

Análise não linear física e geométrica de placas retangulares

Daniella M. O. Aguiar, Renata M. Soares, João Pedro X. Freitas

*Escola de Engenharia Civil e Ambiental; Universidade Federal de Goiás - UFG
Avenida Universitária, 1488, Qd. 86, Setor Leste Universitário, 74605-220, Goiás, Brasil
daniella.aguiar@discente.ufg.br, renatasoares@ufg.br; joaopxf@discente.ufg.br*

Resumo. Estuda-se o comportamento estático de placas retangulares de material hiperelástico, isotrópico, homogêneo e incompressível. As placas estão simplesmente apoiadas e são avaliadas sob efeito de um carregamento axial na direção x e, posteriormente, um carregamento de pressão transversal uniformemente distribuído. Ambas as não linearidades são consideradas, sendo a não linearidade geométrica incorporada com a teoria não linear de von Kármán e a não linearidade física, por sua vez, inserida com a utilização do modelo constitutivo hiperelástico Neo-Hookeano. O sistema de equações de equilíbrio é obtido com a aplicação do Princípio de Hamilton e do método de Rayleigh-Ritz, e resolvido utilizando o método de Newton-Raphson. Para a solução do problema consideram-se expansões no campo de deslocamentos de três graus de liberdade (GDL) para ambos os carregamentos e, além disso, para o caso de pressão consideram-se doze GDL e o desenvolvimento de um método denominado modelo local (MML). Obtêm-se as relações carga-deslocamento e observa-se a influência da não linearidade física quando obtidos grandes deslocamentos.

Palavras-chave: placas hiperelásticas, lei constitutiva Neo-Hookeana, não linearidade física, não linearidade geométrica.

1 Introdução

Placas são elementos estruturais amplamente empregados em diversas áreas da engenharia, podendo estar submetidas a carregamentos axiais e perpendiculares à superfície. No estudo de placas compostas por materiais elastoméricos com características hiperelásticas, as não linearidades física e geométrica têm influência significativa na resposta obtida pelas análises, sejam elas estáticas ou dinâmicas.

A representação da relação não linear entre deformação e deslocamento, isto é, a não linearidade geométrica da placa, pode ser considerada na teoria não linear de von Kármán. As leis constitutivas hiperelásticas, que introduzem uma relação não linear entre tensão e deformação, são empregadas para simular o comportamento de materiais do tipo borracha e tecidos biológicos moles, definindo a não linearidade física. Como exemplo de modelos constitutivos hiperelásticos, têm-se o Neo-Hookeano, o de Mooney-Rivlin e o de Ogden.

A deflexão estática e vibrações de grande amplitude de placas finas retangulares de borracha são analisadas por Breslavsky, Amabili e Legrand [1]. No estudo, as não linearidades física e geométrica são consideradas e, para tanto, utiliza-se o modelo constitutivo hiperelástico Neo-Hookeano e a teoria não linear de von Kármán. É proposto um método para elaborar um modelo local (MML) que aproxima o comportamento da placa em torno de uma configuração deformada previamente desconhecida. Verifica-se que o MML composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias, envolvendo ambas as não linearidades, descreve com precisão o comportamento de uma placa de borracha. Estudo semelhante é feito para placas finas quadradas de borracha e material biológico em Breslavsky, Amabili e Legrand [2]. No qual se descreve a não linearidade física utilizando as leis constitutivas hiperelásticas Neo-Hookeana, de Mooney-Rivlin e de Odgen. A não linearidade geométrica é modelada por meio da teoria não linear de Novozhilov que considera as não linearidades do plano.

Uma metodologia baseada em aproximação por elementos finitos em conjunto com técnicas de otimização topológica para análise da resposta dinâmica não linear de ressonadores, que são placas finas retangulares, é proposta por Tripathi e Bajaj [3]. Admite-se que as placas obedecem às leis de Kirchhoff e aplicam-se dois

modelos, o Neo-Hookeano e o de Mooney-Rivlin, para representar o material hiperelástico. Utiliza-se a sobreposição modal para desenvolver a resposta dinâmica não linear das estruturas sintetizadas e avalia-se a resposta forçada às excitações de base.

Posteriormente, Amabili *et al.* [4] investigam a vibração de pequena amplitude e a grande deflexão estática de uma placa fina quadrada de borracha de silicone. As análises são realizadas analítica, numérica e experimentalmente. No modelo analítico obtêm-se as equações do movimento utilizando uma abordagem energética, aplicando o modelo de Mooney-Rivlin para o material e a teoria não linear de Novozhilov. O modelo numérico é desenvolvido por meio de um programa comercial de elementos finitos. Conclui-se que há convergência nos resultados experimentais e numéricos para os primeiros quatro modos e frequências naturais.

Já Ansari *et al.* [5] propõem uma nova formulação para avaliar grandes deformações em placas retangulares hiperelásticas na qual as equações do movimento são apresentadas em um formato matricial. Para descrever o material utiliza-se o modelo Neo-Hookeano sob dois regimes: compressível e quase incompressível. O trabalho apresenta como vantagens da abordagem proposta a taxa de convergência rápida, a eficiência computacional e a simples implementação.

Dessa forma, o objetivo do presente trabalho é analisar as influências das não linearidades física e geométrica no comportamento não linear de placas retangulares compostas de material elastomérico hiperelástico do tipo Neo-Hookeano. São obtidos os caminhos não lineares de equilíbrio considerando ambos os carregamentos e ambas as não linearidades e, na solução do problema para o carregamento de pressão aplica-se o método do modelo local.

2 Formulação matemática

É considerada uma placa retangular fina de espessura constante h , dimensões do plano a e b , simplesmente apoiada com bordas imóveis, conforme eq. (1), e composta por material isotrópico, homogêneo, hiperelástico e incompressível descrito pela lei constitutiva Neo-Hookeana, com Módulo de Elasticidade E . Assim, a Fig. 1 ilustra a geometria da placa definida no espaço Euclidiano tridimensional:

$$\begin{aligned} u = v = w = M_x = 0 & \quad \text{em } x = 0, a, \\ u = v = w = M_y = 0 & \quad \text{em } y = 0, b. \end{aligned} \quad (1)$$

Em que u , v e w são os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente; e M_x e M_y são os momentos de flexão x e y .

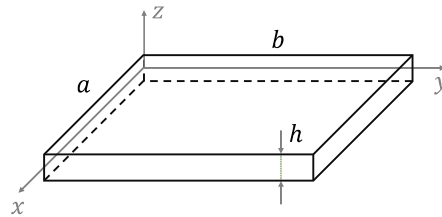


Figura 1. Placa retangular e sistema de coordenadas

As equações de equilíbrio do problema são determinadas a partir do princípio variacional conforme eq. (2) sendo a energia potencial de deformação elástica, Π , dada pela eq. (3).

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = Q_i. \quad (2)$$

$$\Pi = \iiint_V W \, dV. \quad (3)$$

Nas quais q_i são coordenadas generalizadas, Q_i são as forças generalizadas, V é o volume da placa e W é a densidade de energia de deformação.

2.1 Não linearidade geométrica (NLG)

A análise não linear geométrica, pode ser considerada por meio da aplicação da teoria não linear de placas de von Kármán, que possui a relação deformação-deslocamento presente nas eq. (4) - (6), nas quais ε_1 , ε_2 , e ε_{12} são as componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (5)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Na análise do carregamento axial, segundo Breslavsky, Amabili e Legrand [1], os deslocamentos são expandidos em funções de senos simples de acordo com as eq. (7) - (9), garantindo as condições de contorno do problema.

$$w(x, y) = w_{11} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (7)$$

$$u(x, y) = u_{21} \operatorname{sen} \left(\frac{2 \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (8)$$

$$v(x, y) = v_{12} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2 \pi y}{b} \right). \quad (9)$$

Já para pressão transversal, de acordo com Breslavsky, Amabili e Legrand [1], os deslocamentos são expandidos conforme as eq. (10) - (12).

$$w(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} w_{n, m} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right). \quad (10)$$

$$u(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} u_{2n, m} \operatorname{sen} \left(\frac{2n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right). \quad (11)$$

$$v(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} v_{n, 2m} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2m \pi y}{b} \right). \quad (12)$$

Os modos utilizados para três e doze graus de liberdade estão apresentados na Tab. 1. As coordenadas generalizadas de dois índices $w_{n, m}$, $u_{2n, m}$ e $v_{n, 2m}$ são divididas pela espessura h da placa e substituídas por coordenadas generalizadas de um índice q_i com i variando de um até o número total de graus de liberdade N .

Tabela 1. Modos utilizados no campo de deslocamentos

Número de GDL	Modos
3	$w_{1,1}, u_{2,1}, v_{1,2}$
12	$w_{i,j}, i, j = 1, 3; u_{i,j}, v_{j,i}, i=2, 4; j=1, 3.$

2.2 Não linearidade física (NLF)

A relação não linear entre tensão e deformação de materiais hiperelásticos é descrita por modelos constitutivos fundamentados na função de densidade de energia de deformação, W . Neste trabalho, utiliza-se o

modelo constitutivo Neo-Hookeano incompressível que tem a função de densidade de energia de deformação descrita conforme eq. (13), na qual I_1 é o primeiro invariante de deformação e ν é o coeficiente de Poisson.

$$W = \frac{E}{4(1 + \nu)}(I_1 - 3). \quad (13)$$

O primeiro invariante de deformação é obtido por meio da utilização do tensor direito de deformação de Cauchy-Green, \mathbf{C} , que é definido pela eq. (14), na qual \mathbf{E} é o tensor de deformações de Green-Lagrange e \mathbf{I} é a matriz identidade.

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 + 1 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 2\varepsilon_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 + 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Definido o tensor direito de deformação de Cauchy-Green, pode-se encontrar o primeiro invariante, eq. (15), e o Jacobiano, eq. (16), que exerce papel de terceiro invariante.

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 3. \quad (15)$$

$$J^2 = \det(\mathbf{C}) = (2\varepsilon_3 + 1)((2\varepsilon_1 + 1)(2\varepsilon_2 + 1) - \varepsilon_{12}^2). \quad (16)$$

O Jacobiano assume valor unitário quando o material é incompressível e, utilizando essa condição, pode-se definir a tensão normal transversal ε_3 como se apresenta na eq. (17).

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2((2\varepsilon_1 + 1)(2\varepsilon_2 + 1) - \varepsilon_{12}^2)} - \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Observa-se que, utilizando as formulações mostradas, a função de densidade de energia não assume uma forma polinomial em deformações, o que seria mais vantajoso para tornar a avaliação do comportamento não linear das placas menos dificultosa. A solução de sistemas com esse tipo de equacionamento só é possível numericamente e limita-se a modelos com poucos graus de liberdade. Assim, para o problema considerando o carregamento axial na direção x linearmente distribuído, utiliza-se uma expansão em série de Taylor da eq. (17) até quarta ordem, que fornece a deformação normal transversal, e substitui-se essa expansão em série na equação da função de densidade de energia de deformação. E neste caso, que considera carregamento linearmente distribuído na direção x ao longo do contorno $x = 0; a$, tem-se que o trabalho das forças W_e é dado pela eq. (18).

$$W_e = p_x \int_0^a \int_0^b u(x, y)_{,x} + \frac{1}{2} w(x, y)_{,x}^2 \quad (18)$$

Porém, para problemas com muitos graus de liberdade, como o caso considerado para o carregamento de pressão com um campo de deslocamento com doze GDL, as equações com termos de ordem superior a três são indesejáveis porque necessitam de grande esforço computacional durante a integração. Por essa razão, Breslavsky, Amabili e Legrand [1] propõem o MML que visa simplificar as análises e será utilizado no presente trabalho na solução do problema com carregamento de pressão transversal.

Quando analisada apenas não linearidade geométrica, a função de densidade de energia de deformação é dada pela eq. (19).

$$W = \frac{E}{4(1 + \nu)}(4\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_{12}^2). \quad (19)$$

2.3 Método do modelo local

O MML se baseia na transformação da função de densidade de energia de deformação Neo-Hookeana, por meio de uma expansão local capaz de descrever o comportamento da placa apenas localmente, em torno de uma configuração estática deformada conhecida. O desenvolvimento completo do método pode ser encontrado em

Breslavsky, Amabili e Legrand [1] e Amabili [6].

Para a aplicação do MML, as coordenadas generalizadas passam a ser descritas conforme eq. (20), na qual α é um parâmetro formal considerado de valor unitário, $\mathbf{q}^{(0)}$ é uma configuração conhecida, $\mathbf{q}^{(1)}$ é uma nova configuração a ser calculada e $\mathbf{q}^{(2)}$ é uma configuração auxiliar que desaparece com a diferenciação a ser realizada, mas é necessária para descrever as deformações.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)} + \alpha\mathbf{q}^{(1)} + \alpha^2\mathbf{q}^{(2)}. \quad (20)$$

As componentes de deformação são expressas nas eq. (21) - (23) que são obtidas aplicando no campo de deslocamentos, para cada coordenada generalizada q_i , a expansão da eq. (20). Feito isso, utilizam-se os campos de deslocamentos gerados com essa aplicação para descrever as deformações utilizando a teoria de von Kármán. As deformações em cada direção terão, então, termos que não acompanham α , pertencentes a $\varepsilon_i^{(0)}$; termos que acompanham α , pertencentes a $\varepsilon_i^{(1)}$; termos que acompanham α^2 , pertencentes a $\varepsilon_i^{(2)}$; e os termos que acompanham as potenciais superiores a α^2 , que serão desconsiderados. A função de densidade de energia é, então, modificada com a aplicação das eq. (21) - (23).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha\varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_1^{(2)}. \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)} + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}. \quad (22)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{(0)} + \alpha\varepsilon_{12}^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (23)$$

Devido a aplicação do MML, a diferenciação da eq. (2) ocorre em relação as coordenadas generalizadas $q_i^{(1)}$. As forças generalizadas Q_i são definidas pela eq. (24).

$$Q_i = \frac{\partial W_e}{\partial q_i^{(0)}}. \quad (24)$$

Neste estudo, o carregamento de pressão utilizado é uma carga distribuída de direção constante, assim o trabalho das forças W_e é dado pela eq. (25).

$$W_e = p \int_0^a \int_0^b w. \quad (25)$$

Utilizando as formulações apresentadas e aplicando o Método de Rayleigh-Ritz, as equações de equilíbrio tomam a forma da eq. (26), nas quais na qual $k_i, k_{ij}, k_{ijk}, k_{ijkl}$ são coeficientes resultantes da integração na área.

$$k_i(\mathbf{q}^{(0)}) + \sum_{j=1}^N k_{ij}(\mathbf{q}^{(0)})q_j^{(1)} + \sum_{j,k=1}^N k_{ijk}(\mathbf{q}^{(0)})q_j^{(1)}q_k^{(1)} + \sum_{j,k,l=1}^N k_{ijkl}(\mathbf{q}^{(0)})q_j^{(1)}q_k^{(1)}q_l^{(1)} = Q_i \quad (26)$$

A solução do sistema de equações não lineares é obtida aplicando-se o método de Newton-Raphson com algumas modificações devido à utilização do MML. Os cálculos têm início a partir de uma configuração deformada conhecida $q^{(0)}$ e, para a análise estática, a primeira configuração conhecida é aquela decorrente $w_{l,r}=10h$ do modelo apenas não linearidade geométrica. Assume-se que a primeira coordenada generalizada desconhecida $q_l^{(1)}$ tem valor $H=0.01q_l^{(0)}$. Resolve-se as equações determinando as demais coordenadas generalizadas $q_i^{(1)}$ e a força p . A configuração estática é atualizada para a próxima iteração de acordo com a eq. (27):

$$\mathbf{q}^{(0)} \leftarrow \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)}. \quad (27)$$

3 Resultados Numéricos

Considera-se que a placa retangular simplesmente apoiada possui dimensões $a=0.80$ m e $b=1.00$ m, com espessura $h=0.005$ m. O material é hiperelástico do tipo Neo-Hookeano, com coeficiente de Poisson $\nu=0.5$ e Módulo de Elasticidade $E=10^7$ Pa.

3.1 Carregamento axial

Considerando a placa submetida ao carregamento axial obteve-se a carga crítica igual a 5.761 N/m e o caminho não linear de equilíbrio, considerando apenas a não linearidade geométrica e ambas as não linearidades, apresentado na Fig. 2. Observa-se a partir do zoom (retângulo próximo a origem do sistema de eixos) que inicialmente, para pequenos deslocamentos, as duas curvas se sobrepõem e ambas partem do valor da carga crítica (solução linear). Com o acréscimo de deslocamento as duas curvas se distanciam, sendo que a solução considerando apenas a NLG tem um maior ganho de deslocamento em um menor acréscimo de carregamento. A partir de uma relação de aproximadamente $w/h = 70$ a solução considerando NLG e NLF apresenta um acentuado aumento de carga para pequenos acréscimos de deslocamento. Por fim, verifica-se que consideração da NLF influencia no comportamento estático da placa quando grandes deslocamentos são considerados.

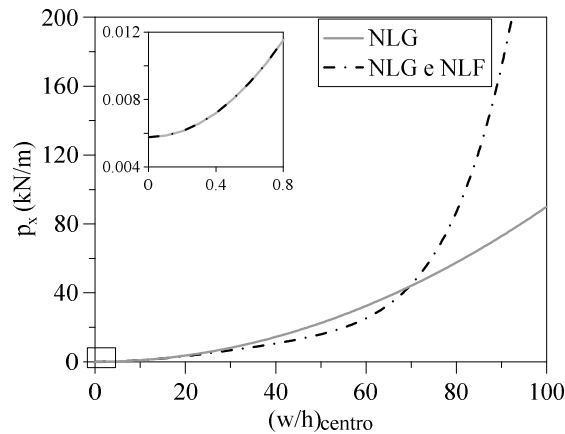


Figure 2. Caminho não linear de equilíbrio

3.2 Carregamento de pressão

Na Fig. 3 exibe-se a relação pressão-deslocamento transversal normalizado pela espessura com duas curvas, sendo uma delas referente ao modelo de doze graus de liberdade (12 GDL) com apenas não linearidade geométrica (NLG) e a outra, com ambas as não linearidades (NLF e NLG). Constata-se que, até um deslocamento de $20h$, as curvas se sobrepõem e apenas NLG seria suficiente para descrever o comportamento do sistema. É por esse motivo que uma configuração inicial calculada no sistema com apenas não linearidade geométrica, ou seja, considerando o material linear, é utilizada como ponto de partida no método do modelo local que contempla ambas as não linearidades. Além disso, observa-se que a NLF influencia o comportamento da placa submetida a grandes deslocamentos já que a partir de aproximadamente $w/h = 40$ o ganho de deslocamento aumenta, para o mesmo aumento de pressão, na solução considerando as duas não linearidades.

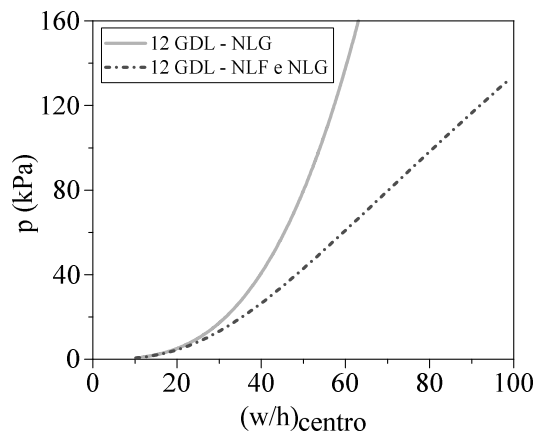


Figura 3. Relação pressão-deslocamento transversal normalizado - comparativo entre apenas NLG com NLG e NLF

A Fig. 4 mostra os resultados obtidos quando são consideradas as duas não linearidades em um sistema com três (3 GDL) e outro com doze graus de liberdade (12 GDL). À medida que a magnitude dos deslocamentos aumenta percebe-se que o modelo com 3GDL não é suficiente para representar a solução com a acurácia necessária, mas que para pequenos deslocamentos (menores que aproximadamente $w/h = 20$) o modelo com menor número de graus de liberdade pode ser utilizado.

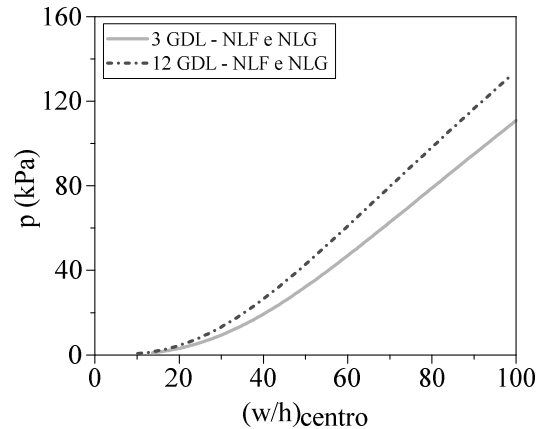


Figura 4. Diagrama pressão-deslocamento para não linearidades física e geométrica

4 Conclusão

Analisa-se a influência das não linearidades física e geométrica no comportamento não linear de placas retangulares compostas de material elastomérico Neo-Hookeano. Para isso, obtêm-se os caminhos não lineares de equilíbrio considerando inicialmente um carregamento axial e posteriormente um carregamento de pressão transversal. Para a solução da placa submetida a pressão utiliza-se o MML, conforme proposto por Breslavsky, Amabili e Legrand [1].

Em ambas as considerações de carregamento observa-se que para pequenos deslocamentos a NLF não influencia na resposta, porém à medida que os deslocamentos transversais aumentam as duas soluções divergem. Além disso, verificou-se a partir da análise da placa submetida a pressão transversal, que a consideração do campo de deslocamentos utilizando expansões modais com apenas 3GDL não é suficiente para representar a solução do problema com precisão, sendo necessário utilizar um maior número de modos na expansão.

Agradecimentos. Os autores agradecem o apoio financeiro da agência de fomento CAPES para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] I. Breslavsky; M. Amabili; M. Legrand, “Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009, 2014.
- [2] I. Breslavsky; M. Amabili; M. Legrand, “Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates”. *Journal of Sound and Vibration*, DOI: 10.1016/j.jsv.2014.04.028, 2014.
- [3] A. Tripathi e A.K. Bajaj, “Topology optimization and internal resonances in transverse vibrations of hyperelastic plates”. *International Journal of Solids and Structures*, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.11.029, 2016.
- [4] M. Amabili; P. Balasubramanian; I. Breslavsky; G. Ferrari; R. Garziera; K. Riabova, “Experimental and numerical study on vibrations and static deflection of a thin hyperelastic plate”. *Journal of Sound and Vibration*, DOI: 10.1016/j.jsv.2016.09.015, 2016.
- [5] R. Ansari; R. Hassani; M. Faraji Oskouie; H. Rouhi, “Nonlinear bending analysis of hyperelastic Mindlin plates: a numerical approach”. *Acta Mech*, DOI: 10.1007/s00707-020-02756-x, 2021.
- [6] M. Amabili, *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2018. 567 p.