

Modelo reduzido para análise estática de uma placa retangular hiperelástica

Daniella M. O. Aguiar, Renata M. Soares

*Escola de Engenharia Civil e Ambiental; Universidade Federal de Goiás - UFG
Avenida Universitária, 1488, Qd. 86, Setor Leste Universitário, 74605-220, Goiás, Brasil
daniella.aguiar@discente.ufg.br; renatasoares@ufg.br*

Resumo. Realiza-se a análise estática de uma placa fina retangular, composta de material hiperelástico sujeita a carregamento de pressão uniformemente distribuído. Ambas as não linearidades são consideradas e, para isso, aplica-se o modelo Neo-Hookeano, que descreve a não linearidade física do material, e a teoria não linear de von Kármán, que incorpora a não linearidade geométrica. Compara-se as respostas obtidas para os diagramas pressão-deslocamento de um sistema de equações com doze graus de liberdade, obtido com aplicação das ferramentas do cálculo variacional no funcional de energia da placa, com um modelo reduzido pelo Método de Karhunen-Loève. Para a geometria analisada, o modelo reduzido, de custo computacional menor que o sistema original, representa de forma satisfatória o comportamento estático da placa.

Palavras-chave: placas hiperelásticas, lei constitutiva Neo-Hookeana, não linearidade física, não linearidade geométrica, modelo reduzido.

1 Introdução

Para o estudo do comportamento estático de placas de material elastomérico com características hiperelásticas deve-se considerar a influência de não linearidades física e geométrica. Isso porque, esse tipo de material manifesta grandes deformações elásticas independentemente do nível de solicitação, assim a relação entre tensão e deformação é não linear (não linearidade física), sendo representada pelas leis constitutivas hiperelásticas. Também é característico de materiais hiperelásticos apresentarem grandes deslocamentos quando sujeitos a cargas estáticas significativas o que pode estabelecer uma relação não linear entre deformação e deslocamento (não linearidade geométrica), introduzida por meio da teoria não linear de von Kármán.

A simulação de sistemas que levam em consideração as não linearidades física e geométrica exige, em geral, um número elevado de graus de liberdade para que se tenha uma boa aproximação e isto influencia no custo computacional envolvido para se obter a solução desses. Uma alternativa para reduzir o custo computacional, perdendo um pouco da precisão, é a utilização de modelos reduzidos que buscam a diminuição do número de graus de liberdade com um menor erro de aproximação possível.

Breslavsky, Amabili e Legrand [1] e Breslavsky, Amabili e Legrand [2] estudam deflexão estática e vibrações em placas retangulares de material hiperelástico propondo a aplicação de um método denominado modelo local (MML) para simplificar as análises. Os autores afirmam que o sistema com doze graus de liberdade (GDL) possui acurácia suficiente na representação de placas deste tipo de material.

Considerando o custo computacional envolvido na solução de um sistema com doze GDL, o objetivo do presente trabalho é deduzir um modelo de ordem reduzida, utilizando o Método de Karhunen-Loève, para uma placa retangular hiperelástica comparando a deflexão estática encontrada no sistema original com aquela obtida pelo modelo reduzido.

2 Formulação matemática

Analisa-se uma placa fina retangular composta de material isotrópico, homogêneo, incompressível e hiperelástico Neo-Hookeano que está simplesmente apoiada com bordas imóveis – segundo as condições de contorno da eq. (1). A placa, Fig. 1, possui dimensões a e b , espessura h e é definida no domínio dado pela eq. (2).

$$\begin{aligned} u = v = w = M_x = 0 & \quad \text{em } x = 0, a. \\ u = v = w = M_y = 0 & \quad \text{em } y = 0, b. \end{aligned} \quad (1)$$

$$V = \{x \in [0; a], y \in [0; b], z \in [-h / 2; h / 2]\}. \quad (2)$$

Em que u , v e w são os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente; M_x e M_y são os momentos de flexão x e y ; e V é o volume da placa.

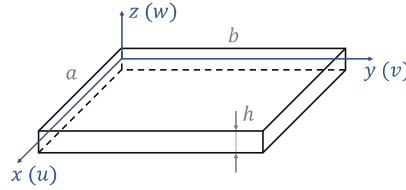


Figura 1. Placa retangular

As equações de Lagrange para a análise estática são obtidas de acordo com a eq. (3), na qual a Π é a Energia Potencial de deformação elástica, dada pela eq. (4), W_e é o trabalho das forças externas para um carregamento de pressão uniformemente distribuída, descrito pela eq. (5), e q_i são as coordenadas generalizadas.

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial W_e}{\partial q_i}. \quad (3)$$

$$\Pi = \iiint_V W \, dV. \quad (4)$$

$$W_e = p \int_0^a \int_0^b w \, dx \, dy. \quad (5)$$

Em que W é a densidade de energia de deformação e p é a magnitude de força radial distribuída.

2.1 Não linearidade geométrica (NLG)

Utiliza-se a teoria não linear de placas de von Kármán para considerar a não linearidade geométrica, assim a relação tensão e deformação é descrita como se apresenta nas eq. (6) - (8), nas quais ε_1 , ε_2 , e ε_{12} são as componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Para o sistema original, com doze GDL, os deslocamentos da placa, sujeita a pressão transversal, aplicando o Método de Rayleigh-Ritz são dados pelas eq. (9) - (11). Nas quais $w_{n,m}$, $u_{2n,m}$ e $v_{n,2m}$ são as coordenadas

generalizadas de dois índices que são divididas pela espessura h da placa e substituídas por coordenadas generalizadas de um índice q_i com i variando de um até o número total de graus de liberdade.

$$w(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} w_{n, m} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right). \quad (9)$$

$$u(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} u_{2n, m} \operatorname{sen} \left(\frac{2n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right). \quad (10)$$

$$v(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} v_{n, 2m} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2m \pi y}{b} \right). \quad (11)$$

Os modos empregados para doze graus de liberdade são expostos na eq. (12).

$$w_{i, j}, i, j = 1, 3; \quad u_{i, j}, v_{j, i}, i = 2, 4; j = 1, 3. \quad (12)$$

2.2 Não linearidade física (NLF)

A relação não linear tensão-deformação é representada por modelos constitutivos estabelecidos pela função densidade de energia de deformação, W . Aplica-se o modelo constitutivo hiperelástico Neo-Hookeano incompressível que tem a função densidade de energia de deformação descrita na eq. (13), em que E é o Módulo de Elasticidade, I_1 é o primeiro invariante de deformação e ν é o coeficiente de Poisson.

$$W = \frac{E}{4(1 + \nu)} (I_1 - 3). \quad (13)$$

A soma dos elementos da diagonal do tensor direito de deformações de Cauchy-Green, eq. (14), fornece o primeiro invariante de deformação (I_1). A componente ε_3 desse tensor, eq. (15), é relacionada às demais componentes pelo Jacobiano que tem valor unitário para materiais incompressíveis e é dado pelo determinante do tensor direito de deformações de Cauchy-Green – estabelecendo coeficiente de Poisson com valor igual a $\nu = 0.5$.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 + 1 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 2\varepsilon_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 + 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2((2\varepsilon_1 + 1)(2\varepsilon_2 + 1) - \varepsilon_{12}^2)} - \frac{1}{2}. \quad (15)$$

A função densidade de energia de deformação, aplicando as formulações apresentadas, não assume uma forma polinomial em deformações, o que dificulta as análises. Diante disso, utiliza-se neste estudo o MML proposto por Breslavsky, Amabili e Legrand [1] que modifica a função densidade de energia de deformação, facilitando a dedução e solução do sistema de equações.

O desenvolvimento detalhado do método pode ser encontrado em Breslavsky, Amabili e Legrand [1], mas, de forma sucinta, no MML as coordenadas generalizadas são descritas conforme a eq. (16), em que $\mathbf{q}^{(0)}$ é uma configuração conhecida, $\mathbf{q}^{(1)}$ é uma configuração a ser calculada e α é um parâmetro formal. A configuração $\mathbf{q}^{(0)}$ inicial advém do modelo que considera apenas não linearidade geométrica em $w = 10h$.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)} + \alpha \mathbf{q}^{(1)}. \quad (16)$$

Para descrever as deformações, eq. (17) - (19), é necessário acrescentar um termo na expansão da eq. (16) que descreve o campo de deslocamentos, $\alpha^2 \mathbf{q}^{(2)}$, e, posteriormente, aplicar a teoria de von Kármán.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)}. \quad (17)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)} + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}. \quad (18)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{(0)} + \alpha \varepsilon_{12}^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_{12}^{(2)}. \quad (19)$$

Modifica-se, então, a função densidade de energia de deformação aplicando as eq. (17) - (19) na eq. (13) e expandindo em alfa em série de Taylor até a segunda ordem.

Empregando as formulações apresentadas, obtêm-se as equações de equilíbrio da placa retangular hiperelástica. Vale ressaltar que, devido ao MML, as diferenciações que ocorrem na eq. (3) são em relação as coordenadas generalizadas $q_i^{(1)}$ e que o Método de Newton-Raphson, aplicado para obter a solução do sistema de equações, tem algumas alterações devido ao MML.

2.3 Modelo reduzido – Método de Karhunen-Loève

O Método de Karhunen-Loève, segundo Wolter [3], é fundamentado na construção e posterior decomposição de um tensor de autocorrelação espacial que pode ser obtido experimentalmente ou por meio de um modelo matemático. A decomposição do tensor gera um conjunto de funções denominadas modos ortogonais próprios (*proper orthogonal decomposition* – POMs), que descrevem um base ortogonal, e valores ortogonais próprios (*proper orthogonal values* – POVs), que fornecem a quantidade de energia média contida em cada modo. No trabalho de Wolter [3] tem-se a formulação completa do método que será apresentado de forma bastante resumida a seguir.

Considera-se, por exemplo, um campo vetorial $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t)$ que descreve os deslocamentos transversais da placa, podendo ser decomposto em duas parcelas: uma média invariante no tempo, $E[\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t)]$, e a variação temporal em relação à média dada pela eq. (20).

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}[\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t)]. \quad (20)$$

A superfície da placa é discretizada e os deslocamentos passam a ser investigados em N_i pontos discretos. Utilizando cada ponto de coordenada (x_i, y_i) e a expansão modal do sistema original com amplitudes provenientes da solução do sistema de equações, calcula-se um vetor de deslocamento de forma que, para cada instante de tempo, se tenha um vetor com N_i elementos, $\bar{\mathbf{w}}_1(t)$, $\bar{\mathbf{w}}_2(t)$, ..., $\bar{\mathbf{w}}_{N_i}(t)$. Empregando uma amostragem temporal de M instantes de tempo, tem-se a matriz de amostragem, eq. (21), de dimensões $M \times N_i$; na qual cada coluna representa a variação temporal do deslocamento em um determinado ponto da superfície e cada linha corresponde ao campo de deslocamento da placa em um dado instante de tempo.

$$\bar{\mathbf{W}} = [\bar{\mathbf{w}}_1 \quad \bar{\mathbf{w}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{w}}_{N_i}] = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t_1) & \bar{w}_2(t_1) & \dots & \bar{w}_{N_i}(t_1) \\ \bar{w}_1(t_2) & \bar{w}_2(t_2) & \dots & \bar{w}_{N_i}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_1(t_M) & \bar{w}_2(t_M) & \dots & \bar{w}_{N_i}(t_M) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Calcula-se, então, o valor médio do campo vetorial e, em seguida, a variação do campo vetorial em relação ao valor médio, $\bar{\mathbf{V}}$, efetuando a subtração deste valor médio de todas as linhas de $\bar{\mathbf{W}}$. A matriz de correlação espacial \mathbf{R} é escrita conforme eq. (22) e determina-se os autovalores e autovetores dessa matriz. Sendo que os autovetores da matriz \mathbf{R} são os modos ortogonais próprios e os autovalores são os valores ortogonais próprios. Definidos os autovalores e autovetores, pode-se estabelecer quais modos são mais representativos em termos de energia e reconstruir o sistema original criando um modelo reduzido.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{V}}. \quad (22)$$

Usualmente, no Método de Karhunen-Loève, o intervalo de amostragem é em função do tempo, porém, segunda Silva [4], os deslocamentos podem ser considerados em função do parâmetro de carga estática em uma análise não linear estática. Essa é a abordagem utilizada no presente trabalho.

As expansões utilizadas para decomposição são as apresentadas nas eq. (23) - (25), nas quais $(\varphi_w)_{ij}$, $(\varphi_u)_{ij}$ e $(\varphi_v)_{ij}$ representam as componentes de um determinado POM que é relativo à direção z , outro, relativo à x e, o terceiro, à y ; Δx_i e Δy_j são as distâncias entre os pontos da malha espacial; e os coeficientes $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ e $C_{n,m}$

representam a participação de cada modo na expansão modal do referido POM de cada direção.

$$W_{i,j} : \int_0^a \int_0^b A_{n,m} \left[\text{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \right]^2 \left[\text{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right) \right]^2 dx dy = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\varphi_w)_{ij} \text{sen} \left(\frac{n \pi x_i}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m \pi y_j}{b} \right) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (23)$$

$$U_{i,j} : \int_0^a \int_0^b B_{n,m} \left[\text{sen} \left(\frac{2n \pi x}{a} \right) \right]^2 \left[\text{sen} \left(\frac{m \pi y}{b} \right) \right]^2 dx dy = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\varphi_u)_{ij} \text{sen} \left(\frac{2n \pi x_i}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m \pi y_j}{b} \right) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (24)$$

$$V_{i,j} : \int_0^a \int_0^b C_{n,m} \left[\text{sen} \left(\frac{n \pi x}{a} \right) \right]^2 \left[\text{sen} \left(\frac{2m \pi y}{b} \right) \right]^2 dx dy = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (\varphi_v)_{ij} \text{sen} \left(\frac{n \pi x_i}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{2m \pi y_j}{b} \right) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (25)$$

3 Resultados numéricos

A placa retangular hiperelástica tem dimensões $a = 0.10$ m e $b = 0.12$ m, e espessura $h = 0.0005$ m e Módulo de Elasticidade $E = 10^7$ Pa. Aplicando as formulações expostas, obtêm-se as equações do movimento e soluciona-se o sistema com doze GDL (sistema original) aplicando o Método de Newton-Raphson.

Para dedução do modelo reduzido, a partir do Método de Karhunen-Loève, a superfície da placa é discretizada em $N_t = 100$ pontos, o intervalo de amostragem é considerado em função do parâmetro de carga estática considerando intervalos uniformes de carregamento de pressão e a matriz de amostragem tem dimensões 8×100 .

A primeira coordenada generalizada conhecida é obtida, como já mencionado, a partir do modelo que considera apenas não linearidade geométrica. Logo, foram desenvolvidos modelos reduzidos para os dois casos: não linearidade geométrica apenas e ambas as não linearidades.

Com a aplicação do Método de Karhunen-Loève no sistema com apenas não linearidade geométrica, para o campo que descreve os deslocamentos transversais da placa, um POM é responsável por concentrar 99,99% da energia e, por representar a maior parcela da energia, é utilizado na construção do modelo reduzido. Para os campos de deslocamento u e v , em cada caso, um POM concentra 99,99% da energia, assim, utiliza-se apenas um POM referente a cada campo para obtenção do modelo reduzido. A importância relativa de cada modo nas expansões, identificadas utilizando as eq. (23) - (25), é mostrada na Tab. 1.

Tabela 1. Participação dos modos usados na expansão modal para NLG

Campo de deslocamento w					
POM	POV	q_1	q_2	q_3	q_4
1	99,99%	-0.2208153640	-0.02086590934	-0.01316010273	-0.003836217669
Campo de deslocamento u					
POM	POV	q_5	q_6	q_7	q_8
1	99,99%	0.2188054804	-0.01856275127	0.03408863514	0.0005167018368
Campo de deslocamento v					
POM	POV	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
1	99,99%	0.2133553206	0.05040591383	-0.03503060781	-0.009712034872

Definida a participação de cada modo, Tab. 1, as expansões das eq. (9) - (11) são reescritas para o modelo reduzido conforme as eq. (26) - (28), nas quais a_1 , a_2 e a_3 são as amplitudes ou coordenadas generalizadas do

modelo reduzido.

$$w(x, y) = \left\{ -0.2208153640 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.02086590934 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] - 0.01316010273 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.003836217669 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_1. \quad (26)$$

$$u(x, y) = \left\{ 0.2188054804 \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.01856275127 \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] + 0.03408863514 \left[\text{sen} \left(\frac{4\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] + 0.0005167018368 \left[\text{sen} \left(\frac{4\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_2. \quad (27)$$

$$v(x, y) = \left\{ 0.2133553206 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] + 0.05040591383 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{4\pi y}{b} \right) \right] - 0.03503060781 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] - 0.009712034872 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{4\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_3. \quad (28)$$

O mesmo processo é realizado para o sistema que considera ambas as não linearidades e o modelo reduzido é construído a partir das contribuições descritas na Tab. 2. As expansões utilizadas para o modelo reduzido do sistema com NLF e NLG estão apresentadas nas eq. (29) - (31).

Tabela 2. Participação dos modos usados na expansão modal para NLF e NLG

Campo de deslocamentos w					
POM	POV	q_1	q_2	q_3	q_4
1	99,99%	-0.2209530318	-0.01950582381	-0.01311761523	-0.003150362224
Campo de deslocamento u					
POM	POV	q_5	q_6	q_7	q_8
1	99,99%	0.2156653612	-0.03930377852	0.03533825988	-0.008808426168
Campo de deslocamento v					
POM	POV	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
1	99,99%	0.2124989274	0.04909235354	-0.04070951390	-0.01263321994

$$w(x, y) = \left\{ -0.2209530318 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.01950582381 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] - 0.01311761523 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.003150362224 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_1. \quad (29)$$

$$u(x, y) = \left\{ 0.2156653612 \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.03930377852 \left[\text{sen} \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] + 0.03533825988 \left[\text{sen} \left(\frac{4\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] - 0.008808426168 \left[\text{sen} \left(\frac{4\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{3\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_2. \quad (30)$$

$$v(x, y) = \left\{ 0.2124989274 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] + 0.04909235354 \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{4\pi y}{b} \right) \right] - 0.04070951390 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \right] - 0.01263321994 \left[\text{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{4\pi y}{b} \right) \right] \right\} a_3. \quad (31)$$

A Fig. (2) exibe o comparativo dos diagramas pressão-deslocamento do sistema original e do modelo reduzido para o caso de NLG apenas. Os diagramas pressão-deslocamento transversal são obtidos no centro da placa e normalizados pela espessura. Os diagramas pressão-deslocamento para u e v são obtidos, respectivamente, para um ponto p_1 de coordenadas $x= 0.2a$ e $y= 0.5b$ e p_2 de coordenadas $x= 0.5a$ e $y= 0.2b$.

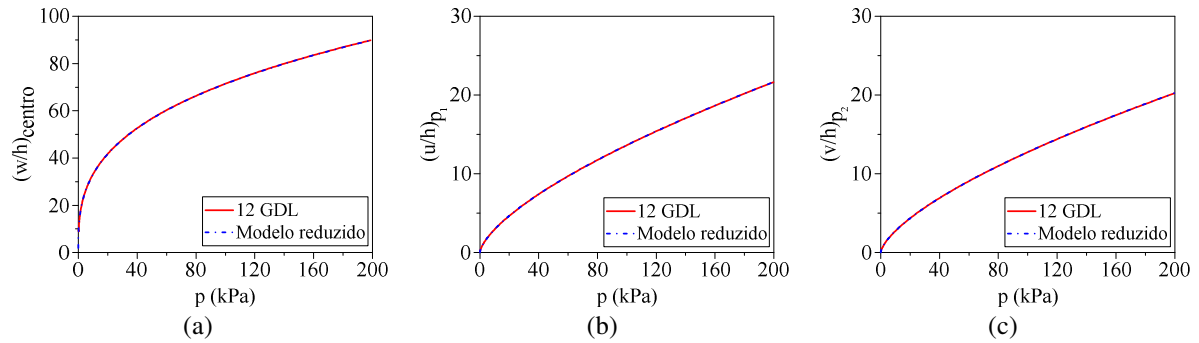


Figura 2. Diagramas pressão-deslocamento, NLG apenas, comparativo entre o modelo reduzido e o de 12 GDL (a) w ; (b) u ; (c) v

A Fig. (3) apresenta o comparativo dos diagramas pressão-deslocamento do sistema original e do modelo reduzido para o caso de NLF e NLG. Nos dois casos, NLG e ambas as não linearidades, houve convergência entre o sistema com 12 GDL e o modelo reduzido (que possui um custo computacional menor).

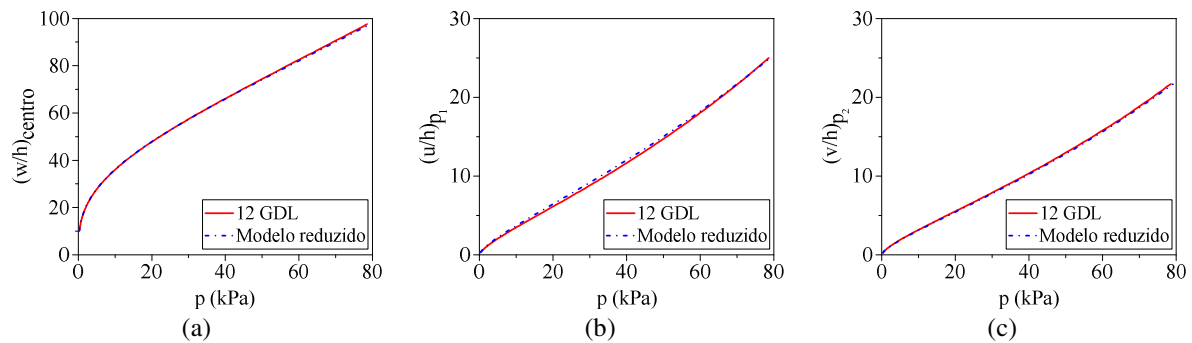


Figura 3. Diagramas pressão-deslocamento, NLF e NLG, comparativo entre o modelo reduzido e o de 12 GDL (a) w ; (b) u ; (c) v

4 Conclusão

A investigação do comportamento estático de placas retangulares hiperelásticas produz respostas satisfatórias para um sistema com doze GDL. Diante do grande esforço computacional requisitado para a solução de um sistema com esse número de graus de liberdade, busca-se estabelecer um modelo reduzido que represente de forma adequada o comportamento da placa. Emprega-se, então, o Método de Karhunen-Loève e deduz-se um modelo de baixa dimensão. Para a geometria estudada, tanto no sistema com apenas NLG quanto naquele que considera ambas as não linearidades, a utilização de apenas um modo ortogonal próprio permite a obtenção de um modelo reduzido eficiente o que pode ser comprovado por meio da comparação dos diagramas pressão-deslocamento.

Referências

- [1] I. Breslavsky; M. Amabili; M. Legrand, “Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 58, pp. 30–40, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009, 2014.
- [2] I. Breslavsky; M. Amabili; M. Legrand, “Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates”. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n. 19, pp. 4668–4681, DOI: 10.1016/j.jsv.2014.04.028, 2014.
- [3] C. Wolter, “Uma introdução à redução de modelos através da expansão de Karhunen-Loève”. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. DOI: 10.17771/PUCRio.acad.2519.
- [4] F. M. A. Silva, “Modelos de Dimensão Reduzida para Análise das Oscilações Não-Lineares e Estabilidade de Cascas Cilíndricas”. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008, DOI: 10.17771/PUCRio.acad.11688.