

Nucleação e propagação de fraturas em placas de Kirchhoff utilizando o método da derivada topológica

Daniel M. Vaneli¹, Marcel D. Xavier¹, Sebastián M. Giusti², Antonio A. Novotny³

¹*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense - PGMEC/UFF*

Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, Niterói - RJ, Brasil

danielvaneli@id.uff.br, marcelxavier@id.uff.br

²*Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba - UTN-FRC/CONICET*

Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA - Córdoba, Argentina

sgiusti@frc.utn.edu.ar

³*Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica*

Av. Getúlio Vargas 333, 25651-075, Petrópolis - RJ, Brasil

novotny@lncc.br

Resumo. O modelo de dano de Griffith-Francfort-Marigo descreve o comportamento de materiais frágeis em regime quasi-estático, com foco na evolução das regiões de dano. Baseia-se na minimização de um funcional de forma dado pela soma da energia potencial total do sistema com o termo de dissipação energética de Griffith, com relação à distribuição das fases saudáveis e danificadas, sob uma condição de irreversibilidade. A energia potencial total do sistema, se dá, neste trabalho, pelo modelo mecânico para flexão pura baseado nas hipóteses de Kirchhoff e é conhecido como teoria das placas de primeira ordem. Uma abordagem natural para lidar com esse problema de minimização consiste em utilizar o conceito de derivada topológica. Portanto, inicialmente é apresentada a derivada topológica para o funcional de forma em questão, com respeito a nucleação de uma inclusão circular. Em seguida, a sensibilidade associada é utilizada para propor um esquema numérico simples a fim de determinar a nucleação e a propagação de fraturas em placas. Em outras palavras, a derivada topológica é utilizada como direção de descida para minimizar o funcional de Francfort-Marigo, indicando, em cada iteração, as regiões que serão danificadas. Por fim, alguns exemplos numéricos são apresentados a fim de validar a metodologia proposta.

Palavras-chave: Nucleação e propagação de fraturas, Placas de Kirchhoff, Derivada topológica

1 Introdução

A Derivada Topológica mede a sensibilidade de um dado funcional de forma com respeito à introdução de uma perturbação infinitesimal no domínio como inserções de furos, inclusões, termos fonte ou trincas. Este conceito foi rigorosamente introduzido por Sokołowski e Żochowski [1] e, desde então, essa ferramenta se provou ser extremamente útil em diversos problemas da física e da engenharia como otimização topológica [2], processamento de imagens [3], e, em particular, no contexto da mecânica da fratura [4].

Neste trabalho, a derivada topológica é utilizada em conjunto com os modelos de dano de Francfort e Marigo [5] e de placas de primeira ordem tendo em conta as hipóteses de Kirchhoff [6] a fim de estudar a nucleação e a propagação de fraturas neste cenário. Com esta finalidade, inicialmente é apresentada a derivada topológica para o funcional de forma associado, com respeito a nucleação de uma pequena inclusão circular. Em seguida, a sensibilidade associada é utilizada para propor um esquema numérico simples a fim de determinar a nucleação e a propagação de fraturas em placas. Em outras palavras, a derivada topológica é usada como direção de descida para minimizar o funcional de Francfort-Marigo, indicando, em cada iteração, as regiões que serão danificadas. A fim de validar a metodologia proposta, alguns exemplos numéricos são apresentados.

O artigo está organizado da seguinte forma. O modelo mecânico é revisitado na Seção 2. A derivada topológica associada é apresentada na Seção 3. O algoritmo de otimização da topologia resultante é detalhado na Seção 4. Os resultados numéricos obtidos são apresentados na Seção 5. Por fim, o artigo conclui com algumas considerações finais na Seção 6.

2 Modelo mecânico

O modelo de dano proposto por Francfort e Marigo [5], é utilizado para descrever a evolução quase-estática de corpos linearmente elásticos com uma trinca em propagação. De acordo com o modelo, tal comportamento é obtido minimizando um funcional que é a soma da energia potencial total do sistema com uma medida de dissipação energética. O modelo apresenta algumas limitações devido a sua natureza puramente energética, todavia, converge no sentido da Gamma-convergência para o modelo de fratura de Griffith [7], amplamente utilizado na modelagem de fratura frágil.

Considere um corpo elástico deformável representado por um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 2$, aberto, limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$ e que contém em seu interior uma região ω representando a zona previamente danificada. O modelo de Francfort-Marigo propõe que deve existir uma mudança abrupta de comportamento caso alguma condição associada ao material ocorra. Assim, a proposta deste modelo de dano consiste em, inicialmente, introduzir um par de materiais: um representando a região sadia, isto é, $\Omega \setminus \bar{\omega}$, e o outro a região danificada ω . Com esta finalidade introduz-se um parâmetro $\rho : \Omega \rightarrow \{1, \rho_0\}$ definido da seguinte forma:

$$\rho = \rho(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \rho_0, & \text{se } x \in \omega, \end{cases} \quad (1)$$

com $0 < \rho_0 \ll 1$. Assim, a mudança do material sadio para o material danificado ocorre somente se a liberação da energia associada a esta transição superar um determinado valor característico associado ao material. Por fim, o funcional de Francfort-Marigo $\mathcal{F}_\omega(u)$ é definido como a soma da energia potencial total com um termo de dissipação de energia:

$$\mathcal{F}_\omega(u) = \mathcal{J}(u) + \kappa|\omega|, \quad (2)$$

onde a primeira parcela representa a energia potencial total do sistema e a segunda uma medida de dissipação energética, como mencionado. Essa energia potencial total é dada pelo modelo de flexão elástica em placas de Kirchhoff e é apresentado a seguir.

2.1 Flexão elástica em placas de Kirchhoff

A energia potencial total $\mathcal{J}(u)$ associada ao problema de flexão elástica é dada por:

$$\mathcal{J}(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} M(u) \cdot \nabla \nabla u \, dx - \int_{\Gamma_{N_q}} \bar{q}u \, ds + \int_{\Gamma_{N_m}} \bar{m} \partial_n u \, ds + \sum_{i=1}^{ns} \bar{Q}_i u(x_i), \quad (3)$$

onde $\partial_n u = \nabla u \cdot n$ e a função escalar u representa o deslocamento transversal ao plano médio da placa e é solução do seguinte problema variacional: Encontrar u , tal que

$$-\int_{\Omega} M(u) \cdot \nabla \nabla \eta \, dx = \int_{\Gamma_{N_q}} \bar{q} \eta \, ds - \int_{\Gamma_{N_m}} \bar{m} \partial_n \eta \, ds - \sum_{i=1}^{ns} \bar{Q}_i \eta(x_i). \quad (4)$$

O tensor momento fletor $M(u) = -\frac{h^3}{12} \rho \mathbb{C} \nabla \nabla u$, onde ρ é dado por (1) e o material que compõe a placa é isotrópico de modo que o tensor de elasticidade $\mathbb{C} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu)\mathbb{I} + \nu \mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$, onde \mathbb{I} e \mathbb{I} são os tensores identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente, E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson, ambos considerados constantes em todo o domínio. Além disso, h é a espessura da placa, admitida constante em todo o domínio, \bar{q} é uma carga transversal distribuída na fronteira Γ_{N_q} , \bar{m} é um momento distribuído na fronteira Γ_{N_m} e \bar{Q}_i é uma carga concentrada transversal aplicada nos pontos x_i onde existe alguma singularidade geométrica, com $i = 1, \dots, ns$, e ns o número de singularidades. O campo de deslocamentos u deve satisfazer $u = \bar{u}$ e $\partial_n u = \bar{\theta}$, onde \bar{u} e $\bar{\theta}$ são um deslocamento e uma rotação, respectivamente, prescritos nas fronteiras Γ_{D_u} Γ_{D_θ} . Então, $\Gamma_D = \overline{\Gamma_{D_u}} \cup \overline{\Gamma_{D_\theta}}$ e $\Gamma_N = \overline{\Gamma_{N_q}} \cup \overline{\Gamma_{N_m}}$ são tais que $\Gamma_{D_u} \cap \Gamma_{N_q} = \emptyset$ e $\Gamma_{D_\theta} \cap \Gamma_{N_m} = \emptyset$.

Agora, tem-se todos os elementos para declarar o modelo de dano de Francfort-Marigo onde o problema de minimização pode ser definido da seguinte maneira: para cada incremento de tempo t_i :

$$\underset{\omega \subset \Omega}{\text{minimizar}} \mathcal{F}_\omega(u), \quad (5)$$

onde $\mathcal{F}_\omega(u)$ é dado por (2).

Este modelo é puramente energético no sentido de que a evolução do dano é baseada apenas na distribuição da densidade de energia. Como consequência direta disso, não é possível distinguir a diferença entre estado de tensão de tração ou compressão e, portanto, não é adequado para descrever o fenômeno do fechamento de fissuras, por exemplo. Outro ponto importante do modelo diz respeito à caracterização de uma carga crítica. Em problemas sem singularidades, carga crítica é aquela que permite que a densidade local de energia de deformação atinja um valor crítico. Em problemas com singularidades de tensão, no entanto, a densidade de energia sobe localmente para valores ilimitados. Contudo, experimentos como os de Griffith indicam a existência de uma carga crítica diferente de zero, mesmo na presença de tais singularidades, o que revela uma limitação à aplicação direta do modelo de Francfort-Marigo nesses casos. Uma correção existente na literatura propõe substituir κ por um parâmetro de liberação de energia modificado κ_δ definido pela razão

$$\kappa = \kappa_\delta := \frac{\kappa_s}{\delta}, \quad (6)$$

onde δ é um fator de escala associado à largura do dano inicial. Do ponto de vista físico, quando δ se torna menor, o parâmetro κ_δ aumenta de maneira semelhante à densidade de energia, de modo que a carga crítica converge para um valor finito diferente de zero.

3 Derivada topológica

Para solucionar o problema de minimização (5), utilizamos o conceito de derivada topológica [8]. A ideia é avaliar a derivada topológica do funcional de forma (2) em relação à nucleação de uma pequena inclusão circular. Por uma questão de completude, declaramos o principal resultado a ser usado neste artigo, que é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1. A derivada topológica do funcional de forma (2) em relação à nucleação de uma pequena inclusão circular com propriedade material diferente do plano de fundo, representada por um contraste γ , é dada por

$$\mathcal{D}_T \mathcal{F}_\omega(x) = \mathcal{D}_T \mathcal{J}(x) + \kappa_\delta \mathcal{D}_T |\omega|(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (7)$$

O último termo $\mathcal{D}_T |\omega|(x)$ é trivialmente obtido e dado por

$$\mathcal{D}_T |\omega|(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ -1, & \text{se } x \in \omega, \end{cases} \quad (8)$$

enquanto o primeiro termo $\mathcal{D}_T \mathcal{J}(x)$ é conhecido na literatura, veja a referência [9] por exemplo, e dado por

$$\mathcal{D}_T \mathcal{J}(x) = \mathbb{P}_\gamma M(u(\hat{x})) \cdot \nabla \nabla (u(\hat{x})), \quad (9)$$

onde o tensor de polarização \mathbb{P}_γ é um tensor de quarta ordem expresso da seguinte forma

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma\beta} \left(\frac{4\beta}{1-\nu} \mathbb{I} + \alpha\beta \frac{1+3\nu}{1-\nu^2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma\alpha} I \otimes I \right), \quad (10)$$

com as constantes $\alpha = (1+\nu)/(1-\nu)$, $\beta = (1-\nu)/(3+\nu)$ e o contraste γ definido como

$$\gamma(x) = \begin{cases} \rho_0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \rho_0^{-1}, & \text{se } x \in \omega. \end{cases} \quad (11)$$

4 Algoritmo resultante

O algoritmo resultante é formado por dois loops aninhados: um loop externo correspondente à sequência crescente de tempos discretos e um loop interno onde ocorre o processo de minimização do funcional de forma (2) em cada etapa de tempo.

Dentro do loop externo, para cada incremento da carga prescrita, a solução do sistema de elasticidade é obtida, a derivada topológica $D_T \mathcal{F}_\omega$ é avaliada de acordo com (7) e a região $\omega^* := \{x \in \Omega : \mathcal{D}_T \mathcal{F}_\omega(x) < 0\}$, onde o campo da $D_T \mathcal{F}_\omega$ é negativa, é computada. O loop externo é executado até que a condição do loop interno $|\omega^*| \geq \pi \delta^2 / 4$ seja satisfeita.

Com a condição do loop interno sendo verdadeira, a malha é intensificada na ponta do dano e uma inclusão ω^β é nucleada dentro da região ω^* . Com o intuito de calibrar o tamanho da inclusão a ser nucleada, é introduzido um parâmetro $\beta \in (0, 1)$, com escolhas extremas dadas por $\beta = 0$ (apenas o ponto onde a derivada topológica é mínima) e $\beta = 1$ (toda a região negativa). Para isso, define-se a seguinte quantidade:

$$D_T \mathcal{F}_\omega^* := \min_{x \in \omega^*} D_T \mathcal{F}_\omega(x), \quad (12)$$

que permite definir a inclusão $\omega^\beta \subset \omega^*$ como $\omega^\beta := \{x \in \omega^* : \mathcal{D}_T \mathcal{F}_\omega(x) \leq (1 - \beta) D_T \mathcal{F}_\omega^*\}$ onde β é escolhido de modo que $|\omega^\beta| \approx \pi \delta^2 / 4$ (e $|\omega^\beta| \leq \pi \delta^2 / 4$). Assim, o tamanho da inclusão a ser nucleada fica relacionado com a largura δ do dano inicial.

Uma vez que a nucleação de um novo dano ω^β modifica o problema, a solução para o sistema de elasticidade associado com a nova topologia tem de ser computado novamente. Finalmente, o novo campo derivada topológica é avaliado e o processo é repetido até que a condição $|\omega^*| \geq \pi \delta^2 / 4$ não seja mais satisfeita para qualquer incremento. O sistema de elasticidade é resolvido utilizando o método dos elementos finitos.

5 Experimentos numéricos

O problema de elasticidade é discretizado utilizando apenas elementos finitos triangulares e lineares. Deve ser enfatizado que as condições de contorno induzem uma concentração de tensão e portanto, é natural esperar a inicialização de danos nestas regiões. No entanto, a fim de comparar a presente metodologia com resultados disponíveis na literatura, as regiões próximas as condições de contorno foram ignoradas.

5.1 Exemplo base

Este primeiro exemplo será utilizado como referência para calibrar os parâmetros envolvidos bem como checar a performance do algoritmo resultante. O domínio consiste de um quadrado unitário $\Omega = 3 \times 3$ (unidades em metro) com um dano inicial de comprimento h e largura δ localizado no centro da parte superior do domínio, como mostrado na Fig. 1a. Uma rotação prescrita é imposta nas arestas esquerda e direita do domínio com intensidade total $\bar{\theta}$ dividida em $N = 100$ incrementos uniformes. As propriedades materiais módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν correspondem ao vidro. A inclusão é feita de um material com módulo de elasticidade $\rho_0 E$ e seu diâmetro é especificado pelo parâmetro l . Todos estes dados estão sumarizados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do exemplo base.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
h	0,15 m	E	65 GPa
δ	0,015 m	ρ_0	10^{-6}
l	$(2/3)\delta$	ν	0,24
$\bar{\theta}$	0.03 rad	κ_s	2,7 J/m

Como mencionado, o modelo de dano proposto por Francfort-Marigo não é adequado para a determinação da carga crítica em problemas com singularidades. Deste modo, é utilizado como fator de escala uma dimensão associada à geometria do problema, dada pela largura inicial δ da região danificada. Portanto, quando a largura

δ é reduzida, o parâmetro κ_δ cresce competindo contra o aumento da densidade de energia elástica na ponta do dano. Para verificar essa afirmação, são realizados cinco testes com diferentes valores para a largura δ do dano inicial, a saber, $\delta \in \{\frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}\}$ (m). A carga crítica $\bar{\theta}_c$ é selecionada como sendo o valor da condição de contorno da rotação prescrita que permite a nucleação da primeira inclusão, ou seja, quando a condição $|\omega^*| \geq \pi\delta^2/4$ é satisfeita pela primeira vez. A Figura 2a ilustra a carga crítica obtida para os diferentes testes normalizados de acordo com a primeira estimativa encontrada para a carga crítica $\bar{\theta}_c^0$. Portanto, a introdução do parâmetro κ_δ em (6) permite caracterizar um carregamento crítico viável para $\delta > 0$, como mostrado na Fig. 2a.

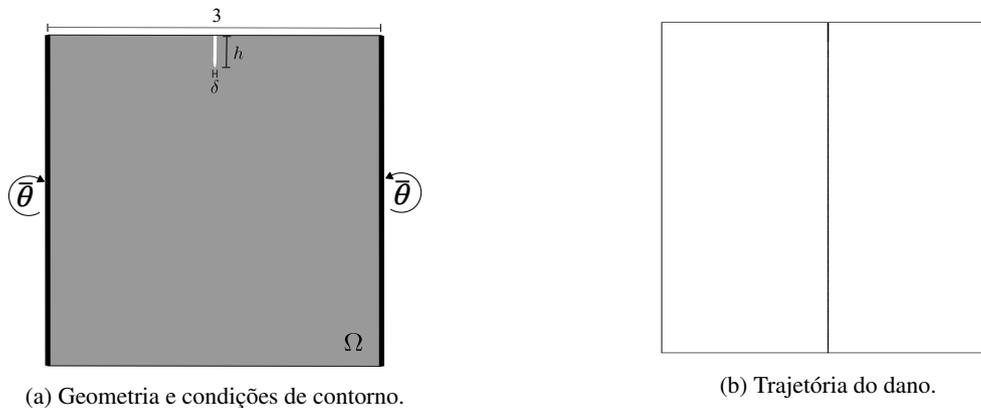


Figura 1. Exemplo Base.

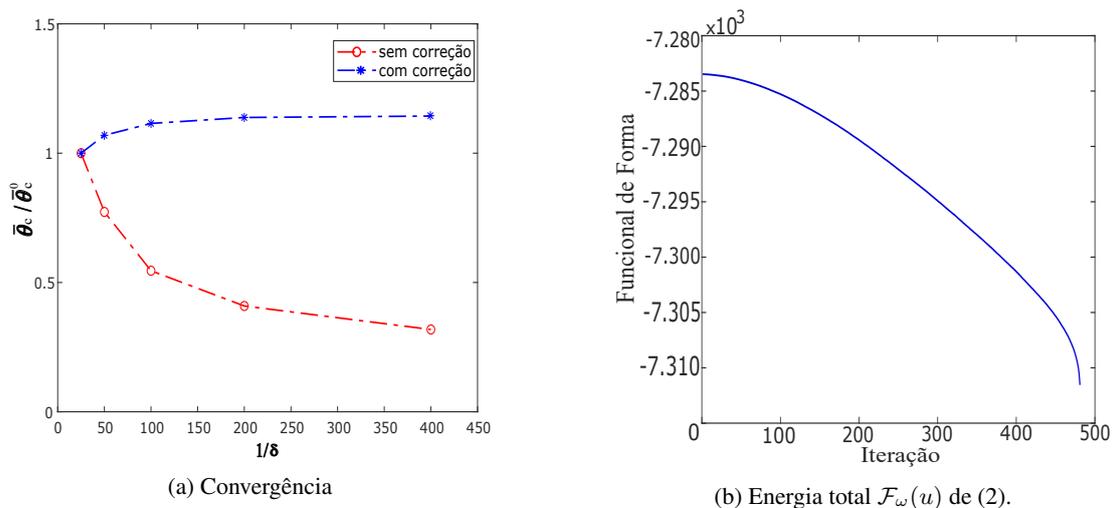


Figura 2. Resultados do exemplo base.

Como esperado, a medida que o parâmetro δ decresce, a densidade de energia na ponta do dano aumenta. Note que, sem a correção, a carga crítica tende a zero. Por outro lado, a utilização do fator δ na correção leva a um comportamento assintótico da carga crítica. Portanto, para descrever o modelo completamente, resta apenas calibrar o parâmetro κ_δ de acordo com dados experimentais. Após a realização destes testes preliminares, o experimento foi simulado utilizando os parâmetros mostrados na Tabela 1. A distribuição de dano ao final do processo de otimização pode ser visualizada na Fig. 1b. A rotação crítica observada neste caso foi de 0.0156 rad. A evolução ocorre sob estado de tração. O histórico do funcional de forma durante este processo pode ser observado na Fig. 2b. Note que o modelo dissipa energia em todas as iterações.

5.2 Meio heterogêneo

Neste segundo exemplo, considera-se que o material da placa é heterogêneo. A geometria e condições de contorno estão representados na Fig. 3a. Os parâmetros da Tabela 1 são mantidos. No entanto, neste caso o

módulo de Young E é corrompido com ruído gaussiano branco (WGN) de média nula e desvio padrão τ . Portanto, E é substituído por $E_\tau = E(1 + s\tau)$, onde $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que assume valores randômicos no intervalo $(0, 1)$ e $\tau = 0.8$ corresponde ao nível de ruído. A Fig. 3b mostra a distribuição de dano. A rotação crítica observada neste caso foi de 0.0264 rad. Note que, devido a heterogeneidade do meio, são observados desvios que de fato corrobora com a expectativa do ponto de vista físico.

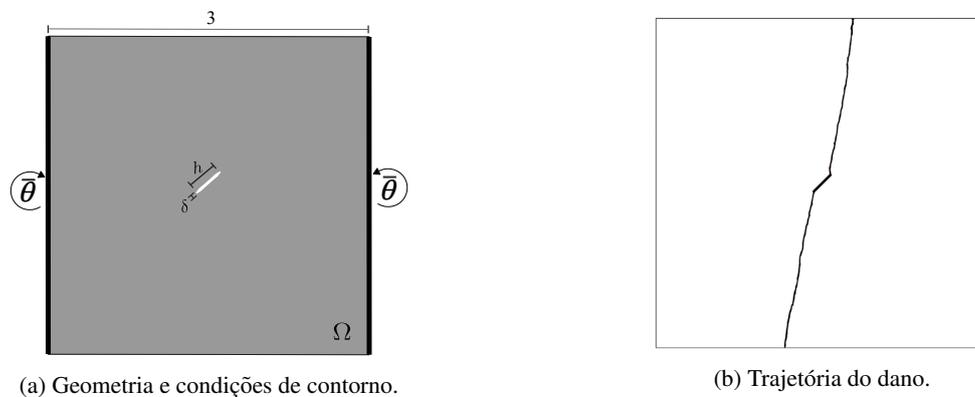


Figura 3. Meio heterogêneo.

5.3 Meio estratificado

Neste próximo exemplo, considera-se um meio estratificado: a placa é composta por duas camadas com módulos de elasticidade diferentes, a saber, $E_1 = 65$ GPa e $E_2 = 195$ GPa, onde a proposta é mostrar o comportamento da fratura quando essa encontra um meio de maior rigidez como, por exemplo, o encontro do vidro (E_1) com uma barra de aço (E_2). Além disso, a geometria, os parâmetros e as condições de contorno são as mesmas consideradas no exemplo base da Seção 5.1, veja Fig. 4a e Tabela 1. A distribuição de dano é mostrada na Fig. 4b. Neste caso, a rotação crítica foi de 0.015 rad. Note que neste cenário a trajetória segue a direção da interface entre os dois materiais quando a ponta do dano atinge a camada mais rígida.

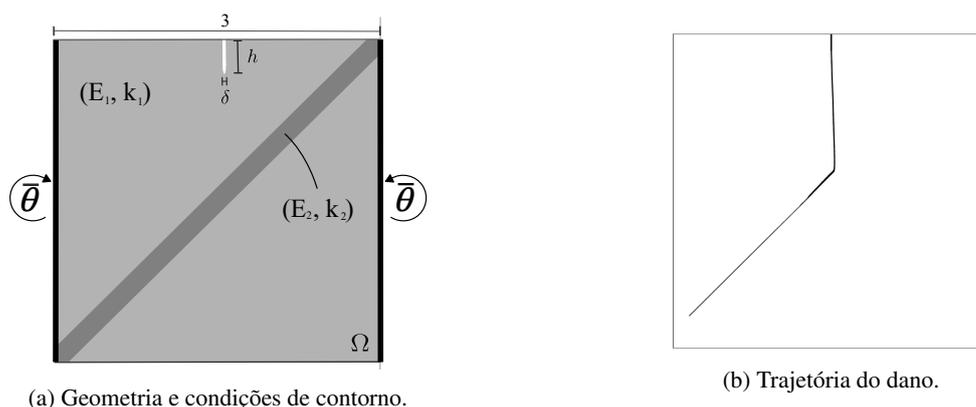


Figura 4. Meio estratificado.

5.4 Placa semi-engastada

Neste último exemplo, considera-se uma placa com dois danos iniciais de comprimento h e largura δ localizados no centro das arestas esquerda e direita, como mostrado na Fig. 5a. Uma carga concentrada é imposta no centro da aresta inferior do domínio com intensidade total $\bar{Q} = 250$ N dividida em $N = 100$ incrementos

uniformes. A taxa de liberação de energia nesse caso foi de $\kappa_s = 3 \times 10^{-2}$ J/m e a carga crítica observada foi de 155 N. A trajetória de dano é mostrada na Fig. 5b.

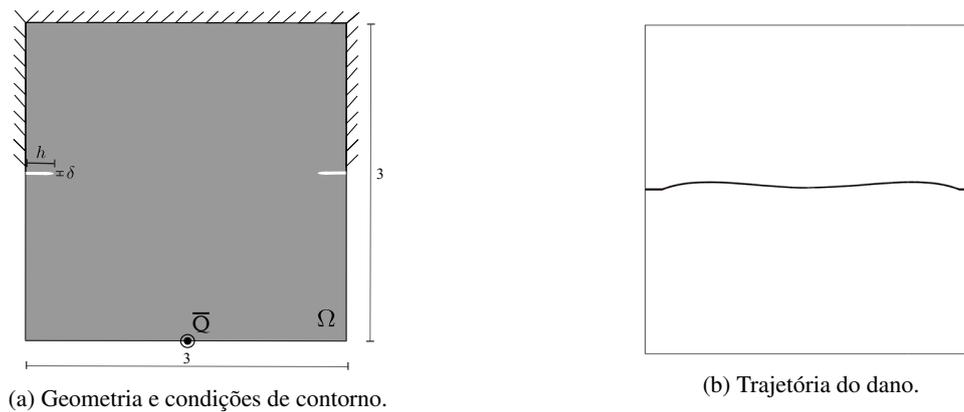


Figura 5. Placa semi-engastada.

6 Conclusões

Com este trabalho um novo modelo de fraturamento em placas, obtido simplesmente adaptando o modelo de Francfort-Marigo para o contexto de flexão elástica em placas de Kirchhoff, foi proposto. Em particular, um funcional de forma dado pela soma da energia potencial total do sistema com o termo de dissipação de energia de Griffith é minimizado com respeito a uma inclusão circular utilizando o conceito de derivada topológica. Por fim, foram apresentados quatro exemplos numéricos mostrando características das placas submetidas às certas condições de contorno.

Acknowledgements. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Sokołowski, J. & Żochowski, A., 1999. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 37, n. 4, pp. 1251–1272.
- [2] Allaire, G., de Gournay, F., Jouve, F., & Toader, A. M., 2005. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, vol. 34, n. 1, pp. 59–80.
- [3] Larrabide, I., Feijóo, R. A., Novotny, A. A., & Taroco, E., 2008. Topological derivative: a tool for image processing. *Computers & Structures*, vol. 86, n. 13–14, pp. 1386–1403.
- [4] Xavier, M., Fancello, E. A., Farias, J. M. C., Gothem, N. V., & Novotny, A. A., 2017. Topological derivative-based fracture modelling in brittle materials: A phenomenological approach. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 179, pp. 13–27.
- [5] Francfort, G. A. & Marigo, J. J., 1993. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. In *European Journal of Mechanics*, pp. 12:149–189. A/Solids.
- [6] Kirchhoff, V. G., 1850. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. vol. , pp. 51–88.
- [7] Griffith, A. A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. In *Philosophical Transaction of the Royal Society*, pp. 221:163–198.
- [8] Novotny, A. A. & Sokołowski, J., 2013. *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [9] Amstutz, S. & Novotny, A. A., 2011. Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 17, n. 3, pp. 705–721.