

Controle de crescimento de trincas em corpos elásticos submetidos a esforços cisalhantes baseado no método da derivada topológica

G. C. R. de Barros¹, M. D. da S. Xavier²

*Universidade Federal Fluminense UFF, - Departamento de Engenharia Mecânica (PGMEC-TEM)
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240 Niterói - RJ, Brasil
guilhermecrb@id.uff.br¹, marcelxavier@id.uff.br²*

Resumo. Uma questão fundamental no estudo da mecânica da fratura diz respeito ao controle do crescimento de trincas em componentes mecânicos previamente danificados. Neste trabalho, a metodologia baseada na derivada topológica, recentemente proposta para tratar esta questão, é aplicada no contexto de corpos elásticos danificados submetidos a esforços cisalhantes. A ideia central consiste em nuclear inclusões rígidas e/ou complacentes longe da ponta da trinca visando maximizar a vida útil do componente fraturado. O método fundamenta-se em minimizar um funcional de forma baseado na famosa integral de Rice com respeito a nucleação de inclusões utilizando as informações extraídas da derivada topológica. Mais precisamente, a sensibilidade associada é utilizada para indicar as regiões onde as inclusões, também chamadas de controles, devem ser posicionadas. De acordo com o critério de energia de Griffith, este procedimento permite aumentar a vida útil do componente mecânico fraturado. Algumas simulações numéricas são apresentadas evidenciando a aplicabilidade da referida metodologia no caso de esforços cisalhantes.

Palavras-chave: Controle do crescimento de trinca, Derivada topológica, Esforços cisalhantes

1 Introdução

Componentes mecânicos submetidos a esforços externos ou a ação de agentes degradantes estão sujeitos ao processo de nucleação e propagação de trinca, o que, eventualmente, os levará a um estado de inutilização. Em particular, quando o componente já possui uma trinca, surge uma questão importante que consiste em encontrar uma forma de ampliar sua tenacidade à fratura. A vida útil de um componente fraturado está diretamente relacionada à sua taxa de liberação de energia, que é definida como a variação da energia de deformação armazenada no corpo com respeito ao crescimento da trinca. Mais especificamente, baseado no critério de energia de Griffith [1], quanto menor for a taxa de liberação de energia do componente fraturado, maior será sua vida útil. Uma ideia já bastante difundida para solucionar este problema, consiste em encontrar diferentes estratégias para reduzir a taxa de liberação de energia do componente, o que inclui otimização de forma e distribuição de material, por exemplo. Destuynder [2] foi o pioneiro neste campo propondo a utilização de controles topológicos a fim de evitar a ativação do mecanismo de propagação de trinca. Para trabalhos relacionados, veja também Khludnev et al. [3], Munch e Pedregal[4] e Kovtunencko e Leugering [5], por exemplo.

Recentemente, em Xavier et al. [6], a ideia de introduzir controles no domínio a fim de maximizar a tenacidade à fratura do componente é utilizada em conjunto com o moderno conceito de derivada topológica. Basicamente, a ideia consiste em minimizar um funcional de forma definido em termos da integral de Rice [7] com respeito à nucleação de inclusões rígidas e/ou complacentes utilizando as informações fornecidas pela derivada topológica associada. Esta nova metodologia se baseia no fato de que a nucleação de inclusões em regiões onde a derivada topológica é negativa acarreta em um decréscimo nos valores do funcional de forma associado. Para maiores detalhes sobre o conceito de derivada topológica, veja, por exemplo, Novotny e Sokołowski [8]. De acordo com o critério de energia de Griffith, esta simples estratégia é capaz de aumentar a vida útil do componente fraturado. No entanto, o referido trabalho tratou apenas o caso em que os componentes danificados estão sujeitos a tração pura. Sendo assim, neste artigo, é estudado o caso em que os componentes estão sujeitos a esforços de cisalhamento. A metodologia proposta é apresentada em detalhes e, por fim, é realizado um estudo numérico a fim de evidenciar sua aplicabilidade no referido contexto.

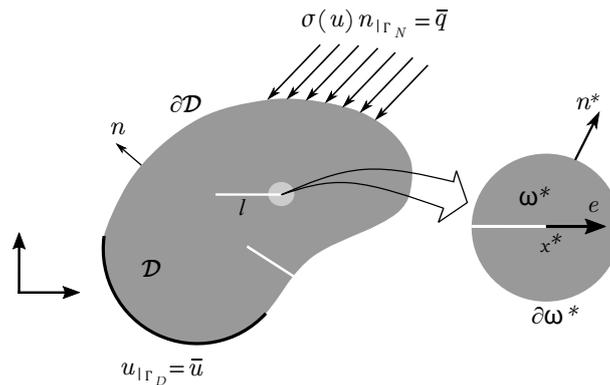


Figura 1. Corpo elástico fraturado.

2 Formulação do problema

Considere um corpo elástico fraturado representado por um domínio aberto e limitado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, com contorno $\partial\mathcal{D} = \Gamma_N \cup \Gamma_D \cup l$, submetido a uma condição do tipo Neumann sobre Γ_N , sendo a carga distribuída denotada aqui por \bar{q} , e a uma condição do tipo Dirichlet sobre Γ_D , sendo o deslocamento prescrito denotado aqui por \bar{u} . As trincas presentes no domínio, representadas por l , são consideradas retas, de comprimento h e direção e , cuja ponta é denotada por x^* . Considere ainda uma região de controle $\omega^* \subset \mathcal{D}$ em torno da ponta da trinca. Veja o esboço na Figura 1. Neste contexto, a energia potencial total do sistema é dada por

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot u, \quad (1)$$

onde \bar{q} é a carga distribuída aplicada em Γ_N e u é o campo de deslocamentos que é solução do seguinte problema variacional: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que,

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}, \quad (2)$$

onde o tensor de tensões $\sigma(\varphi) = \mathbb{C} \nabla \varphi^s$. Aqui, considera-se o material isotrópico, assim, o tensor de elasticidade pode ser escrito como $\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$, sendo \mathbb{I} e \mathbb{I} , respectivamente, os tensores identidade de quarta e segunda ordem e μ e λ os coeficientes de Lamé, tal que $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ e $\lambda^* = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$, onde λ e λ^* estão associados com as hipóteses de estado plano de deformações e de tensões, respectivamente. Ademais, E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson. O tensor de deformação é tal que $\nabla \varphi^s = \frac{1}{2}(\nabla \varphi + (\nabla \varphi)^T)$. Finalmente, o conjunto \mathcal{U} e o espaço \mathcal{V} são dados por $\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\mathcal{D}) : \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{u}\}$ e $\mathcal{V} := \{\eta \in H^1(\mathcal{D}) : \eta|_{\Gamma_D} = 0\}$.

A partir deste cenário, assume-se que através de algum critério de dissipação de energia, o mecanismo de propagação de trinca pode ser ativado. Portanto, a ideia é encontrar uma forma de retardar ou até mesmo evitar a ativação deste processo, nucleando inclusões rígidas e/ou complacentes longe da ponta da falha. De acordo com o critério de energia de Griffith, esse simples procedimento pode aumentar a vida útil do corpo fraturado. A partir desta ideia, propõe-se a minimização de um funcional de forma baseado na integral de Rice com respeito à nucleação de inclusões utilizando o conceito de derivada topológica.

2.1 A integral de Rice

A integral de Rice, denotada aqui por $\Pi(u)$, é definida como $\Pi(u) = -\frac{d}{dh} \mathcal{W}(u)$, onde $\mathcal{W}(u)$ é a energia liberada. Tomando a energia de deformação para calcular a taxa de liberação de energia, i. e., $\mathcal{W}(u) = -\mathcal{J}(u)$, é possível escrever a integral de Rice da seguinte forma

$$\Pi(u) = \int_{\mathcal{D}} \Sigma(u) \cdot \nabla V, \quad (3)$$

onde $\Sigma(u) = \frac{1}{2}(\sigma(u) \cdot \nabla u^s)I - \nabla u^T \sigma(u)$ é o tensor de Eshelby [9] e $V \in C^\infty(\mathcal{D}) : V = e$ em ω^* é o campo de velocidade de mudança de forma com suporte compacto em ω^* .

2.2 Formulação do problema de otimização topológica

O problema de otimização topológica é baseado no critério de energia de Griffith [1] para propagação de trinca. Este critério pode ser escrito em termos da integral de Rice da seguinte forma:

$$G_s + \Pi(u) \begin{cases} < 0 & \text{a trinca está instável,} \\ = 0 & \text{a trinca está em equilíbrio,} \\ > 0 & \text{a trinca está estável,} \end{cases} \quad (4)$$

onde $G_s > 0$ é utilizado para denotar a energia de superfície de Griffith.

Como G_s , por definição, é um número positivo e levando em conta que $\Pi(u)$ é uma quantidade negativa, conclui-se que quanto menos negativo for $\Pi(u)$ maior será a vida útil do componente mecânico. Portanto, a ideia é maximizar $\Pi(u)$ com respeito a nucleação de inclusões rígidas e/ou complacentes longe da ponta da trinca. Desta forma, o problema de otimização topológica pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \{-\Pi(u)\}, \quad \text{sujeito à eq. (2),} \quad (5)$$

onde $\Omega := \mathcal{D} \setminus \omega^*$ e $\Pi(u)$ é a integral de Rice definida na eq. (3). Aqui, o domínio Ω , que é livre de singularidades geométricas produzidas pela ponta da trinca, é assumido como sendo suave e com contorno $\partial\Omega$ Lipschitz.

Uma abordagem natural para lidar com tal problema consiste em aplicar o conceito de derivada topológica. Logo, a fim de simplificar referências futuras, é introduzido o seguinte estado adjunto: Encontrar $v \in \mathcal{V}$, tal que

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma(v) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\mathcal{D}} \text{tr}(\nabla V) \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s - \int_{\mathcal{D}} \sigma(\eta) \cdot (\nabla u \nabla V) - \int_{\mathcal{D}} \sigma(u) \cdot (\nabla \eta \nabla V), \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (6)$$

3 Método de otimização topológica

A metodologia apresentada em Xavier et al. [6] é baseada no fato de que à nucleação de inclusões em regiões onde a derivada topológica é negativa acarreta em um decréscimo nos valores do funcional da função custo associada. Portanto, a derivada topológica do funcional de forma $\{-\Pi(u)\}$, onde $\Pi(u)$ é a integral de Rice definida na eq. (3), com respeito a nucleação de pequenas inclusões circulares, é aqui representada. Este resultado será então utilizado para indicar as regiões onde as inclusões devem ser nucleadas a fim de se resolver o problema de minimização na eq. (5).

3.1 Método de decomposição de domínio

A fim de avaliar a derivada topológica associada ao problema de minimização da eq. (5), decompõe-se \mathcal{D} em duas partes, a saber, $\omega^* \subset \mathcal{D}$ e $\Omega := \mathcal{D} \setminus \omega^*$. Ademais, considera-se um domínio intacto ω tal que $\omega := \omega^* \cup l$. Desta forma, o seguinte problema de valor de contorno deve ser considerado: Encontrar w , tal que

$$\begin{cases} \text{div} \sigma(w) = 0 & \text{em } \omega^*, \\ \sigma(w) = \mathbb{C} \nabla w^s, & \\ \sigma(w) n = 0 & \text{em } l, \\ w = \varphi & \text{em } \partial\omega. \end{cases} \quad (7)$$

Utilizando a eq. (7), define-se o operador de contorno pseudo-diferencial Steklov-Poincaré como a seguir:

$$\mathcal{S} : \varphi \in H^{1/2}(\partial\omega) \mapsto \sigma(w)n^* \in H^{-1/2}(\partial\omega), \quad (8)$$

onde n^* é o vetor unitário normal que aponta para fora de $\partial\omega$. Portanto, o seguinte problema variacional pode ser considerado: Encontrar $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s + \int_{\partial\omega} \mathcal{S}(u) \cdot \eta = \int_{\Gamma_N} \bar{q} \cdot \eta, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (9)$$

Note que, tomando $\varphi = (u)|_{\partial\omega}$, tem-se $w = (u)|_{\partial\omega^*}$. Esta estratégia é introduzida a fim de caracterizar uma região livre de singularidades onde a derivada topológica associada pode ser facilmente calculada. Para uma exposição detalhada acerca desta abordagem, bem como para a prova de existência, veja Xavier et al. [6]. Para mais detalhes a cerca do método de decomposição de domínio, veja Lopes et al. [10] e Sokołowski e Zochowski [11], por exemplo.

3.2 Derivada topológica

A derivada topológica, denotada por $\mathcal{T}(x)$, do funcional de forma $\{-\Pi(u)\}$, onde $\Pi(u)$ é dada pela eq. (3), com respeito à nucleação de pequenas inclusões circulares caracterizadas pelo contraste γ , pode ser escrita em termos das soluções do problema direto da eq. (9) e adjunto da eq. (6), da seguinte forma:

$$\mathcal{T}(x) = \mathbb{P}_{\gamma} \sigma(u)(x) \cdot \nabla v^s(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (10)$$

onde o tensor de polarização \mathbb{P}_{γ} é dado pelo tensor isotrópico de quarta ordem como a seguir:

$$\mathbb{P}_{\gamma} = -\frac{1-\gamma}{1+\beta\gamma} \left((1+\beta)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \frac{1-\gamma}{1+\alpha\gamma} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (11)$$

sendo os coeficientes $\alpha = (\mu + \lambda)/\mu$ e $\beta = (3\mu + \lambda)/(\mu + \lambda)$.

Corolário 1 Os seguintes casos para o parâmetro de contraste γ podem ser formalmente obtidos da eq. (10), cuja justificativa matemática pode ser encontrada em Ammari et al. [12], por exemplo:

Caso 1 Parâmetro de contraste tendendo a zero ($\gamma \rightarrow 0$),

$$\mathcal{T}_0(x) = \mathbb{P}_0 \sigma(u)(x) \cdot \nabla v^s(x), \quad \text{onde } \mathbb{P}_0 = -\frac{4\mu + 2\lambda}{\mu + \lambda} \left(\mathbb{I} - \frac{\mu - \lambda}{4\mu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \quad (12)$$

Caso 2 Parâmetro de contraste tendendo a infinito ($\gamma \rightarrow \infty$),

$$\mathcal{T}_{\infty}(x) = \mathbb{P}_{\infty} \sigma(u)(x) \cdot \nabla v^s(x), \quad \text{onde } \mathbb{P}_{\infty} = \frac{4\mu + 2\lambda}{3\mu + \lambda} \left(\mathbb{I} + \frac{\mu - \lambda}{4(\mu + \lambda)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \quad (13)$$

4 Resultados numéricos

Agora, alguns exemplos numéricos serão apresentados a fim de ilustrar a aplicabilidade da metodologia apresentada no contexto de componentes mecânicos danificados submetidos a esforços cisalhantes. A derivada topológica é avaliada com intuito de detectar as regiões onde as inclusões devem ser posicionadas, levando em consideração os dois casos apresentados no Corolário 1 da Seção 3. Além disso, o problema de elasticidade é resolvido utilizando o Método de Elementos Finitos apenas com elementos lineares triangulares.

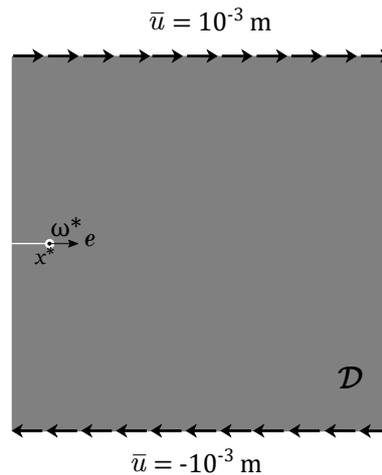


Figura 2. Geometria e condições de contorno.

4.1 A placa fraturada

Neste exemplo, tem-se uma placa representada pelo domínio \mathcal{D} que consiste de um quadrado com lado igual a 10^{-1} m, contendo uma trinca l alinhada com a mediana da placa e com início na extremidade esquerda da mesma. Aqui, assume-se o estado plano de tensões com deslocamentos prescritos na parte superior $\bar{u} = (10^{-3}, 0)$ m e na inferior $\bar{u} = (-10^{-3}, 0)$ m, conforme ilustrado na Figura 2. Além disso, a região de controle ω^* é dada por um círculo centrado na ponta da trinca com raio igual a $r^* = 2.5 \times 10^{-3}$ m. Por fim, define-se o vetor direção de crescimento da trinca $e = (1, -1)$ e seu comprimento inicial $h = 10^{-2}$ m, além do módulo de Young do material da placa $E = 30$ GPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

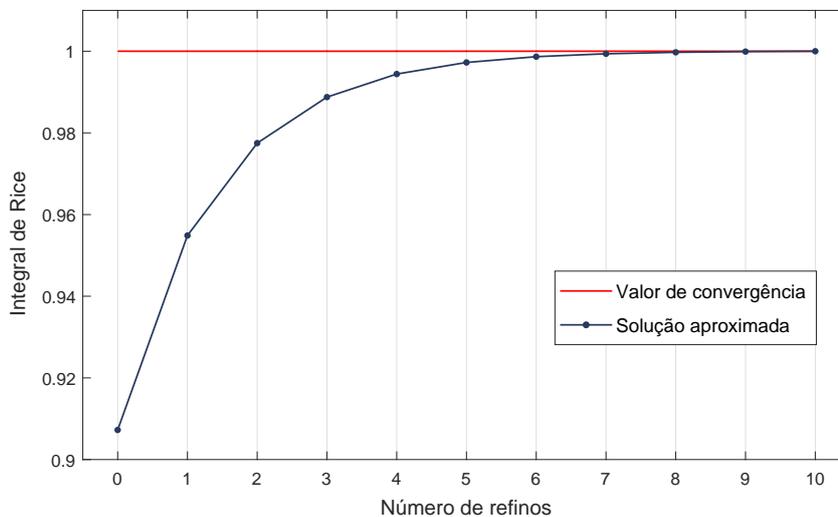


Figura 3. Convergência dos valores da integral de Rice.

O domínio de análise é discretizado em elementos finitos. A fim de se determinar a qualidade do cálculo da integral de Rice, uma sequência de refinamentos é aplicada aos elementos que estão na região ω^* , onde a relação entre o número de refinamentos e o valor da integral pode ser observada na Figura 3. Estes valores estão normalizados de acordo com o valor de convergência. Note que com dez refinamentos o resultado pode ser considerado bem satisfatório.

As derivadas topológicas associadas aos Casos 1 e 2 do Corolário 1, dados respectivamente pelas eq. (12) e eq. (13), estão apresentados nas Figuras 4(a) e 4(b). Portanto, de acordo com a metodologia apresentada, uma inclusão rígida e uma complacente devem ser nucleadas dentro da região onde $\mathcal{T}_0(x)$ e/ou $\mathcal{T}_\infty(x)$ são negativas, respectivamente. Com intuito de verificar os efeitos causados pela introdução de tais inclusões, quatro casos são considerados. No primeiro, denotado por Caso A, não é realizada nenhuma inclusão. No Caso B, estipulando

como a origem do sistema de coordenadas a extremidade esquerda inferior da placa, uma inclusão complacente é feita pouco acima da ponta da falha, centrada no ponto $(0.0175, 0.0535)$, onde $\mathcal{T}_0(x) < 0$. No Caso C, uma inclusão rígida é feita pouco abaixo da ponta da falha, centrada no ponto $(0.0175, 0.0465)$, onde $\mathcal{T}_\infty(x) < 0$. Por último, no Caso D, ambos os Casos B e C são combinados. Em todos os Casos o raio das inclusões é $r = 2,5 \times 10^{-3}$ m. Veja Figura 5 para mais detalhes, onde branco representa a inclusão complacente e o preto a inclusão rígida. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 1, também sendo apresentados graficamente na Figura 6, após a normalização dos valores com respeito a $\{-\Pi(u)\}$ no Caso A, obtido com dez refinamentos em ω^* .

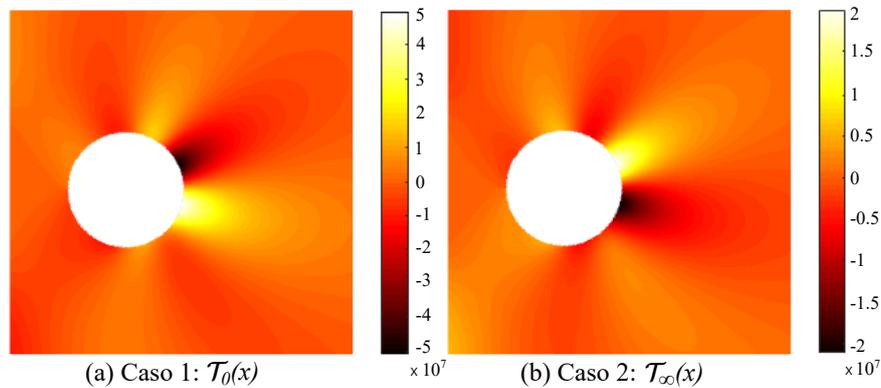


Figura 4. Derivadas topológicas

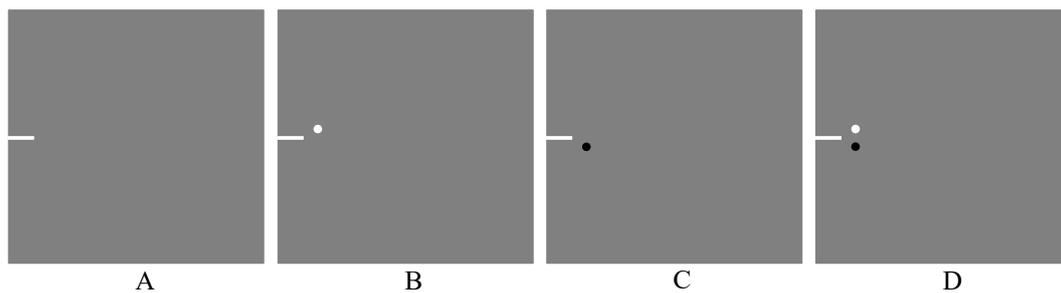


Figura 5. Casos considerados

Tabela 1. Integral de Rice em cada caso considerado.

Casos	A	B	C	D
$-\Pi(u)$	73701	65542	59725	48838

Como esperado, os valores do funcional de forma se tornam menos negativos após a introdução das mudanças topológicas indicadas pela derivada topológica. No Caso D, em especial, observa-se um aumento de aproximadamente 34% na tenacidade à fratura do componente de acordo com o critério de energia de Griffith.

5 Conclusões

De acordo com o critério de energia de Griffith, a metodologia referida neste trabalho permite um decréscimo nos valores do funcional de forma $\{-\Pi(u)\}$ em corpos elásticos fraturados sujeitos a esforços cisalhantes, aumentando, assim, sua vida útil. Mais precisamente, as simulações numéricas sugerem um ganho de aproximadamente 34% na tenacidade à fratura do componente mecânico, o que pode ser viabilizado seguindo a estratégia apresentada.

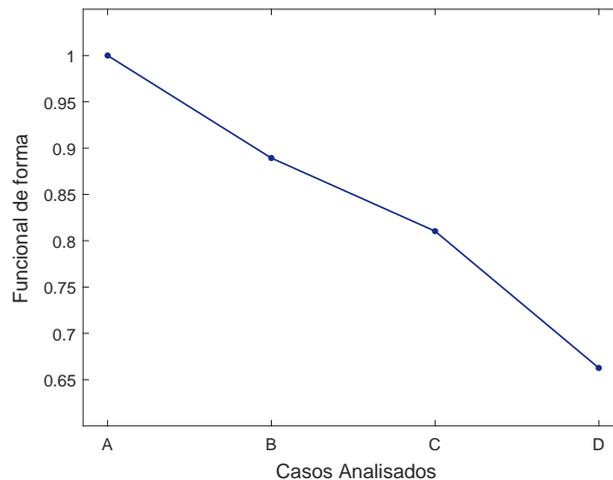


Figura 6. Funcional de forma em função dos casos considerados.

Acknowledgements. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Griffiths, A. A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society*, vol. 221, pp. 163–198.
- [2] Destuynder, P., 1989. Remarques sur le contrôle de la propagation des fissures en régime stationnaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série II*, vol. 308, n. 8, pp. 697–701.
- [3] Khludnev, A., Leugering, G., & Specovius-Neugebauer, M., 2012. Optimal control of inclusion and crack shapes in elastic bodies. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 155, n. 1, pp. 54–78.
- [4] Münch, A. & Pedregal, P., 2010. Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanics: the anti-plane case. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol. 16, n. 3, pp. 719–743.
- [5] Kovtunencko, V. A. & Leugering, G., 2016. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: the antiplane variational model. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 54, n. 3, pp. 1329–1351.
- [6] Xavier, M., Novotny, A. A., & Sokołowski, J., 2019. Crack growth control based on the topological derivative of the Rice's integral. *Journal of Elasticity*, vol. 134, n. 2, pp. 175–191.
- [7] Rice, J. R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
- [8] Novotny, A. A. & Sokołowski, J., 2013. *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [9] Eshelby, J. D., 1975. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, vol. 5, n. 3-4, pp. 321–335.
- [10] Lopes, C. G., Santos, R. B., Novotny, A. A., & Sokołowski, J., 2017. Asymptotic analysis of variational inequalities with applications to optimum design in elasticity. *Asymptotic Analysis*, vol. 102, pp. 227–242.
- [11] Sokołowski, J. & Żochowski, A., 2005. Modelling of topological derivatives for contact problems. *Numerische Mathematik*, vol. 102, n. 1, pp. 145–179.
- [12] Ammari, H., Kang, H., Kim, K., & Lee, H., 2013. Strong convergence of the solutions of the linear elasticity and uniformity of asymptotic expansions in the presence of small inclusions. *Journal of Differential Equations*, vol. 254, n. 12, pp. 4446–4464.