

# AVALIAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES EM CORPOS FRATURADOS

Nayara D. S. Barbosa<sup>1</sup> e Luiz C. Wrobel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22451-900, Brasil  
naydantassbarbosa@gmail.com, luiz.wrobel@puc-rio.br

**Abstract.** Este artigo compara os Fatores de Intensidade de Tensões (FIT) obtidos a partir de análises numéricas de um caso de fratura sob os conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Para tal, aplicaram-se duas técnicas de modelagem em Elementos Finitos: Elementos Quarter-Point 2D e 3D e o Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM) 3D. As análises foram feitas no programa ABAQUS versão 6.14-1, que utiliza a integral de interação para o cálculo do FIT em ambas as técnicas. Por fim, os resultados numéricos são comparados com os resultados publicados na literatura. Apesar das vantagens associadas ao uso do XFEM para modelagem da propagação de fraturas, o cálculo pela integral de domínio para esta técnica apresenta oscilações nos valores fornecidos para as diferentes solicitações de contornos. Os melhores resultados são obtidos com o uso dos Elementos Quarter-Points 2D e 3D.

**Keywords:** Mecânica da fratura, Fator de intensidade de tensões, Método dos Elementos Finitos.

## 1 Introdução

A mecânica da fratura (MF) é a área da mecânica clássica que estuda o comportamento de materiais e processos mecânicos que podem resultar na propagação de fissuras e fendas, levando finalmente à falha do elemento estrutural [1]. O Fator de Intensidade de Tensões (FIT) é um parâmetro da MF associado à propagação de fraturas, que leva em conta a tensão aplicada na estrutura e o tamanho do defeito. Com base neste fator, pode-se tomar decisões a respeito da segurança da estrutura, comparando seu valor com o valor de tenacidade à fratura (KC) do material [2]. Para problemas práticos de engenharia, onde se deseja maior precisão nas soluções, é indispensável o uso de métodos numéricos para determinar os FITs. No presente trabalho, com base nos conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), procurou-se então avaliar os FITs obtidos a partir da análise numérica de um caso clássico de placa fraturada.

## 2 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A MFLE é aplicável na análise de materiais frágeis ou quase frágeis, nos quais a zona plástica formada é pequena em relação às dimensões do corpo trincado. O critério de Griffith, criado em 1920 com base na observação do crescimento de trincas em cilindros de vidro, estima a resistência teórica de sólidos frágeis e uma relação entre o tamanho da trinca e a resistência a fratura do material [3]. Em 1956, Irwin [4] propôs um modelo equivalente ao de Griffith, mais conveniente para resolução de problemas de engenharia, uma vez que o critério de Griffith tem sua aplicação limitada a materiais frágeis. A taxa de liberação de energia elástica ( $G$ ) representa a fonte de energia para o processo de propagação de fratura (eq. (1)).

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E^*}, \quad E^* = E \text{ se EPT e } E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \text{ se EPD} \quad (1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão aplicada na peça,  $a$  é o comprimento da fratura e  $E^*$  é o módulo de elasticidade do material para o Estado Plano de Tensões (EPT) ou para o Estado Plano de Deformações (EPD).

A resistência à fratura está relacionada com o FIT, definido como um parâmetro que quantifica as tensões e que mede o nível de deformação na ponta da fratura de um corpo com comportamento linear elástico. A relação para o FIT foi criada com base nos três modos fundamentais de deslocamento da fratura, sendo  $K_I$  relacionado ao Modo I de abertura,  $K_{II}$  com o Modo II de cisalhamento e  $K_{III}$  com o Modo III de rasgamento, conforme a eq. (2). O FIT pode então ser relacionado com a taxa de liberação de energia, conforme a eq. (3). Isto nos leva à suposição, lógica, de que, no instante de instabilidade da trinca, o FIT atinge um valor limite, crítico para o material, denominado de tenacidade à fratura ( $K_C$ ) [5].

$$K_{I,II,III} = C\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2)$$

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (3)$$

onde  $K$  é o FIT,  $C$  é um fator adimensional utilizado para a avaliação de corpos finitos e que relaciona o comprimento da peça com o comprimento da trinca e  $\mu$  é o módulo de cisalhamento.

A taxa de liberação de energia pode ser representada por uma integral de linha que independe do caminho de integração, conforme ilustrado na Fig. 1. Na MFLE, o valor da integral  $J$  é igual a taxa de liberação de energia  $G$  e está diretamente ligada aos FITs [6]. Considerando o Modo I de deslocamento de fratura, a Integral  $J$  é dada pela eq. (4).

$$J = G = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (4)$$

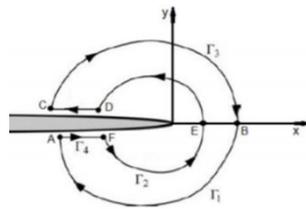


Figura 1- Independência do caminho da Integral J. [7].

### 3 Método dos Elementos Finitos para Avaliação de Fraturas

#### 3.1 Método dos Elementos Especiais

O uso do MEF trouxe à tona algumas dificuldades para resolução de problemas de mecânica da fratura, sendo a principal, a representação da singularidade matemática na ponta da trinca com a utilização de elementos convencionais ou elementos de alta ordem. Criados para tentar superar este problema, os quarter-points são elementos isoparamétricos que introduzem a singularidade  $1/\sqrt{r}$  no campo de deformações pela manipulação da posição dos nós intermediários para a posição de  $1/4$  da aresta do elemento de ordem quadrática. A Fig. 2 ilustra os elementos para análises bidimensionais (a) e tridimensionais (b) e como estes são posicionados no modelo (c).

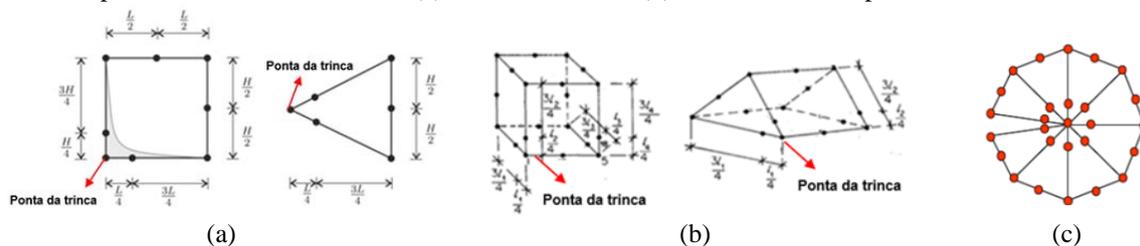


Figura 2- Quarter-points (a) bidimensionais, (b) tridimensionais e (c) Roseta padrão. Adaptado de [8] e [9].

#### 3.2 Método dos Elementos Finitos Estendidos

A essência do XFEM, que é uma extensão do MEF, é a adição de funções de enriquecimento para a

aproximação que contém um campo de deslocamentos descontínuos. Uma das grandes vantagens do método é que a geometria de uma trinca e sua inserção no modelo são feitas de forma independente da malha; além disso, a fratura pode atravessar o interior dos elementos e não há a necessidade de atualização da malha à medida que a fratura se propaga [6].

No XFEM, a formulação de aproximação do campo de deslocamentos é dada pela formula padrão do MEF (33) com o acréscimo da representação da fratura, conforme a eq. (5).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_n} u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in J_n} b_i N_i(\mathbf{x}) H(x) + \sum_{i \in K_n} N_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 c_l^\alpha F_\alpha(x) \right) \quad (5)$$

onde a segunda parcela é a função degrau, utilizada para enriquecer os elementos completamente cortados pela fratura e a última parcela da equação é a função assintótica de ponta, utilizada para modelar a singularidade na ponta da trinca.

A versão 6.14-1 do ABAQUS apresenta algumas limitações na análise de fraturas com o uso do XFEM: o cálculo dos FITs é limitado a modelos 3D e apenas elementos lineares podem ser usados; os FITs podem ser obtidos apenas em análises de fratura estática; e, não são permitidas simulações considerando a simetria quando a fratura coincidir com os limites geométricos do modelo e, portanto, neste caso, é necessário um modelo completo.

## 4 Cálculo Numérico dos Fatores de Intensidade de Tensões no ABAQUS

Por não ser muito apropriada para uma análise em Elementos Finitos o ABAQUS substitui a integração ao longo do contorno por uma integral de interação em domínio equivalente [6]. Essa substituição permite que, dos valores da Integral J obtidos no regime elástico linear, possam ser extraídos os fatores de intensidade de tensão em modo misto de carregamento, isto é,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . [8]. Para uma análise bidimensional, a representação em domínio equivalente da integral de interação é dada pela eq. (6). Para uma análise tridimensional, a integral de contorno é expandida para uma integral de volume.

$$M^S = \int_A \left[ -W^S \delta_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{Aux}}{\partial x} + \sigma_{ij}^{Aux} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6)$$

## 5 Análise Numérica

Para avaliar os FIT para um caso de fratura em Modo I foi realizada a análise de uma placa de geometria retangular finita contendo um furo circular com raio de 10 mm e duas trincas que se iniciam a partir do furo. A peça foi submetida a um carregamento de tração distribuído uniformemente nos bordos superior e inferior da placa no valor de 11N/mm<sup>2</sup>. O problema foi avaliado na condição de EPD. A geometria da placa e propriedades do material são: base (W) e altura (B) iguais a 80mm e para os modelos tridimensionais espessura de 1mm, módulo de elasticidade (E) igual a 80.000MPa e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0,33. O modelo foi testado com valores de  $2a/W$  variando de 0,27 a 0,7 para que fosse possível verificar o impacto do aumento do comprimento da trinca nos resultados numéricos, pois, basicamente, o valor  $K_I$  começa pequeno quando a trinca é inicializada e tende a aumentar à medida que o tamanho da fratura aumenta, causando maior resistência à propagação, pois a energia necessária para propagar a trinca é maior [10]. A Tab. 1 indica o valor do fator adimensional  $C$  para a razão de  $2r/W = 0,25$ . Com o valor de  $C$  é possível determinar os valores analíticos de  $K_I$ . A diferença percentual entre os resultados numéricos e os resultados analíticos pode ser calculada conforme a expressão (7).

Tabela 1 - Valor do fator adimensional C. Adaptado de [11].

$2a/W$	C
0.27	0.8510
0.30	1.0776
0.40	1.2156
0.50	1.2853
0.60	1.3965
0.70	1.5797

## 6 Resultados

A diferença percentual entre os resultados numéricos e os resultados analíticos pode ser calculada conforme a eq. (7).

$$\mathbf{Erro} = \frac{K_{I\text{numérico}} - K_{I\text{analítico}}}{K_{I\text{analítico}}} \quad (7)$$

A Fig. 3 ilustra a placa modelada com as duas técnicas de modelagem: Elementos Quarter-Points (2D) e (3D) e XFEM (3D). Nos modelos com Elementos Quarter-Points optou-se por selecionar apenas uma frente de fratura para avaliação das integrais de contorno pois o valor de FIT é igual para as duas pontas de fratura e por isso, o grau de refinamento de ponta da fratura do lado direito do furo é maior que o da ponta da fratura esquerda.

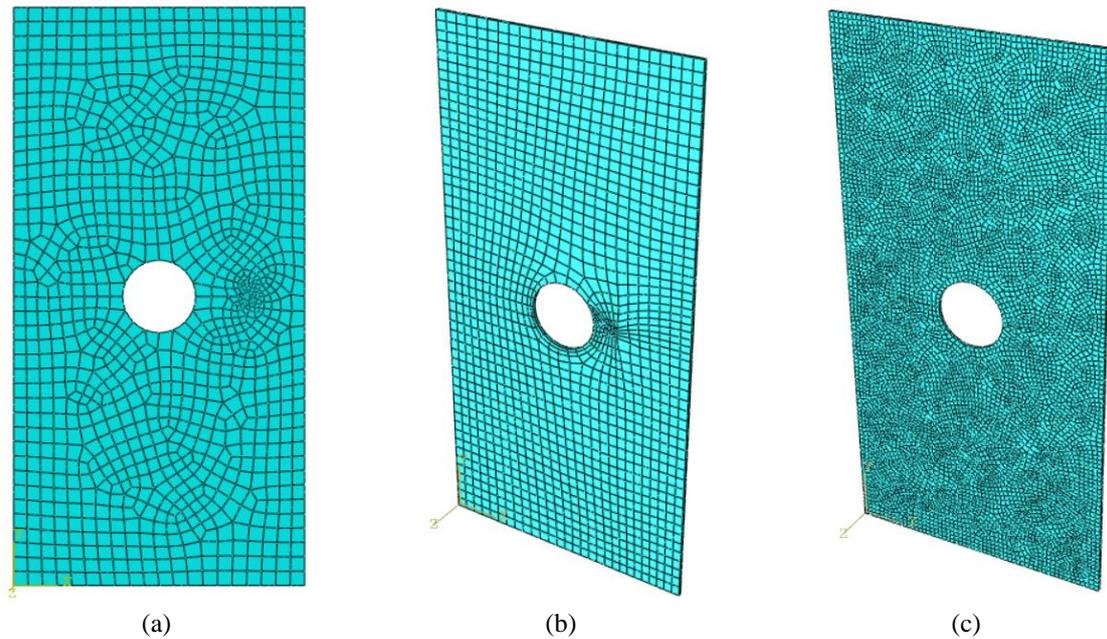


Figura 3- Modelo (a) Quarter-Point 2D placa com  $2a/W = 0,6$ , (b) Quarter-Point 3D placa com  $2a/W = 0,4$  (c) XFEM placa com  $2a/W = 0,4$ .

### 6.1 Modelos com Elementos Quarter-Points 2D e 3D

Para as análises bidimensionais a configuração de malha que apresentou melhores resultados foi a com maior refinamento na região em torno da ponta da trinca e menos estruturada nas demais regiões da placa, conforme ilustrado na Fig. 3 (a). Já para as análises tridimensionais, a configuração de malha que apresentou melhores resultados foi a com menor refinamento na região em torno da ponta e mais estruturada nas demais regiões da placa, conforme indicado na Fig. 3 (b).

Em ambas as análises foram requeridos um total de 5 contornos para as simulações. Quando os resultados de FIT obtidos para cada contorno não apresentam grandes variações, o manual do ABAQUS [12] indica que pode-se considerar que o refinamento na ponta da trinca está adequado e como se pode observar na Fig. 4 (a) e (b), os resultados são estáveis a partir do segundo contorno tanto para as análises 2D quanto para as análises 3D. Para os dois casos de modelagem, conforme recomendações do manual, os resultados dos dois primeiros contornos foram desconsiderados das análises.

A Tab. 2 indica os valores de FIT obtidos com o estudo de refinamento de malha para todos os modelos e os erros entre os resultados numéricos e analíticos para cada caso.

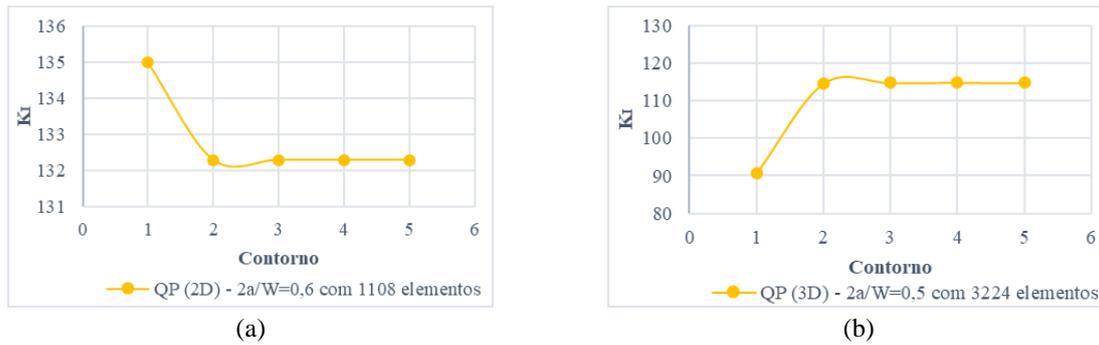


Figura 4- Análise com Elementos Quarter-Points: Valores de  $K_I$  por contorno (a) 2D e (b) 3D.

Tabela 2 – Análise 2D e 3D com Elementos Quarter-Points: Resultados.

2a/W	$K_I$ analítico	Análise Numérica 2D			Erro 2D (%)	Análise Numérica 3D		Erro 3D (%)
		Nº Elementos	$K_I$ numérico			Nº Elementos	$K_I$ numérico	
0.27	54.53	573	53.68	-1.55	<b>598</b>	<b>54.54</b>	<b>0.02</b>	
		760	54.20	-0.60	874	55.02	0.90	
		<b>1137</b>	<b>54.56</b>	<b>0.06</b>	1475	55.26	1.34	
		1788	53.74	-1.44	3068	55.54	1.86	
0.30	72.78	<b>578</b>	<b>72.86</b>	<b>0.11</b>	<b>600</b>	<b>74.04</b>	<b>1.73</b>	
		762	73.47	0.95	868	74.13	1.85	
		1091	72.61	-0.23	1469	74.31	2.10	
		1799	72.61	-0.23	3172	74.49	2.35	
0.40	94,80	507	93.66	-1.20	<b>607</b>	<b>96.45</b>	<b>1.74</b>	
		735	93.63	-1.24	888	96.74	2.04	
		<b>1115</b>	<b>94.22</b>	<b>-0.61</b>	1471	96.89	2.20	
		1850	94.16	-0.68	3081	97.09	2.41	
0.50	112.07	523	110.60	-1.31	<b>568</b>	<b>113.00</b>	<b>0.83</b>	
		763	110.70	-1.22	883	114.30	1.99	
		1137	111.20	-0.78	1428	114.40	2.08	
		<b>1874</b>	<b>111.30</b>	<b>-0.69</b>	3224	114.80	2.44	
0.60	133.39	527	131.40	-1.49	<b>583</b>	<b>135.20</b>	<b>1.36</b>	
		744	131.20	-1.64	917	135.80	1.81	
		1108	132.30	-0.82	1329	136.20	2.11	
		<b>1885</b>	<b>132.40</b>	<b>-0.74</b>	3041	136.50	2.33	
0.70	162.98	502	160.90	-1.27	<b>556</b>	<b>164.30</b>	<b>0.81</b>	
		<b>720</b>	<b>161.90</b>	<b>-0.66</b>	815	165.80	1.73	
		1050	161.60	-0.84	1304	166.30	2.04	
		1860	161.90	-0.66	2895	166.80	2.35	

## 6.2 XFEM

Com o objetivo de avaliar os resultados da não necessidade de conformidade entre a superfície da fratura e o contorno dos elementos finitos, que, conforme indicado na seção 3.2, é uma das grandes vantagens da implementação do XFEM, em todas as simulações, as malhas dos modelos foram construídas de maneira que a fratura sempre cortasse os elementos finitos e que a ponta da fratura se localizasse no interior de um elemento. Para estes modelos, a configuração de malha que apresentou melhores resultados foi uma configuração não estruturada, conforme se pode observar na Fig. 3 (c).

Como o XFEM fornece diferentes valores de FIT para diferentes números de contornos optou-se por solicitar 9 contornos para as simulações por apresentar mais pontos de avaliação e conseqüentemente permitir uma análise mais completa da evolução dos erros para os diferentes contornos. A Fig. 5 indica a relação entre os FITs obtidos em cada contorno para o modelo com relação  $2a/W=0,4$ .

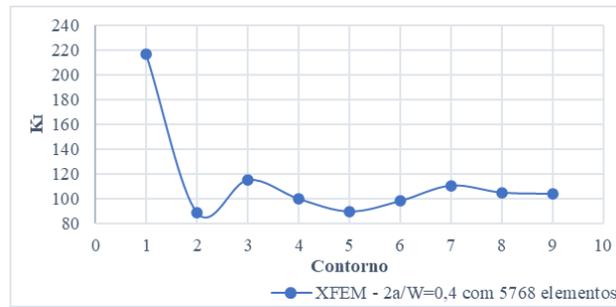


Figura 5- Análise com XFEM: Valores de KI por contorno.

É possível observar que o método apresenta oscilações entre os resultados de FIT fornecidos para cada contorno. Outros autores como Xavier [13] e Dias [14] também observaram oscilações entre os resultados de seus trabalhos, e que mais recentemente, também foram relatadas em Simulia [15]. Com estes resultados, surgem as seguintes questões: Qual será a composição da solução, já que cada contorno fornece um valor diferente para o fator de intensidade de tensão? E quais contornos devem ser escolhidos? Todos eles ou apenas alguns? [13]. Dias [14] optou por utilizar o valor do contorno que mais se aproximou do resultado analítico. Já Simulia [15], concluiu que a melhor maneira de se comparar os resultados numéricos com os resultados analíticos, seria fazendo uma média com os valores obtidos para os contornos. Assim, a Tab. 3 apresenta os valores de  $K_I$  obtidos para os diferentes modelos de  $a/W$  das duas formas, excluindo os valores dos dois primeiros contornos.

Tabela 3 – Análise XFEM: Resultados.

2a/W	$K_I$ analítico	Análise Numérica				
		Nº Elementos	$K_I$ mais próx.	Erro (%)	$K_I$ médio	Erro (%)
0.27	54.53	24477	53.76	-1.41	38.47	-29.45
		31498	47.32	-13.22	77.61	42.34
		86042	52.41	-3.88	62.89	15.34
		<b>125340</b>	<b>54.95</b>	<b>0.78</b>	58.23	6.79
0.30	72.78	5768	70.72	-2.83	81.82	12.42
		<b>7913</b>	<b>71.45</b>	<b>-1.83</b>	80.58	10.72
		10485	70.96	-2.50	77.87	7.00
		15470	68.49	-5.90	77.04	5.85
0.40	94,80	5768	89.52	-5.57	103.08	8.73
		7913	99.60	5.06	112.77	18.95
		10485	99.30	4.74	103.64	9.32
		<b>15470</b>	<b>94.66</b>	<b>-0.15</b>	103.67	9.36
0.50	112.07	<b>5768</b>	<b>112.60</b>	<b>0.47</b>	118.46	5.70
		7913	114.30	1.99	122.80	9.57
		10485	113.30	1.10	118.54	5.78
		15470	116.10	3.60	118.07	5.36
0.60	133.39	5768	126.80	-4.94	148.43	11.28
		7913	128.20	-3.89	142.77	7.04
		<b>10485</b>	<b>133.00</b>	<b>-0.29</b>	139.09	4.27
		15470	134.30	0.68	143.97	7.93
0.70	162.98	5768	158.90	-2.50	174.36	6.98
		7913	167.10	2.53	174.49	7.06
		<b>10485</b>	<b>162.50</b>	<b>-0.29</b>	174.07	6.81
		15470	173.10	6.21	178.60	9.59

## 7 Conclusões

Verificando-se os resultados mostrados na Tab. 2 e Tab. 3 pode-se concluir que:

- Para a modelagem com Elementos Quarter-Poins 2D e 3D, os refinamentos de malha não trouxeram impacto significativo nos resultados de FIT e, como a diferença percentual entre os resultados numéricos e analíticos foram inferiores a 2%, a abordagem da integral de domínio para obtenção dos fatores de intensidade de tensões com esta técnica de modelagem é válida no software ABAQUS.
- Para a modelagem com XFEM observou-se oscilações entre os resultados do FIT fornecidos para cada contorno, oscilações estas que foram verificadas também por outros autores como Xavier [13] e Dias [14] e que mais recentemente também foram relatadas em Simulia [15]. Foram adotadas duas abordagens para análise dos resultados. A comparação considerando os valores de  $K_I$  mais próximos apresentou erros inferiores a inferiores a 2%. Entretanto, ressalta-se que este tipo de comparação só é possível quando o problema modelado possui soluções teóricas clássicas, encontradas na literatura. Nota-se ainda que existe uma dificuldade para se encontrar o número de elementos que apresenta resultados satisfatórios, já que não se observa uma convergência de resultados com o refinamento de malha. Já quando se considera os valores médios de  $K_I$ , os resultados não indicaram boa aproximação, o que dificulta a aplicação do método para casos mais complexos, onde os valores de FIT não são conhecidos. Assim, pode-se concluir que o uso da integral de domínio para obtenção dos FITs com o XFEM no ABAQUS apresentou muitas incertezas e por isso, o usuário encontrará dificuldades ao utilizar o método com as configurações padrões do software.

**Agradecimentos.** Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

**Authorship statement.** The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

## Referências

- [1] M. Congro. *Análise Probabilística da Capacidade de Carga de Vigas de Concreto Reforçadas com Fibras de Aço*. Trabalho de conclusão de curso. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.
- [2] W. A. Soares. *Determinação de Parâmetros da Mecânica de Fratura a partir de Imagens Fotoelásticas, usando Processamento Digital*. Tese de Doutorado. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares de São Paulo, 1997
- [3] L. M. Alves. *Apostila de Fundamentos matemáticos da teoria elastostática clássica do crescimento estável (ou quase-estático) - mecânica da fratura elástica linear para o caminho liso*, Curitiba.
- [4] G. R. Irwin. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. *Naval Research Laboratory*. 1956.
- [5] E. Rosa. *Análise de Resistência Mecânica de Peças e Componentes Estruturais: Mecânica da Fratura e Fadiga*. Apostila da Disciplina de Fadiga e Confiabilidade. Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [6] P. A. Silva. *Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015.
- [7] T. L. Anderson. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. *International Journal of Pavement Research and Technology*, 2005.
- [8] C. C. Gabriel. *Avaliação da Integridade Estrutural de um Vaso de Pressão Danificado por Trincas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2018.
- [9] A. C. Miranda. *Propagação de Trincas por Fadiga em Geometria 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015.
- [10] C. D. Patel. *Evaluation of Stress Intensity Factors around Crack Tips*. Undergraduate Thesis. Brunel University, 2009.
- [11] J. C. Newman. *An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries* – Nasa Technical Note. National Aeronautics and Space Administration, 1971.
- [12] ABAQUS. *Abaqus/CAE User's Manual: Contour integral*, 2017. Disponível em: <<https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEANLRefMap/simaanl-c-contintegral.htm#simaanl-c-contintegral-jintegral>>. Acessado em junho de 2020.
- [13] F. Xavier. *Crack Modelling with the eXtended Finite Element Method*. Master Thesis. Technical University of Lisbon, 2013.
- [14] R. M. R. Dias. *Estudo da propagação de fenda num componente ferroviário*. Dissertação de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [15] Simulia. *Contour Integral Evaluation Using the Abaqus/Standard Extended Finite Element Method (XFEM)*, 2017. Disponível em: <<https://support.3ds.com/knowledge-base/?q=QA00000046393>>. Acessado em junho de 2020.