



Análise limite numérica de problemas axissimétricos em geotecnia: aplicação em estabilidade de poços

David Sebastian Calpa¹, Raquel Quadros Velloso², Eurípedes A. Vargas Jr.³, Fabricio Fernández⁴.

*Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, PUC-Rio
Rua M S Vicente 225, Gávea, Rio De Janeiro 22470-060, Brazil*

¹ *sebastiancalpaj@gmail.com*

² *raquelloso@puc-rio.br*

³ *vargas@puc-rio.br*

⁴ *fabriciof@puc-rio.br*

Abstract. This work presents the implementation of numerical limit analysis with mixed-weak formulation, based on the lower bound limit theorem and its application in axisymmetric stability problems. The finite element formulation was implemented in Matlab, where the optimization problem was established in two parts, the definition of equilibrium equation and the adaptation of the Drucker-Prager and Mohr-Coulomb rupture criteria into the Second Order Cone and Semidefined Programming, respectively. The numerical optimization problem was solved using the MOSEK optimizer, the collapse factor and the velocities field was obtained, identifying the rupture mechanism of the models. The presented implementation was applied to the stability analysis of a well. The results obtained in the axisymmetric analysis were verified through analysis in three-dimensional models and compared with the results obtained in the software Plaxis 2D, and Optum G2.

Palavras-chave: Análise Limite Numérica, Programação cônica, Axissimetria, Poço, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager.

1 Introdução

A Análise Limite (AL) utiliza os teoremas da plasticidade para estudar problemas de estabilidade, dentro dos quais tem-se os geotécnicos, com aplicação em fundações, taludes, escavações subterrâneas, entre outros. A Análise Limite Numérica (ALN) incorpora o método dos elementos finitos na discretização do meio contínuo, para representar a formulação contínua da AL de maneira aproximada, permitindo estudar problemas de grande complexidade. Uma vez discretizado o meio, é estabelecido o problema de otimização, onde são feitas aproximações pelos limites inferior ou superior para obter a solução requerida. Ao longo do tempo, as técnicas de otimização têm avançado, passando pela programação linear (Pastor [1], Pastor e Tugerman [2], Anderheggen e Knopfel [3], Sloan [4], Sloan e Kleeman [5]), a programação não linear (Lyamin e Sloan[6], Krabbenhøft e Damkilde[7]) e mais recentemente, a programação cônica (Krabbenhøft et al. [8], Makrodimitopoulos e Martin [9], Mohapatra [10], Tang et al. [11]), sendo esta última a que tem demonstrado notável eficiência na resolução de problemas de grande escala. Na área de geotecnia do programa de engenharia civil da PUC-RIO, tem-se implementado modelos bidimensionais e tridimensionais, para o estudo de problemas de capacidade de carga de fundações, estabilidade de taludes e estimação de cargas de colapso em túneis, porém, não tem-se referência de trabalhos focados no estudo de problemas na condição axissimétrica, e em geral, na literatura tem-se poucas referências do tema. A análise axissimétrica, permitiria a simplificação de alguns problemas tridimensionais, por esse motivo, neste trabalho foi implementada e aplicada à avaliação de estabilidade de poços.

2 Análise Limite

A AL se refere ao uso dos teoremas dos limites inferior (TLI) e superior (TLS) da plasticidade, que juntos determinam os valores limites da carga teórica de colapso plástico. A previsão das cargas de colapso tem como objetivo encontrar as forças que levaram à estrutura ao estado de colapso iminente, sem ter como objetivo a determinação de deformações elásticas, nem plásticas [12].

2.1 Hipóteses da Análise Limite

Na AL, o material é considerado isotrópico e rígido perfeitamente plástico (RPP). Os critérios de escoamento $f(\sigma_{ij})$ definem uma superfície convexa, fixa no espaço das tensões principais, que especifica a resistência do material.

A dificuldade apresentada ao assumir o material como RPP, no estabelecimento da relação tensão-deformação, é superada ao tratar com taxas de deformações plásticas ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p$), ao invés de deformações plásticas (ε_{ij}^p), as quais são obtidas a partir da lei de fluxo associada [13, 14]: $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$, onde $\dot{\gamma}$ é um escalar positivo, denominado multiplicador plástico.

2.2 Formulação da Análise Limite como problema de otimização

Levando em conta as hipóteses de escoamento e comportamento do material na AL, detalhadas acima, para as quais são cumpridos rigorosamente os teoremas da plasticidade [12, 15, 16], os teoremas da AL são formulados como problemas de otimização, onde o objetivo é estimar a carga de colapso da estrutura.

Existem formulações rigorosas pelo limite inferior (formulação estática), pelo limite superior (formulação cinemática) e ainda formulações mistas, a partir das quais podem ser obtidas soluções aproximadas, que não garantem o cumprimento a rigor de nenhum dos dois teoremas da AL. Nos trabalhos de Casciaro e Cascini [17], Christiansen [18], Christiansen e Andersen [19], são empregadas formulações mistas, que, como é demonstrado em Zouain et al [20], permitem obter um fator de colapso que necessariamente será inferior ao limite superior e superior ao limite inferior, sendo dessa maneira, mais próximo ao fator de colapso real [21]. Em Araújo [22] se demonstrou que a formulação mista apresenta como principais vantagens a maior facilidade de implementação e o fato de possuir consistência em relação aos campos de tensões e velocidades obtidos, na busca de uma solução com aproximações nos campos estático e cinemático.

Para a solução do sistema de equações do problema, o meio contínuo é discretizado e é estimada uma solução aproximada utilizando o método dos elementos finitos. A solução obtida é uma estimativa rigorosa do limite inferior ou do limite superior, dependendo do espaço de interpolação empregado para discretizar as tensões e velocidades. Neste trabalho (ao igual que em Camargo[21], Cruz [23], Couto [24] e García [25]) foi implementada uma formulação mista-fracas, com formato similar à formulação estática, porém satisfazendo aproximadamente as condições de equilíbrio e de contorno em tensão, e exatamente as condições de escoamento do material. É considerada fraca devido ao uso do princípio das potências virtuais (PPV) para a formulação das equações de equilíbrio, onde é igualada a potência virtual pelas forças externas e a taxa de dissipação da energia interna do material.

Problemas primal e dual de otimização

Considerando uma formulação mista-fracas, o problema primal de otimização é colocado como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad (-\lambda) \\ & \text{sujeito a :} \quad \lambda \left(\int_A \dot{u}_i T_i dA + \int_V \dot{u}_i F_i dV \right) + \int_A \dot{u}_i T_{0i} dA + \int_V \dot{u}_i F_{0i} dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV = 0 \quad (1) \\ & \quad \quad \quad f(\sigma_{ij}) \leq 0. \end{aligned}$$

E o problema dual é dado por:

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar} && \mathcal{L}(\sigma_{ij}, \mu, \rho) \\
& \text{sujeito a :} && \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma_{ij}, \mu, \rho)}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \\
& && \rho \geq 0 \\
& && \mu \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Na eq.(1) λ é o fator de colapso, um fator multiplicador das cargas responsáveis do colapso (F_i, T_i), adicionalmente, tem-se cargas de volume (F_{0i}) e de superfície (T_{0i}) que ficam fixas, dependendo das condições do problema estudado, \dot{u} é a velocidade virtual, utilizada no PPV. Tendo como variáveis do problema ao fator de colapso e as tensões, e duas restrições; uma de igualdade (referente ao equilíbrio) e uma de desigualdade (referente ao critério de escoamento). Na eq.(2) é definida uma função Lagrangeana \mathcal{L} , μ e ρ são multiplicadores de Lagrange, os associados às restrições de igualdade definem as taxas de deformação nodais no colapso, e aqueles associados às restrições de desigualdade são os fatores de plastificação [23]. Conhecendo-se a solução do problema primal é possível obter a solução do problema dual e vice-versa. Essa propriedade é aproveitada neste trabalho para obter as velocidades nodais que definem o mecanismo de colapso da estrutura geotécnica.

Algoritmo de otimização

Recentemente tem-se aplicado o algoritmo de pontos interiores para lidar com critérios de escoamento na forma cônica, nos quais o problema de otimização é colocado como:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \{c\}^T \{x\} \\
& \text{sujeito a :} && [A] \{x\} = \{b\} \\
& && \{x\} \in \mathcal{K}
\end{aligned} \tag{3}$$

onde $\{x\}$ é o vetor das variáveis do problema, $[A] \{x\} = \{b\}$ é um conjunto de restrições lineares e \mathcal{K} é um cone convexo associado ao problema. Entre os subcampos da programação cônica, os de maior interesse no modelamento de estruturas geotécnicas são a programação cônica de segunda ordem (SOCP) e a programação semi-definida (SDP), que se diferenciam pelo tipo de cone associado ao problema. Neste trabalho, o problema de otimização foi colocado como SOCP (critério de escoamento Drucker-Prager (D-P)) e SDP (critério de escoamento Mohr-Coulomb (M-C)) e resolvido mediante o software MOSEK [26], que faz uso do método primal-dual de pontos interiores proposto por Andersen et al [27].

3 Implementação Numérica

O emprego do método dos elementos finitos (MEF) para a solução de problemas de estabilidade confere ao método da AL um potencial de aplicação a problemas de considerável complexidade (geometria e carregamento). Esta seção está focada no estado axissimétrico, para as comparações feitas com análises tridimensionais foram consultadas as formulações de Camargo [21] e García [25].

3.1 Estado axissimétrico

Um corpo no estado axissimétrico, é aquele que apresenta simetria em relação a um eixo, em quanto à geometria, o carregamento, e nas propriedades e distribuição dos materiais. O corpo tridimensional se pode considerar como um sólido de revolução, formado pela rotação completa de uma seção longitudinal bidimensional ao redor do eixo de axissimetria. Em problemas axissimétricos é comum usar coordenadas cilíndricas, r (na direção radial), z (na direção vertical) e θ (na direção circunferencial). Devido à simetria não são gerados deslocamentos na direção circunferencial e os deslocamentos na direção radial e vertical são independentes de θ . Em consequência, tem-se 4 componentes de deformação ($\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{rz}$). Como foi revisto na seção 2.1, na AL são empregadas taxas de deformação ($\dot{\varepsilon}_{ij}$) ao invés de deformações. Tendo também 4 componentes de tensão ($\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{rz}$).

3.2 Discretização espacial

Na discretização do meio contínuo foram utilizados elementos quadrilaterais bidimensionais, isoparamétricos, de 4 nós (tipo Q4), com interpolação bilinear do campo de velocidades e de tensão constante no interior do elemento.

3.3 Formulação da equação de equilíbrio (restrição de igualdade) do problema de otimização

A restrição de igualdade da eq.(1), pode-se reescrever na forma matricial como:

$$[G] \{\sigma\} = \{f_o\} + \{t_o\} + \lambda (\{f\} + \{t\}) \quad (4)$$

onde $[G] = 2\pi \int_A [B]^T r dA$ é a matriz de equilíbrio, $\{\sigma\}$ o vetor de tensões, $\{f\} = 2\pi \int_A [N]^T \{F\} r dA$ é o vetor de forças de volume, $\{t\} = 2\pi \int_{s_1} [N]^T \{T\} r ds$ é o vetor de forças de superfície, sendo $[B]$ a matriz de compatibilidade cinemática, $[N]$ a matriz de interpolação de velocidades nodais, e r a coordenada radial do elemento finito considerado. A equação de equilíbrio global da estrutura resulta do acoplamento das matrizes elementares, seguindo a mesma metodologia que no método dos elementos finitos convencional.

3.4 Transformação dos critérios de escoamento ao espaço cônico

Na sequência, é apresentado o procedimento para a implementação dos critérios D-P e M-C no problema de otimização cônica, para o estado axissimétrico. Os criterios de escoamento foram adaptados com a finalidade de utilizar o software Mosek Aps 9.2 [26].

- **Critério de escoamento de Drucker-Prager na forma Cônica de Segunda Ordem.**

Inicialmente a transformação do critério D-P no estado tridimensional para o espaço cônico de segunda ordem foi apresentada por Makrodimopoulos e Martin [9], sendo empregada também nos trabalhos realizados na linha de pesquisa de ALN da PUC-RIO (Camargo [21] e García [25]). A formulação do critério no estado axissimétrico, resulta em uma simplificação dos trabalhos acima mencionados. O critério D-P pode ser expresso em termos de invariantes como: $\alpha I_1' + \sqrt{J_2} - k \leq 0$, onde α e k são parâmetros do modelo, $I_1' = \sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta}$, $J_2 = \frac{1}{2} (S_{rr}^2 + S_{zz}^2 + S_{\theta\theta}^2) + S_{rz}^2$, sendo S_{rr} , S_{zz} , $S_{\theta\theta}$ e S_{rz} componentes do tensor de tensões desviadoras. A restrição dada pelo critério de escoamento pode-se transformar em uma restrição linear de igualdade acoplada com uma restrição cônica de segunda ordem, mediante a introdução de uma variável auxiliar Λ :

$$\begin{cases} \Lambda = k - \alpha I_1' \\ \sqrt{\rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2} \leq \Lambda. \end{cases} \quad (5)$$

A restrição cônica de segunda ordem neste caso é obtida rearranjando os termos do segundo invariante de tensões de desvio J_2 . Na formulação do problema SOCP, as variáveis correspondentes ao vetor das tensões $\{\sigma\}$ para um elemento são substituídas por as de um vetor auxiliar $\{\rho\}$, que representa o critério de escoamento D-P. Matricialmente a transformação do critério é expressa assim:

$$\{\rho\} = \begin{Bmatrix} \Lambda \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Em [28] são apresentadas as expressões para calcular os valores de α e κ para varias aproximações do Cone D-P ao critério M-C, indicadas na Tabela 1.

Tabela 1. Correspondência entre os parâmetros dos critérios D-P e M-C

Tipo de cone	Parâmetros do critério Drucker-Prager	
	α	κ
Cone 1 (Inscrito)	$\frac{\sin\phi}{\sqrt{3(3+\sin^2\phi)^{1/2}}}$	$\frac{\sqrt{3} c \cos\phi}{(3+\sin^2\phi)^{1/2}}$
Cone 2 (Extensão triaxial)	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3(3+\sin\phi)}}$	$\frac{2\sqrt{3} c \cos\phi}{3+\sin\phi}$
Cone 3 (Proposto Chakraborty e Kumar)	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{\xi}}$	$\frac{6 c \cos\phi}{\sqrt{\xi}}$
Cone 4 (Médio)	$\frac{2\sin\phi}{3\sqrt{3}}$	$\frac{6 c \cos\phi}{3\sqrt{3}}$
Cone 5 (Compressão triaxial)	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3(3-\sin\phi)}}$	$\frac{2\sqrt{3} c \cos\phi}{3-\sin\phi}$

(*) O valor de ξ varia de 29.5 a 28 para $\phi=5^\circ$ e $\phi=45^\circ$ respectivamente.

• Critério de escoamento de Mohr-Coulomb na forma Semidefinida

Na sequência, é formulado o critério M-C como SDP, com base nos trabalhos de Krabbenhøft et al. [8], Martin e Makrodimopoulos [29], García [25], Bruno et al. [30], nos quais foi estudada a adaptação do critério M-C, para problemas tridimensionais, e o trabalho mais recente de Sun e Yang [31] para problemas na condição axissimétrica. Ao contrário da programação SOCP, na qual não é possível tratar diretamente o critério M-C no estado axissimétrico, com SDP o critério pode ser tratado em sua forma original, sem precisar fazer suposições sobre $\sigma_{\theta\theta}$. Inicialmente o vetor de tensões $\{\sigma\}$ é rearranjado de maneira a representar uma matriz simétrica positiva-semidefinida ($[\Sigma] \succeq 0$). O critério de M-C pode ser definido como: $\alpha \sigma_1 - \beta \sigma_3 \leq \kappa$, onde $\alpha = 1 + \sin\phi$, $\beta = 1 - \sin\phi$ e $\kappa = 2 c \cos\phi$. Para resolver o problema com SDP o critério pode ser expresso em função de duas restrições semidefinidas:

$$\begin{cases} -t[I] - \alpha[\Sigma] + \kappa[I] \succeq 0 \\ t[I] + \beta[\Sigma] \succeq 0 \end{cases} \quad (7)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade e t é uma variável auxiliar.

3.5 Considerações adicionais da implementação numérica

Nos problemas estudados as condições de contorno impostas à estrutura geotécnica foram do tipo Dirichlet, com velocidades nulas prescritas com o objetivo de garantir a ausência de movimentos de corpo rígido. O Fator de Segurança (FS) foi obtido via redução dos parâmetros de resistência, ao igual que em Camargo [21], Cruz [23] e García [25].

4 Exemplo de aplicação

O objetivo principal do presente estudo foi a aplicação dos códigos desenvolvidos na análise de estabilidade de um poço, cuja geometria é apresentada na Fig.1(a). Foi incorporada a presença de um anel de concreto, com uma espessura da parede de 1.2 metros e comprimento de 30 metros, como elemento rígido. Sendo o interesse da análise estudar a estabilidade do poço diante da ruptura do solo. Os códigos foram implementados no software MATLAB R2019b, o processador utilizado para todos os exemplos foi Intel Core i7-7700-CPU 3.60 GHz. Para a geração de malhas de elementos finitos e identificação do mecanismo de colapso foi utilizado o software de pré e pós processamento GiD v15 (CIMNE, 2020).

4.1 Validação Análise Axissimétrica - Análise Tridimensional

Inicialmente, para validar os códigos implementados para a condição axissimétrica, foram efetuadas análises tridimensionais do problema, com base no código desenvolvido por García [25]. Utilizando o critério D-P com SOCP, por meio do Cone 2 (Tabela 1). Na Fig.1(b) é apresentada a geometria e a malha semi-estruturada empregada na discretização do modelo tridimensional do poço, e na Fig.1(c) a malha plana não estruturada da análise axissimétrica.

Os resultados das análises efetuadas para diferentes parâmetros do solo são apresentados na Tabela 2. Em ela se pode perceber a notável redução dos tempos de processamento requeridos no modelo axissimétrico em comparação com o tridimensional, e como a diferença percentual na estimativa do FS em todos os casos, não supera o 2%. Os mecanismos de colapso obtidos a partir do campo de velocidades (o valor representado é o módulo do vetor velocidade normalizado), nos modelos tridimensional e axissimétrico são similares, e sugerem a ruptura pela base do poço (Fig.2).

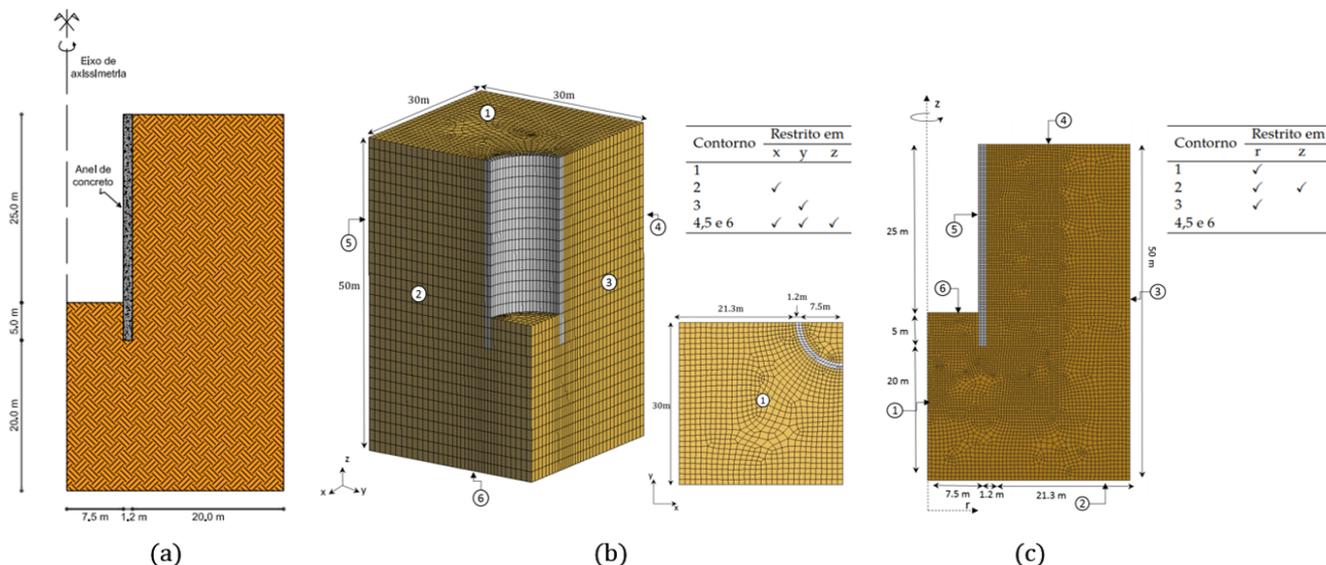


Figura 1. (a) Geometria do poço estudado, (b) Malha semi-estruturada tridimensional do poço, (c) Malha plana, não estruturada do poço, para a análise axissimétrica.

Tabela 2. Comparação entre os resultados obtidos nas análises axissimétrica e tridimensional (SOCP D-P cone 2).

Caso		1	2	3	4
Parâmetros	γ (kN/m^3)	16	17	18	19
	c (kPa)	6	10	10	50
	ϕ ($^\circ$)	20	25	20	35
Número de elementos	Análise Axissimétrica	6278	6278	6278	6278
	Análise 3D	31590	31590	31590	31590
Tempo de processamento (s)	Análise Axissimétrica	15.22	13.44	16.71	22.94
	Análise 3D	439.82	427.93	428.54	305.54
FS	Análise Axissimétrica	2.94	3.86	3.10	6.93
	Análise 3D	3.00	3.93	3.15	7.04
Diferença percentual		1.85	1.80	1.74	1.57

4.2 Análise comparativa de estabilidade para diferentes parâmetros do solo

Na Tabela 3 são apresentados os resultados das análises efetuadas na condição axissimétrica, para 8 casos de parâmetros do solo. Tendo como objetivo estudar o desempenho da programação SOCP D-P, com aproximações ao critério M-C, pelos Cones 1 e 2 da Tabela 1, na estimativa do FS . E de comparar os resultados dos códigos de ALN implementados nesta pesquisa, com os obtidos dos softwares Plaxis 2D e Optum G2. No caso do Plaxis 2D o comportamento do material do anel de concreto foi considerado elástico, com um módulo de elasticidade $E = 20 GPa$, um coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$, no caso de Optum G2 o material foi considerado rígido. Em todas as análises foi adotado um peso específico do concreto $\gamma_c = 24 kN/m^3$, e criadas malhas de aproximadamente 6000 nós.

Respeito ao desempenho dos Cones D-P com SOCP, para o Cone 1 a diferença percentual média na estimativa do FS com respeito aos resultados obtidos do critério M-C com SDP, foi de 5.50%, e no Cone 2 foi de 5.64%.

Nos 8 casos de parâmetros, os FS calculados neste trabalho foram muito próximos aos estimados com o software de ALN Optum G2, sendo de 1.59%, 4.03%, e de 7.33% as diferenças percentuais medias com os resultados obtidos das análises SDP M-C, SOCP D-P Cone 1 e SOCP D-P Cone 2, respectivamente.

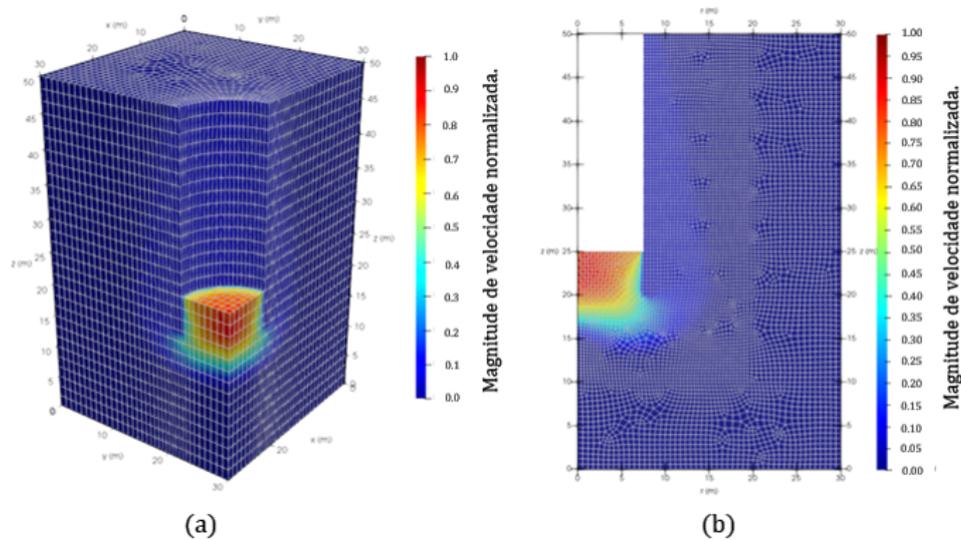


Figura 2. Campo de velocidades (módulo normalizado), que permitem a identificação do mecanismo de colapso obtido na análise de estabilidade tridimensional (a) e axissimétrica (b), do poço, com programação SOCP D-P Cone 2. Resultados do caso 1.

Tabela 3. Fator de Segurança obtido para diferentes casos de parâmetros do solo na análise de estabilidade

	Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
Parâmetros	γ (kN/m^3)	18	16	17	17	18	17	17	19
	c (kPa)	10	10	15	25	5	1	10	50
	ϕ ($^\circ$)	20	15	25	10	12	15	18	35
FS	SOCP D-P Cone 1	2.77	2.13	3.62	1.93	1.59	1.84	2.51	6.18
	SOCP D-P Cone 2	3.10	2.38	4.05	2.18	1.77	2.05	2.80	6.93
	SDP M-C	2.93	2.25	3.83	2.07	1.68	1.93	2.65	6.56
	M-C Optum G2	2.89	2.22	3.77	2.04	1.66	1.88	2.62	6.48
	M-C Plaxis	2.91	2.23	3.80	2.04	1.68	1.92	2.61	6.58

As diferenças percentuais com os FS estimados com o software Plaxis 2D, foram de 0.83%, 4.83% e de 6.43% para as análises SDP M-C, SOCP D-P Cone 1 e SOCP D-P Cone 2, respectivamente.

Nos campos de velocidade e deslocamentos representados na Fig.3 é possível identificar o mecanismo de colapso, estimado para os parâmetros do caso 8. Como se pode perceber a superfície de ruptura resulta consistente entre os diferentes métodos de análise.

5 Conclusões

A comparação dos resultados da modelagem axissimétrica com a tridimensional, demonstrou a validade dos resultados obtidos a partir da análise axissimétrica, tanto em termos do FS quanto na identificação do mecanismo de colapso, assim como sua eficiência em termos do tempo de processamento.

Como era esperado, os Cones 1 e 2 do critério D-P evidenciaram resultados próximos aos conseguidos da aplicação direta do critério M-C com programação SDP, com o Cone 1 foram obtidas estimativas mais conservadoras do FS (envoltória de ruptura mais restrita) e com o Cone 2 ligeiramente superiores. Os resultados dos códigos implementados foram muito similares aos conseguidos com os softwares comerciais Plaxis 2D e Optum G2.

A ALN com programação cônica demonstrou ser uma ferramenta eficiente para o estudo de problemas de estabilidade axissimétricos.

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os resultados apresentados, foram produto do trabalho de dissertação de mestrado de Calpa et al [32].

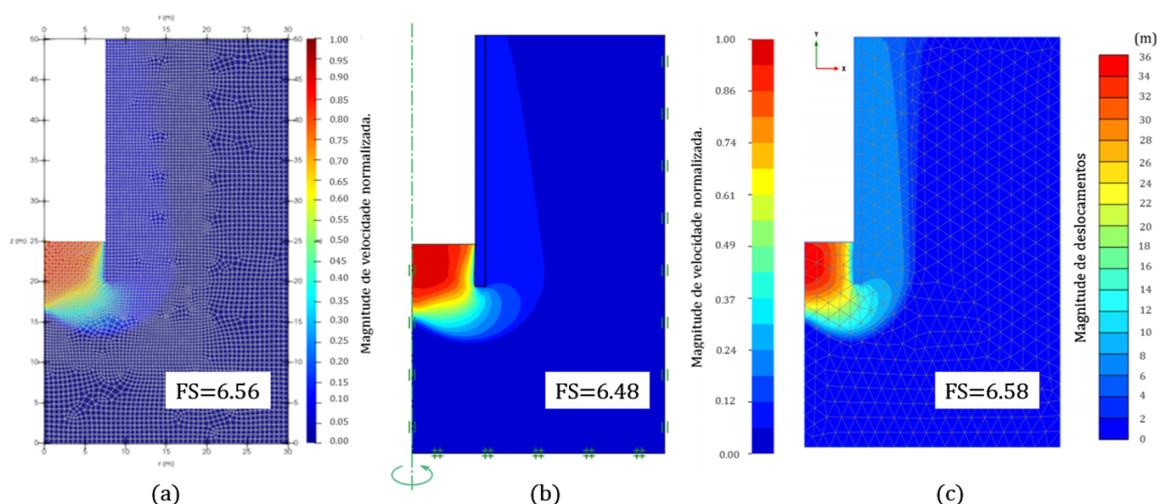


Figura 3. Representação do (a) Campo de velocidades (módulo normalizado) obtido com programação SDP M-C (b) Campo de velocidades (módulo normalizado) obtido no Optum G2 (c) Campo de deslocamentos (módulo do vetor de deslocamento) obtidos no Plaxis 2D. Resultados do caso 8.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Pastor. Analyse limite: détermination numérique de solutions statiques complètes. application au talus vertical. *Journal de Mécanique appliquée*, vol. 2, n. 4, pp. 167–196, 1978.
- [2] J. Pastor and S. Tugerman. Limit analysis in axisymmetrical problems: Numerical determination of complete statical solutions. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 24, n. 2, pp. 95–117, 1982.
- [3] E. Anderheggen and H. Knopfel. Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 8, pp. 1413–1431, 1995.
- [4] S. Sloan. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 13, pp. 263–282, 1989.
- [5] S. Sloan and P. Kleeman. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, pp. 293–314, 1995.
- [6] A. Lyamin and S. Sloan. Upper bound analysis using linear finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 26, pp. 181–216, 2002b.
- [7] K. Krabbenhøft and L. Damkilde. A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 165–184, 2002.
- [8] K. Krabbenhøft, A. Lyamin, and S. Sloan. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 1533–1549, 2007.
- [9] A. Makrodimopoulos and C. Martin. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, pp. 604–634, 2006.
- [10] D. Mohapatra. Novel numerical procedures for limit analysis: Implementation to planar, axisymmetric and three-dimensional geomechanics stability problems. *Doctoral dissertation, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Science*, 2020.
- [11] C. Tang, K. Toh, and K. Phoon. Application of lower bound limit analysis with second order cone programming for plane strain and axisymmetric geomechanics problems. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140 (2), pp. 268–278, 2014.
- [12] R. O. Davis and A. P. S. Selvadurai. *Plasticity and geomechanics*. Cambridge: University Press, 2002.
- [13] R. Hill. The mathematical theory of plasticity. *Oxford University Press*, vol. 7, 1998.
- [14] R. Von Mises. Mechanik der plastischen formaenderung von kristallen. *Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik*, vol. 29, pp. 445–458, 1928.
- [15] W. F. Chen. *Limit analysis and soil plasticity developments in geotechnical engineering*, 1975.
- [16] W. F. Chen and X. L. Liu. *Limit analysis in soil mechanics*. Elsevier, 1990.
- [17] R. Casciaro and L. Cascini. A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 211–243, 1982.
- [18] E. Christiansen. Computation of limit loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 1981.

- [19] E. Christiansen and K. Andersen. Computation of collapse states with von mises type yield condition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 1185–1202, 1999.
- [20] N. Zouain, L. Borges, and J. Silveira. Quadratic velocity-linear stress interpolations in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 98, pp. 469–491, 2014.
- [21] J. Camargo, R. Q. Velloso, and E. Vargas. Numerical limit analysis of three-dimensional slope stability problems in catchment areas. vol. *Acta Geotechnica*, 11(6), pp. 1369–1383, 2016.
- [22] L. G. Araújo. Estudo numérico de problemas de estabilidade em materiais geotécnicos através da análise limite. *Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro*, 1997.
- [23] L. Cruz, E. Vargas, and L. Vaz. Análise limite para o cálculo do fator de segurança de estabilidade de taludes utilizando programação cônica de segunda ordem. *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, vol. CILAMCE, Pirenópolis, GO, Brazil, 2013.
- [24] C. Couto and A. Farfán. Estudo do fator de colapso em problemas geotécnicos. *Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro*, 2018.
- [25] J. García Rojas, E. Vargas, and R. Velloso. Análise limite numérica usando programação semidefinida e cônica de segunda ordem com aplicação em estabilidade de túneis rasos. *Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro*, 2018.
- [26] Mosek optimization toolbox for matlab. vol. 9.2.29, 2020.
- [27] E. Andersen, C. Roos, and T. Terlaky. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization. *Mathematical Programming*, vol. 95(2), pp. 249–277, 2003.
- [28] M. Chakraborty and J. Kumar. Lower-bound axisymmetric formulation for geomechanics problems using nonlinear optimization. *International Journal of Geomechanics*, vol. 15, 2014.
- [29] C. Martin and A. Makrodimopoulos. Finite-element limit analysis of mohr–coulomb materials in 3d using semidefinite programming. *Journal of engineering mechanics, ASCE*, vol. 134(4), pp. 339–347, 2008.
- [30] H. B. Bruno, G. Barros, L. F. Martha, and I. Menezes. Formulação e solução de problemas de retorno à superfície de escoamento via programação cônica. *Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE*, 2017.
- [31] R. Sun and J. Yang. Axisymmetric adaptive lower bound limit analysis for mohr–coulomb materials using semidefinite programming. *Computers and Geotechnics*, 2020.
- [32] D. S. Calpa, R. Velloso, E. Vargas, and F. Fernández. Análise limite numérica de problemas axissimétricos em geotecnia. *Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro*, 2021.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.