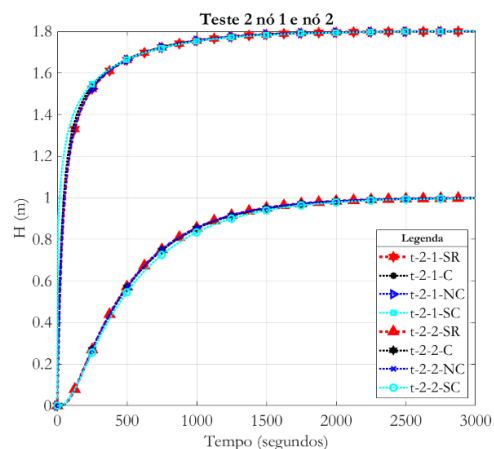


Figura 5 - Resultado do Teste 2

## 6. Conclusão

O artigo mostra a utilização do particionamento de Guyan como técnica de redução de ordem em um problema cujo domínio é um aquífero hipotético, em que simula um fluxo transiente através de uma recarga em uma região conhecida e com dados iniciais conhecidos. Com o estudo descrito no artigo conseguiu-se gerar a construção de um algoritmo matemático para o problema, no qual se consegue adaptar a técnica de particionamento de matrizes de Guyan, que é utilizada para sistemas de equações estáticas, em um sistema dinâmico, e comparando ao sistema de integração direta em elementos finitos convencional.

Ao algoritmo gerado ainda foi incorporado uma técnica de Concentração de Massa, uma técnica que se consegue computacionalmente transferir as contribuições de massa do armazenamento específico dos graus de liberdades internos para as bordas. A Concentração de Massa foi utilizada tanto para técnica de particionamento, como para sem particionamento (Sem Redução), com o intuito de se conseguir diminuir as matrizes do armazenamento específico. Sendo então executados os testes conforme as fig. 4 e 5.

As técnicas dos grupos descritas no artigo podem ser inseridas em programas elementos finitos com certas facilidades. O próximo passo é aplicar os métodos de redução de ordem aqui mostrados em situações mais realísticas de um aquífero, comparando com outros trabalhos científicos através de benchmarks de algoritmos e códigos numéricos.

### Autoria.

Os autores confirmam que são os únicos responsáveis pela autoria deste trabalho, e que todo o material que foi incluído como parte do presente trabalho é propriedade (e autoria) dos autores, ou tem a permissão dos proprietários para ser incluído neste trabalho.

## 7. Referências

- [1]. MAIDMENT, D. R. **Handbook of Hydrology**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1993
- [2]. CASTILHO-BARBOSA, I. N. B. D. et al. Conhecer para conservar aquíferos: como torná-los visíveis? **Terrae didactica**, v. 16, p. 1-12, 2020.
- [3]. OLIVEIRA, A. D. N. et al. Padrões urbanos facilitadores da recarga de aquíferos. **Revista de Morfologia Urbana**, 2019.
- [4]. CARY, L. et al. Origins and processes of groundwater salinization in the urban coastal aquifers of Recife (Pernambuco, Brazil): A multi-isotope approach. **Science of the Total Environment journal**, 2015. 411-429.
- [5]. LUNA, R. M. R. D. et al. Groundwater overexploitation and soil subsidence monitoring on Recife plain (Brazil). **Nat Hazards**, Janeiro 2017. 1363-1376.
- [6]. MONTENEGRO, S. M. G. L. et al. Águas Subterrâneas na Zona Costeira da Planície do Recife (PE): Evolução da Salinização e Perspectivas de Gerenciamento. **RBRH — Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 14, p. 81-93, 2009.
- [7]. GUO, H. et al. Groundwater-derived land subsidence in the North China Plain. **Environ Earth Sci**, fev 2015.
- [8]. S, Ye.; XUE Y, W. J.; YAN X, Y. J. Progression and mitigation of land subsidence in China. **Hydrogeol**, v. 24, p. 685-693, 2016
- [9]. GONG, H. et al. Long-term groundwater storage changes and land subsidence. **Hydrogeology Journal**, p. 1417–1427, 2018
- [10]. KHADRI, S. F. R.; PANDE, C. Ground water flow modeling for calibrating steady state using MODFLOW software: a case study of Mahesh River basin, India. **Model. Earth Syst. Environ.**, p. 2-17, 2016.
- [11]. BAO, A. et al. **Data-Driven Model Reduction for Coupled Flow and Geomechanics Based on DMD Methods. Fluids**, v. 4, n. 3, p. 138, 2019.
- [12]. JACOB BEAR. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. Dover Publications. Dover Publications, 1972.
- [13]. HUYAKORN, P. S.; PINDER, G. F. **Computational Methods in Subsurface Flow**. [S.l.]: ACADEMIC PRESS, 1983.
- [14]. BEAR, J.; VERRUIJT, A. **Modeling Groundwater Flow and Pollution**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987.
- [15]. GUYAN R. J. Reduction of stiffness and mass matrices, **AIAA Journal**, 1965. Disponível em: <<http://ci.nii.ac.jp/naid/30037751255/>>
- [16]. HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory. **Journal of Applied Mechanics**, Transactions ASME, v. 45, n. 2, p. 371–374, 1978.